Université d'Aix-Marseille | Site de l'Etoile, CMI
Master 1 de Mathématiques 2017-2018 | Analyse Fonctionnelle

Devoir no 1.

Exercice 1 L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de norme qui rende $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ complet.

1. Soit V un sous-espace vectoriel strict d'un espace vectoriel normé $\mathbb{E}$ (c'est à dire $V \neq \mathbb{E}$). Montrer que $\mathring{V} = \emptyset$.
2. **Définition 1** *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel. On dit que $\mathbb{E}$ admet une base algébrique si il existe un système de vecteurs $\{e_i, i \in I\}$ de $\mathbb{E}$ tel que tout $x \in \mathbb{E}$ s'écrive de manière unique*

   $$x = \sum_{i \in J} x_i e_i \text{ avec } J \subset I, J \text{ fini} .$$

   On suppose que $(\mathbb{E}, N)$ est un espace de Banach qui possède une base algébrique. Montrer que soit $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel de dimension finie, soit I n'est pas dénombrable.
3. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes qui rende cet espace complet.

Exercice 2 *Certains résultats démontrés dans cet exercice sont utiles pour l'exercice 3.*

Définition 2 *Soit (X, d) un espace métrique.*

La distance à une partie A de X est la fonction $d_A : x \mapsto d(x, A)$ définie sur X telle que

$$d_A(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\}$$

Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

1. Montrer que $\overline{A}$ est l'ensemble des points tels que $d(x, A) = 0$.
2. Montrer que $d_A : x \mapsto d(x, A)$ est lipschitzienne de rapport 1.
3. Soit K un compact de X et F un fermé disjoint de K. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous x dans K et y dans F
   $$d(x, y) \geq \alpha$$
4. Soit K un compact de X et U un ouvert qui contient K. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$ on ait l'implication

   $$d(x, K) < r \Rightarrow x \in U$$

Exercice 3 Soit $(\mathbb{E}, \| \ \|)$ un espace normé et $\mathbb{M}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.. On considère la relation $\sim$ suivante définie sur $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$:

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x - y \in \mathbb{M}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les propriétés de l'espace quotient noté $\mathbb{E}/\mathbb{M}$ pour la relation $\sim$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{E}$ (*on pourra consulter l'annexe sur les relations d'équivalence en fin de devoir si nécessaire*).

   On note $\widetilde{x}$ la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{E}$ pour cette relation et $\mathbb{E}/\mathbb{M} = \{\widetilde{x}, x \in \mathbb{E}\}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$.

2. Vérifier que les opérations définies pour tous $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ dans $\mathbb{E}/\mathbb{M}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{x + y} \ \text{ et } \ \lambda \widetilde{x} := \widetilde{\lambda x}$$

   sont bien définies et font de $\mathbb{E}/\mathbb{M}$ un espace vectoriel.

   En particulier on commencera par montrer que ces opérations ne dépendent pas de l'élément x de $\mathbb{E}$ dans $\widetilde{x}$ ni de y de $\mathbb{E}$ dans $\widetilde{y}$ qu'on choisit pour faire le calcul.

3. Pour tout $x \in \mathbb{E}$, on pose

$$N(\widetilde{x}) := d(x, \mathbb{M}) := \inf\{d(x, y) : y \in \mathbb{M}\}$$

   où d est la distance associée à la norme $\| \ \|$.

   Montrer que N est une norme sur $\mathbb{E}/\mathbb{M}$ si et seulement si $\mathbb{M}$ est fermé dans $\mathbb{E}$.

   Désormais, on suppose que $\mathbb{M}$ est fermé dans $\mathbb{E}$.

4. Établir que l'application $\pi : x \mapsto \widetilde{x}$ est linéaire et montrer que pour tout $x \in \mathbb{E}$

$$N(\pi(x)) \leq \|x\|$$

   Montrer que $\pi\left(\mathbb{B}_{\mathbb{E}}(0,1)\right) = \mathbb{B}_{\mathbb{E}/\mathbb{M}}(0,1)$. En déduire que π est ouverte de $(\mathbb{E}, \| \ \|)$ sur $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$.

5. Montrer que toute suite de Cauchy $(\widetilde{x_n})_n$ dans $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$ admet une sous-suite $(\widetilde{x_{\varphi(n)}})_n$ vérifiant

$$N\left(\widetilde{x_{\varphi(n+1)}} - \widetilde{x_{\varphi(n)}}\right) < \frac{1}{2^n}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

6. Montrer que si $(\widetilde{x_n})_n$ et $(\widetilde{x_{\varphi(n)}})_n$ sont comme dans la question précédente, alors pour tout entier naturel n il existe $y_n \in \widetilde{x_{\phi(n)}}$ tel que la suite $(y_n)_n$ vérifie

$$\|y_{n+1} - y_n\| < \frac{1}{2^n}.$$

7. Établir que si $(\mathbb{E}, \| \ \|)$ est un espace de Banach alors $(\mathbb{M}, \| \ \|)$ et $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$ sont des espaces de Banach.

   Réciproquement, supposons que $(\mathbb{M}, \| \ \|)$ et $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$ sont des espaces de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(\mathbb{E}, \| \ \|)$.
8. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{E}$ tel que la suite $(\widetilde{x_n})_n$ converge vers $\widetilde{x}$ dans $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in \mathbb{M}$, tel que
$$\|x_n - x - y_n\| < \frac{1}{n} + N\left(\widetilde{x_n} - \widetilde{x}\right).$$
10. Montrer que la suite $(y_n)_n$ est de de Cauchy dans $\mathbb{M}$.
11. Établir que $(\mathbb{E}, \| \ \|)$ est un espace de Banach.

Annexe : rappels sur les relations d'équivalence

Un exemple bien connu de relation d'équivalence est celle définie pour un entier n fixé sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ par la relation $\sim_n$ telle que pour deux éléments x et y de $\mathbb{Z}$
$$x \sim_n y \text{ si et seulement si } x - y \text{ est divisible par } n.$$
Elle permet de construire l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On rappelle ici au cas où cela serait nécessaire quelques définitions et propriétés liées aux relations d'équivalence sur un ensemble utiles pour l'exercice du devoir.

Définition 3 *On rappelle qu'une relation binaire notée $\sim$ définie sur un ensemble $\mathbb{S}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{S}$ si*

1. *$\sim$ est réflexive : $x \sim x$ pour tout $x \in \mathbb{S}$.*
2. *$\sim$ est symétrique : pour tous x et y dans $\mathbb{S}$ $x \sim y$ si et seulement si $y \sim x$*
3. *$\sim$ est transitive : pour tous x, y et z dans $\mathbb{S}$ si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $x \sim z$.*

Définition 4 *Soit $\mathbb{S}$ un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence définie sur $\mathbb{S}$.*

La classe d'équivalence d'un élément x pour $\sim$ notée $\widetilde{x}$ est définie par $\widetilde{x} = \{y \in \mathbb{S} : y \sim x\}$.

Définition 5 *On appelle ensemble quotient de $\mathbb{S}$ pour la relation $\sim$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{S})$ qui est $\{\widetilde{x} : x \in \mathbb{S}\}$.*

Proposition 1 *Soit $\mathbb{S}$ un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence définie sur $\mathbb{S}$.*
L'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$ forme une partition de $\mathbb{S}$.