DM1 : préparation du TP 1 et problème extrait de l'examen de mai 2017.

# 1 Préparation du TP 1

**Exercice 1.**

Étudier les intégrales suivantes : dire où sont les problèmes de convergence éventuels, et montrer que ces intégrales convergent

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx \qquad I_2 = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \qquad I_3 = \int_0^\infty \cos(e^x) dx$$

**Exercice 2.**

1. Montrer que toutes les intégrales suivantes sont correctement définies et sont bien convergentes

$$J_1 = \int_{-2\pi}^{2\pi} x^2 \cos(x) dx, \quad J_2 = \int_0^{2\pi} \ln(x) \sin(x) dx, \quad J_3 = \int_{-10}^{10} \frac{x^2}{1+x^4} dx \quad J_4 = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

2. Calculer $J_1$ et $J_4$.
3. On pose la fonction dite de « cosinus intégral »

$$C_i(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt = \gamma + \ln(x) + \int_0^x \frac{\cos(t)-1}{t} dt,$$

où $x > 0$ et $\gamma \sim 0.577\ldots$ est la constante d'Euler.

*On ne cherchera pas à montrer la formule précédente, ni à calculer $C_i$ ni $\gamma$ qui sont évaluées grâce à des approximations numériques.*
Calculer $J_2$ à l'aide d'une intégration par partie, en fonction de $C_i(2\pi)$, $\gamma$ et $\ln(2\pi)$.
4. On veut calculer $J_3$.

*Si vous savez faire ce calcul alors allez-y ! Si non on vous propose de suivre les étapes suivantes.*

L'objectif est d'abord de décomposer $\frac{x^2}{1+x^4}$ en éléments simples puis d'intégrer.

(a) Factoriser $1 + x^4$ en le produit de deux polynômes de degré 2.

(b) Calculer $a_1$, $a_2$, $b_1$ et $b_2$ tels que

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{a_1x+b_1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{a_2x+b_2}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

(c) Calculer $\displaystyle\int_{-10}^{10} \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$ et $\displaystyle\int_{-10}^{10} \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx$

(d) Trouver $a \neq 0$ et $b \neq 0$ tels que

$$x^2+\sqrt{2}x+1 = (x+a)^2+b^2 = b^2\left(\left(\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\right)^2+1\right)$$

et

$$x^2-\sqrt{2}x+1 = (x-a)^2+b^2 = b^2\left(\left(\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\right)^2+1\right)$$

(e) En déduire $\displaystyle\int_{-10}^{10} \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx$ et $\displaystyle\int_{-10}^{10} \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$

(f) Calculer $J_3$

## 2 Étude de l' intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx$

L'objectif de cette partie est le calcul de $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx$ et $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx$.

1. Justifier pourquoi ces intégrales sont des intégrales généralisées.
2. On pourra sans démonstration utiliser le résultat suivant

   **Proposition 1**

   *Soient $u$ et $v$ deux fonctions définies au voisinage d'un point $x_0$ et de signe positif telles que $v(x) \to 0$ quand $x \to x_0$.*

   *Si au voisinage d'un point $x_0$ on a $u(x) \sim v(x)$ alors*

   $$\ln(u(x)) \sim \ln(v(x))$$

   Montrer que $I_1$ est une intégrale convergente.
3. Montrer que $I_1 = J_1$.
4. L'objectif de cette question est le calcul de $I_1$.

   (a) Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(x))dx$ en fonction de $I_1$ à l'aide du changement de variable $t = \pi - x$.

   (b) Montrer que $I_1 + J_1 = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + I_1$.

   *On rappelle que* $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

   (c) Calculer $I_1$.
5. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \ln(\sin(nx))dx$.

   Montrer que $I_n = -\frac{\pi}{2n}\ln(2)$ à l'aide d'un changement de variables approprié.