Université d'Aix-Marseille	Site de l'Etoile, CMI
Master 1 de Mathématiques 2016-2017	Analyse Fonctionnelle

Examen Partiel de Novembre 2017.

Exercice 1

Considérons l'espace $\mathbb{E} := C[0,1]$. Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{E}$ telle que $(\mathbb{E}, \| \ \|)$ soit un espace de Banach et que pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{E}$ et tout élément f de $\mathbb{E}$ tels que $\|f_n - f\| \to 0$ quand n tend vers $+\infty$ on ait

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t), \ \ \forall t \in [0,1].$$

1. Donner un exemple d'une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{E}$ qui vérifie les hypothèses ci-dessus.

   La norme $\| \ \|_\infty$ est un exemple de norme vérifiant les hypothèses.

2. Énoncer le théorème du graphe fermé.

   Voir cours.

3. Énoncer le théorème de l'application ouverte.

   Voir cours

4. Montrer que l'application identité $\mathrm{Id} : f \mapsto f$ de $(\mathbb{E}, \| \ \|)$ sur $(\mathbb{E}, \| \ \|_\infty)$ est continue.

   Pour cela, nous faisons appel au théorème du graphe fermé. Nous allons montrer que le graphe G_{Id} de l'application identité $f \mapsto f$ est fermé dans l'espace produit $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ muni de la norme produit

   $$\|(f,g)\| := \|f\| + \|g\|_\infty.$$

   Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{E}$ telle que (f_n, f_n) converge vers (f,g) dans $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$. En particulier, on a

   $$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to+\infty} \|f_n - g\|_\infty = 0.$$

   D'après les hypothèses on a donc

   $$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t) = g(t), \ \ \forall t \in [0,1].$$

   D'où G_{Id} est fermé de sorte que par le théorème du graphe fermé on voit que l'application linéaire $\mathrm{Id} : (\mathbb{E}, \| \ \|) \to (\mathbb{E}, \| \ \|_\infty)$ est continue.

5. En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

   $$\|f\|_\infty \le \alpha \|f\|, \ \ \forall f \in \mathbb{E}.$$

   Par la question précédente on sait que l'application linéaire $\mathrm{Id} : (\mathbb{E}, \| \ \|) \to (\mathbb{E}, \| \ \|_\infty)$ est continue. Il suffit donc de prendre $\alpha := \|\mathrm{Id}\|$.

6. Montrer que les normes $\| \ \|$ et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes.

   On applique le théorème de l'application ouverte à l'isomorphisme algébrique Id : $(\mathbb{E}, \| \ \|) \to (\mathbb{E}, \| \ \|_\infty)$ qui est continue de l'espace de Banach $(\mathbb{E}, \| \ \|)$ sur l'espace de Banach $(\mathbb{E}, \| \ \|_\infty)$. C'est donc un isomorphisme topologique, ce qui montre l' équivalence des normes $\| \ \|$ et $\| \ \|_\infty$.

Exercice 2

On suppose que $(\mathbb{E}, \| \ \|_\mathbb{E})$ est un espace normé quelconque et on note $\mathbb{E}'$ l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $\mathbb{E}$ muni de sa norme naturelle

$$\|f\|_{\mathbb{E}'} := \sup_{\|x\|_\mathbb{E}=1} |f(x)|, \ \ \forall f \in \mathbb{E}'.$$

1. Établir que $(\mathbb{E}', \| \ \|_{\mathbb{E}'})$ est un espace de Banach.

   Voir cours avec $\mathbb{E}' = \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (muni de la norme associée au module) qui est complet.

2. Énoncer le théorème de Banach-Steinhaus.

   Voir cours.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{E}$ telle que telle que pour tout $f \in \mathbb{E}'$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)$ converge. Montrer que l'application $\mathcal{G} : f \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)$ est une forme linéaire continue sur $(\mathbb{E}', \| \ \|_{\mathbb{E}'})$.

   Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit la forme linéaire $T_N : \mathbb{E}' \to \mathbb{K}$ par

   $$T_N(f) := \sum_{n=0}^{N} f(x_n), \ f \in \mathbb{E}'.$$

   T_N est clairement continue sur $\mathbb{E}'$ et on a $\|T_N\| \leq \sum_{n=0}^{N} \|x_n\|$. Comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)$ converge tout $f \in \mathbb{E}'$, on voit que tout $f \in \mathbb{E}'$ on a

   $$\sup_{N\in\mathbb{N}} |T_N(f)| < +\infty$$

   de sorte que par le théorème de Banach-Steinhaus on obtient

   $$\sup_{N\in\mathbb{N}} \|T_N\| < +\infty.$$

   D'où tout $f \in \mathbb{E}'$ on a

   $$|\mathcal{G}(f) = \lim_{N\to+\infty} |T_N(f)| \leq \|f\| \sup_{N\in\mathbb{N}} \|T_N\|$$

   ce qui montre que $\mathcal{G}$ est continue sur $\mathbb{E}'$.

Problème

Les deux parties sont indépendantes. De plus tout résultat de l'une des questions du problème peut être utilisé par la suite, même s'il n'a pas été établi.

Partie 1. On dit qu'un espace métrique $(\mathbb{X}, d)$ est de Baire si l'intersection de toute famille dénombrable d'ouverts denses est dense.
1.1 Montrer que $(\mathbb{Z}, d)$ est de Baire pour la distance $d(m,n) := |m-n|$.
Il suffit de remarquer que si U est un ouvert dense dans $\mathbb{Z}$, alors $U = \mathbb{Z}$, car si $n \in \mathbb{Z}$, alors $\{n\}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{Z}$. Donc $\{n\} \cap U \neq \emptyset$. D'où $n \in U$.
1.2 Montrer que $(\mathbb{Q}, d)$ n'est pas de Baire pour la distance $d(x,y) := |x-y|$.

Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, posons $U_r := \mathbb{Q} \setminus \{r\}$. Il est clair que U_r est un ouvert dense dans $\mathbb{Q}$. Cependant

$$\cap_{r \in \mathbb{Q}} U_r = \emptyset$$

qui n'est pas dense dans $\mathbb{Q}$.

Partie 2. On suppose que $(\mathbb{X}, d)$ est complet et soit U un ouvert de $(\mathbb{X}, d)$. Posons

$$d_U(x,y) := d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)} \right|, \ \ (x,y) \in U^2.$$

2.1 Montrer que $x \mapsto d(x, U^c)$ est 1-Lipschitzienne sur (X, d), et est donc continue sur (X, d).
Soient $(x,y,t) \in \mathbb{X}^2 \times U^c$. En utilisant la définition de $d(\cdot, U^c)$ et l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned} d(x,U^c) &\leq d(x,t) \\ &\leq d(x,y) + d(y,t) \end{aligned}$$

de sorte qu'en passant à l'inf en $t \in U^c$ on obtient :

$$d(x,U^c) \leq d(x,y) + d(y,U^c).$$

D'où

$$d(x,U^c) - d(y,U^c) \leq d(x,y)$$

et en échangeant les roles de x et y on obtient par symétrie de d

$$d(y,U^c) - d(x,U^c) \leq d(y,x) = d(x,y).$$

Il s'ensuit que

$$|d(y,U^c) - d(x,U^c)| \leq d(y,x).$$

2.2 Montrer que pour $x \in U$ $d(x, U^c) \neq 0$.
Soit $x \in U$. Comme U est ouvert dans $\mathbb{X}$, alors il existe $r > 0$ tel que la boule $\mathbb{B}(x,r)$ centrée en x et de rayon r soit contenue dans U. Donc pour tout $y \in U^c$ on a $d(x,y) \geq r$. En passant à l'inf en $y \in U^c$ on obtient $d(x,U^c) \geq r > 0$.

2.3 Montrer que $(\mathbb{X}, d)$ est de Baire.

Appliquer le théorème de Baire.

