Exercice 1.

1. Vrai ! en effet vu que f est continue sur $\mathbb{R}$ elle est intégrable sur tout intervalle $[a,b]$

on a donc pour $x \geq 1$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt$$

donc pour $x \geq 1$

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt$

comme $\int_0^x f(t)\,dt \to \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ qui existe par hypothèse,

on a bien $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ qui converge

2. Faux : on prend $f(x) = \frac{1}{x}$. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge alors que

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

3. Vrai. En effet $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et elle est donc continue par morceaux sur $[0,1]$.

Donc $\int_0^1 f(t)\,dt$ est parfaitement définie car

f est intégrable sur $[0,1]$.

4. <u>Faux</u> en effet pour $f(x)=\frac{1}{2x^2}$ on a $\int_0^1 f(x)\,dx$ qui

diverge. En effet c'est une intégrale du type

$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ avec $\alpha>1$, donc elle diverge d'après le

cours (on rappelle qu'on peut même écrire pour $x>0$

pour montrer qu'elle diverge

$$\int_x^1 \frac{dt}{2t^2}=\frac{1}{2}\int_x^1\frac{dt}{t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}\right]_x^1=\frac{1}{2}\left[-1+\frac{1}{x}\right]\xrightarrow[x\to 0^+]{}+\infty\;)$$

<u>Exercice 2.</u>

<u>D_1</u>: la fonction $x\mapsto\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est localement intégrable sur $]0,1]$

comme composée de fonctions continues sur $]0,1]$. Le problème de convergence

est en 1. D'autre part $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq 1$

et $\int_0^1 1\,dt$ converge

donc d'après le théorème de convergence par comparaison des intégrales généralisées de

fonctions positives $\int_0^1\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|dx$ converge. Donc D_1

converge absolument et donc converge.

I_2 : la fonction $x \mapsto \frac{x}{(1+x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.

On a un problème de convergence en $+\infty$.

Or en $+\infty$ $\frac{x}{(1+x)^2} \sim \frac{1}{x}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ est une intégrale de Riemann du type

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ avec $\alpha = 1 \leq 1$, donc divergente.

Donc par le critère par équivalent de convergence des intégrales généralisées de fonctions positives $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(1+x)^2}\,dx$ diverge.

I_3: la fonction $x \mapsto x^2 e^{-2x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et positive.

on a $\lim_{x \to +\infty} x^4 e^{-2x} = 0$

donc pour x assez grand $x^4 e^{-2x} \leq 1$

donc $x^2 e^{-2x} \leq \frac{1}{x^2}$ pour x assez grand.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale du type $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ avec $\alpha = 2 > 1$

donc elle converge. Donc par le critère par comparaison de convergence des intégrales généralisées de fonctions positives I_3 converge.

Exercice 3:

1. On a $x \mapsto \ln(x)$ qui est continue sur $]0,1]$ et donc localement intégrable sur cet intervalle.

Pour $X > 0$

$$\int_X^1 \ln(x)\,dx = \left[x\ln(x)\right]_X^1 - \int_X^1 x \times \frac{1}{x}\,dx$$

$$= -X\ln(X) - (1-X) \underset{X\to 0}{\longrightarrow} -1$$

donc $\lim\limits_{X\to 0} \int_X^1 \ln(x)\,dx$ existe et vaut -1.

2. On a $x \mapsto \left|\frac{\ln(x)}{1+x^2}\right|$ qui est continue sur $]0,1]$ et donc localement intégrable sur cet intervalle. Elle est de plus de signe constant (cag) pour $0<x<1$.

On $\left|\frac{\ln(x)}{1+x^2}\right| \sim |\ln(x)|$ pour x au voisinage de 0.

Remarquons que $\ln(x) \leq 0$ pour $0<x\leq 1$ donc $|\ln(x)| = -\ln(x)$ et donc $\int_0^1 |\ln(x)|\,dx$ converge. Donc par le critère par équivalent de convergence des intégrales généralisées de fonctions de signe constant

$\int_0^1 \frac{|\ln(x)|}{1+x^2}\,dx$ converge donc $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx$ converge.

3. On prend $X>0$ et $\int_1^X \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx$ et on effectue le changement de variable $u = \frac{1}{x}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{u} \\ dx = -\frac{1}{u^2}\,du \\ \text{si } x = 1 \quad u = 1 \\ \text{si } x = X \quad u = \frac{1}{X} \end{cases}$$

ce qui donne
$$\int_1^X \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx = \int_1^{\frac{1}{X}} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \times -\frac{1}{u^2}\,du$$

$$= \int_{\frac{1}{X}}^{1} \frac{-\ln(u)}{1+u^2}\,du$$

quand $X \to +\infty$ $\displaystyle\int_1^X \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx \to \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx$

et $\displaystyle -\int_{\frac{1}{X}}^{1} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,du \to -\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,du$ qui existe

d'après la question précédente

d'où D_2 converge et $D_2 = -D_1$

4- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx$

$$= -D_2 + D_2 = 0$$

5. posons $x = \frac{t}{2}$

on a alors $\begin{cases} t = 2x & \text{si } t = 0 \quad x = 0 \\ dt = 2dx & \text{si } t = X \quad x = \frac{X}{2} \end{cases}$

d'où $$\int_0^X \frac{dt}{4+t^2} = \int_0^{\frac{X}{2}} \frac{dx}{4+(2x)^2} \times 2\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{X}{2}} \frac{1}{4} \times \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{X}{2}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Arctan}(x)\Big]_0^{\frac{X}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{X}{2}\right)$$

