Université d'Aix-Marseille Master 1 de Mathématiques 2017-2018	Site de l'Etoile, CMI Analyse Fonctionnelle

Examen de Janvier 2018.

Problème

Toutes les parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres. De plus, tout résultat énoncé dans l'une des questions du problème peut être utilisé par la suite, même s'il n'a pas été établi.

Dans ce problème, on considère l'espace de Banach complexe $\mathbb{E} := (C[0,1], \| \|_\infty)$ et l'espace de Hilbert complexe $\mathbb{H} := (L^2[0,1], \langle , \rangle)$ muni de la norme $\| \|_2$ où

$$\|f\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad f \in \mathbb{F},$$
$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt, \quad f, g \in \mathbb{H}$$
$$\|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in \mathbb{H}.$$

Partie 1.

Soit $f_1(t) := 1$ et $f_2(t) := \sin(\pi t)$. Soit $\mathbb{G}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{H}$ formé des éléments f tels que

$$\langle f, f_1\rangle = \langle f, f_2\rangle = 0.$$

1.1 Vérifier que $\mathbb{G}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{H}$.

1.2 Soit $g(t) := \cos(\pi t)$. Calculer la distance $d_{\mathbb{H}}(g, \mathbb{G})$.

Partie 2.

Soit $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ un opérateur linéaire tel que $\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$.

2.1 Énoncer le théorème du graphe fermé.

2.2 Montrer que $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ définit une application linéaire continue.

Partie 3.

Soit $K(x,t) := \frac{xt}{(1-xt)^\alpha}$ défini pour $(x,t) \in [0,1] \times [0,1[$ où $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

3.1 Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $t \in]0,1[$ $\frac{xt}{(1-xt)^\alpha} \leq \frac{t}{(1-t)^\alpha}$ et en déduire que

$$\int_0^1 \int_0^1 (K(x,t))^2 dt dx < \infty.$$

3.2 Pour $f \in \mathbb{H}$ on définit $T(f) : x \mapsto \int_0^1 K(x,t)f(t)dt$.

3.2.1 Montrer qu'il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $f \in \mathbb{H}$

$$|T(f)(x)| \leq C_1 \|f\|_2$$

et montrer que $T(f) \in \mathbb{H}$.

3.2.2 Énoncer le théorème d'Ascoli.

3.3 On fixe x_0 et x_1 tels que $0 < x_0 < x_1 < 1$ et on considère $B = \{f \in \mathbb{H} : \|f\|_2 \leq 1\}$.

3.3.1 Montrer qu'il existe $C_2 > 0$ telle que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in [x_0, x_1]$

$$\left| \frac{\partial K}{\partial x}(x,t) \right| \leq \frac{C_2}{(1-x_1)^{\alpha+1}}$$

3.3.2 En déduire qu'il existe $C_3 > 0$ tel que pour toute $f \in B$ et tous x, y dans $[x_0, x_1]$ $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leq C_3 |x-y|$.

3.3.3 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B. Peut-on extraire de la suite $(T(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge uniformément sur $[x_0, x_1]$? Justifier votre réponse.

Partie 4.

4.1 Montrer que pour $a, b \in \mathbb{C}$ $\sqrt{|a|+|b|} \leq \sqrt{|a|} + \sqrt{|b|}$.

4.2 Montrer que si $f \in \mathbb{H}$ alors $\int_0^1 |f(t)|dt$ est finie et $\int_0^1 |f(t)|dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$.

4.3 Soit $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ qui est fermé dans $\mathbb{H}$.

4.3.1 Établir que $\mathbb{F}$ est fermé dans $\mathbb{E}$.

4.3.2 Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in \mathbb{F}$ on ait

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \leq C \|f\|_2.$$

4.4 Soit $\{f_1, \cdots, f_n\}, n \in \mathbb{N}^*$, une suite orthonormale dans $\mathbb{H}$ formée d'éléments de $\mathbb{F}$.

4.4.1 Montrer que pour tous $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ on a

$$\|z_1 f_1 + \cdots z_n f_n\|_2^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2.$$

4.4.2 Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ et tous $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ on a

$$|z_1 f_1(t) + \cdots z_n f_n(t)| \leq C \left(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4.4.3 En choisissant convenablement $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, en déduire que pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$|f_1(t)|^2 + \cdots |f_n(t)|^2 \leq C \left(|f_1(t)|^2 + \cdots |f_n(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4.4.4 Montrer que $n \leq C$ et que $\mathbb{F}$ est de dimension finie.

4.4.5 Soit $\mathbb{G}$ une partie non vide de $\mathbb{H}$. Montrer que si $\mathbb{G}^{\perp} \subset \mathbb{E}$, alors $\mathbb{G}^{\perp}$ est de dimension finie.

Partie 5.

Considérons un espace normé réel $(\mathbb{M}, \| \ \|_{\mathbb{M}})$ et soit $\mathbb{M}'$ le dual de $\mathbb{M}$ muni de la norme

$$\|f\|_{\mathbb{M}'} := \sup_{x \in \mathbb{M} \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{\mathbb{M}}}, \ \ f \in \mathbb{M}'.$$

5.1 Énoncer le théorème de Hahn-Banach analytique.

5.2 Peut-on affirmer que $(\mathbb{M}', \| \ \|_{\mathbb{M}'})$ est un espace de Banach ? Justifier votre réponse.

5.3 Établir que si $x \in \mathbb{M}$, la forme linéaire $\widehat{x} : \mathbb{M}' \to \mathbb{R}$ définie pour tout $f \in \mathbb{M}'$ par

$$\widehat{x}(f) := f(x)$$

est une forme linéaire continue sur $\mathbb{M}'$ et calculer sa norme.