2.4 Établir que d_U est une distance sur U.

Soient $(x, y, z) \in U^2$. En utilisant la définition de $d(\cdot, U^c)$ on a

$$\begin{aligned} d_U(x,y) = 0 &\Longleftrightarrow d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)} \right| = 0 \\ &\Longleftrightarrow d(x,y) = \left| \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)} \right| = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

En utilisant la symétrie de d on a

$$\begin{aligned} d_U(x,y) &= d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)} \right| \\ &= d(y,x) + \left| \frac{1}{d(y,U^c)} - \frac{1}{d(x,U^c)} \right| \\ & d_U(y,x) \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire de d on a

$$\begin{aligned} d_U(x,y) &\le d(x,z) + d(z,y) + \left| \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(z,U^c)} + \frac{1}{d(z,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)} \right| \\ &\le d(x,z) + d(z,y) + \left| \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(z,U^c)} \right| + \left| \frac{1}{d(z,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)} \right| \\ &= d_U(x,z) + d_U(z,y) \end{aligned}$$

ce qui montre l'inégalité triangulaire de d_U.

2.5 Établir que (U, d_U) est de Baire.

Il suffit d' établir que (U, d_U) est complet. Pour cela, considérons une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans (U, d_U). Comme $d \le d_U$ on voit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{X}, d)$ qui est complet. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(\mathbb{X}, d)$ vers une limite x. Nous allons montrer que $x \in U$ et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (U, d_U) vers x. Soit $\varepsilon > 0$. Donc il existe un entier naturel N tel que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ on ait

$$m, n \ge N \Rightarrow d_U(x_n, x_m) \le \varepsilon. \tag{1}$$

En particulier, on a

$$n \ge N \Rightarrow \left| \frac{1}{d(x_n,U^c)} - \frac{1}{d(x_N,U^c)} \right| \le d_U(x_n, x_m) \le \varepsilon$$

de sorte que par l'inégalité triangulaire on a

$$n \ge N \Rightarrow \frac{1}{d(x_n,U^c)} \le \frac{1}{d(x_N,U^c)} + \varepsilon$$

ou encore,

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, U^c) \geq \left(\frac{1}{d(x_N, U^c)} + \varepsilon \right)^{-1}.$$

Par continuité de la fonction $d(\cdot, U^c)$ on voit que en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité précédente on obtient

$$d(x, U^c) \geq \left(\frac{1}{d(x_N, U^c)} + \varepsilon \right)^{-1} > 0.$$

Donc $x \in U$. Finalement, par continuité de la fonction $d_U(x_n, \cdot)$ sur U, en passant à la limite quand $m \to +\infty$ dans l'inégalité (1) on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$n \geq N \Rightarrow d_U(x_n, x) \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (U, d_U) vers x.
2.6 Établir que l'application identité $x \mapsto x$ de (U, d_U) sur (U, d) est un homéomorphisme.

En particulier pour montrer que $x \mapsto x$ est continue en tout point x_0 de (U, d) sur (U, d_U), on pourra penser à utiliser la continuité de $x \mapsto d(x, U^c)$ en x_0.
Pour cela, il suffit de montrer que l'application identité $x \mapsto x$ de (U, d_U) sur (U, d) est continue et que l'application identité $x \mapsto x$ de (U, d) sur (U, d_U) est continue. La première assertion est garantie par le fait que $d \leq d_U$.

Fixons $x_0 \in U$. La seconde assertion découle de la continuité de la fonction $f : x \mapsto d(x, U^c))$ et de celle de $g : X \mapsto \frac{1}{X}$ sur $\mathbb{R}^*$. En effet on a pour $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $|d(x_0, U^c) - d(y, U^c)| < \alpha$ alors $\left| \frac{1}{d(x_0, U^c)} - \frac{1}{d(y, U^c)} \right| < \varepsilon$.