6- $$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{4+t^2} = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} \times \lim_{X\to+\infty} \mathrm{Arctan}\left(\frac{X}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

7- on pose $\begin{cases} u = \frac{x}{2} \\ x = 2u \\ dx = 2du \\ \text{si } x = 0 \quad u = 0 \\ \text{si } x = X \quad u = \frac{X}{2} \end{cases}$ dans $\displaystyle\int_0^X \frac{\ln(x)}{4+x^2}\,dx$ pour $X > 0$

d'où $$\int_0^X \frac{\ln(x)}{4+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{X}{2}} \frac{\ln(2u)}{4+(2u)^2}\,2\,du$$

$$= 2\int_0^{\frac{X}{2}} \frac{\ln(2) + \ln(u)}{4(1+u^2)}\,du$$

$$= \frac{\ln(2)}{2} \times \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{X}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{X}{2}} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,du$$

or

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{\ln(x)}{4+x^2}dx = \frac{\ln(2)}{2}\times\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\ln(u)}{1+u^2}du}_{}$$

$=0$ d'après la question 4 -

d'où

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x)}{4+x^2}dx = \frac{\ln(2)\pi}{4}}$$

Exercice 4 :

1. on a

$$\sin^3(t) = \sin(t)\times\sin^2(t)$$
$$= \sin(t)\left[\frac{1-\cos(2t)}{2}\right]$$
$$= \frac{\sin(t)}{2} - \frac{\sin(t)\cos(2t)}{2}$$

or

$$\sin(t)\cos(2t) = \frac{1}{2}\left[\sin(3t)+\sin(t-2t)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin(3t)-\sin(t)\right]$$

d'où

$$\sin^3(t) = \frac{\sin(t)}{2} - \frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{1}{4}\sin(t)$$
$$= \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t)$$

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)t^2\,dt = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin(t)\,dt - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(3t)t^2\,dt$$

On calcule chaque intégrale par partie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin(t)\,dt = \left[-\cos(t)\,t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\cos(t)\,dt$$

$$= \underbrace{-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\times\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 + 0\times\cos(0)}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\cos(t)\,dt$$

$$= 2\left[t\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,dt$$

$$= 2\,\frac{\pi}{2} - 2\times 0 - 2\left[-\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi - 2\times 1 = \pi - 2$$

d'autre part

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin(3t)\,dt = \left[\frac{-\cos(3t)}{3}\,t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t}{3}\cos(3t)\,dt$$

$$= -\cos\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{0\times\cos(0)}{3}$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}t\cos(3t)\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{t\sin(3t)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(3t)}{3}\,dt$$

$$= \frac{2}{9}\times\frac{\pi}{2}\times\underbrace{\sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)}_{=-1} - \frac{2}{9}\times\left[\frac{-\cos(3t)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\pi}{9} - \frac{2}{9}\times\frac{1}{3} = -\frac{\pi}{9} - \frac{2}{27}$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin^3(t)\,dt = \frac{3}{4}(\pi-2) - \frac{1}{4}\left[-\frac{\pi}{9} - \frac{2}{27}\right]$$

$$= \frac{3}{4}\pi - \frac{3}{2} + \frac{\pi}{36} + \frac{1}{2\times 27}$$

$$= \frac{27\pi + \pi}{36} - \frac{81}{2\times 27} + \frac{1}{2\times 27}$$

$$= \frac{28\pi}{36} - \frac{80}{2\times 27} = \frac{7\pi}{9} - \frac{40}{27}$$

3. $t \mapsto \dfrac{\sin^3(t)}{t^\alpha}$ est localement intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ car

elle est continue sur cet intervalle.

D'autre part $\dfrac{\sin^3(t)}{t^\alpha} \sim \dfrac{t^3}{t^\alpha}$ au voisinage de 0

donc $\dfrac{\sin^3(t)}{t^\alpha} \sim \dfrac{1}{t^{\alpha-3}}$

or $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha-3}}$ est du type $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\beta}$ avec $\beta = \alpha - 3$

elle converge si et seulement si $\beta = \alpha - 3 < 1$

d'où $\alpha - 3 < 1$

$\boxed{\alpha < 4}$