Or comme $x \mapsto d(x, U^c)$ est 1-lipschitzienne on a

$$|d(x_0, U^c) - d(y, U^c)| \leq d(x_0, y)$$

Donc pour $y \in U$ tel que $d(x_0, y) < \inf(\alpha, \varepsilon)$ on a bien $d_U(x_0, y) < 2\varepsilon$, ce qui nous donne le résultat.

Partie 3. On suppose que $(\mathbb{X}, d)$ n' est pas complet et pour tout $a \in \mathbb{X}$ et $r > 0$ on note $\mathbb{B}_f(a, r) := \{x \in \mathbb{X} : d(a, x) \leq r\}$.
3.1 Montrer que $\mathbb{B}_f(a, r)$ est un fermé de $(\mathbb{X}, d)$ $\forall a \in \mathbb{X}$ et $\forall r > 0$.
Si $b \notin \mathbb{B}_f(a, r)$, posons $\varepsilon := d(a, b) - r$. Par l'négalité triangulaire on a pour tout $x \in \mathbb{B}_f(b, \varepsilon)$

$$d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a) < \varepsilon + d(b, a) = r.$$

D'où $\mathbb{B}_f(b, \varepsilon) \subset \mathbb{X} \setminus \mathbb{B}_f(a, r)$, ce qui montre que $\mathbb{X} \setminus \mathbb{B}_f(a, r)$ est ouvert.

3.2 Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{X}$ non convergente dans $(\mathbb{X}, d)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}.$$

Comme $(\mathbb{X}, d)$ n' est pas complet on peut trouver une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans $(\mathbb{X}, d)$ mais non convergente dans $(\mathbb{X}, d)$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ on ait

$$m, n \geq N \Rightarrow d(y_n, y_m) \leq \varepsilon. \tag{3}$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2^0}$, on peut donc trouver un entier naturel N tel que pour tous $m, l \in \mathbb{N}$ on ait

$$m, l \geq N_0 \Rightarrow d(y_l, y_m) \leq \frac{1}{2^0}.$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2^1}$, on peut donc trouver un entier naturel $n_1 \geq N_0 + 1$ tel que pour tous $m, l \in \mathbb{N}$ on ait

$$m, l \geq N_1 \Rightarrow d(y_l, y_m) \leq \frac{1}{2^1}.$$

On itérant ce procédé on montre qu'à à l'étape $n \geq 2$ il existe un entier naturel $N_n \geq N_{n-1} + 1$ tel que pour tous $m, l \in \mathbb{N}$ on ait

$$m, l \geq N_n \Rightarrow d(y_l, y_m) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Il est clair, que la suite $n \mapsto N_n$ est strictement croissante et qu'en posant $x_n := y_{N_n}$ on a que pour tous $n \in \mathbb{N}$ on a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{X}$ non convergente dans $(\mathbb{X}, d)$ car c'est une sous-suite d'une suite de Cauchy non convergente dans $(\mathbb{X}, d)$.

3.3 Montrer que la la suite $(\mathbb{B}_f(x_n, \frac{1}{2^{n-1}}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés telle que

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{B}_f(x_n, \frac{1}{2^{n-1}}) = \emptyset.$$

D'après la question 3.1) $\mathbb{B}_f(x_n, \frac{1}{2^{n-1}})$ est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, si $x \in \mathbb{B}_f(x_{n+1}, \frac{1}{2^n})$, alors

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x)$$
$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

ce qui montre que $\mathbb{B}_f(x_{n+1}, \frac{1}{2^n}) \subset \mathbb{B}_f(x_n, \frac{1}{2^{n-1}})$. Supposons que $\cap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{B}_f(x_n, \frac{1}{2^{n-1}}) \neq \emptyset$. Soit $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{B}_f(x_n, \frac{1}{2^{n-1}})$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

ce qui montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers x dans $(\mathbb{X}, d)$. Cela contredit 3.2). D'où

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{B}_f(x_n, \frac{1}{2^{n-1}}) \neq \emptyset.$$