Année universitaire 2017/2018

Site : ☐ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet de : ☐ 1^er^ semestre ☐ 2^ème^ semestre ☒ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h

Examen de : L2 Nom du diplôme : Licence de sciences pour l'ingénieur

Code du module : ENSPI4U1/SPI4U1TA Libellé du module : UE1. Séries et applications

Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Il est conseillé de lire en entier l'énoncé avant de commencer.
Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

Notation et définition Soit f une fonction 2π périodique telle que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$ existe.

— Soit $n \in \mathbb{Z}$. On note $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$ le coefficient de Fourier d'ordre n de f. On a aussi pour $n \geq 1$ $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$ et $a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$.

Exercice 1.

Discuter la nature des intégrales suivantes et les calculer si elles sont convergentes.

$$I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Exercice 2.

On considère les trois séries entières

1. $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ de terme général $u_n(x) = x^n$,
2. $V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$ de terme général $v_n(x) = (n+1)x^n$.
3. $W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(x)$ de terme général $w_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

Calculer dans chaque cas le rayon de convergence de la série et donner la valeur des sommes $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$ dans leur domaine de convergence.

Exercice 3.

On considère les séries $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \rho^n \cos(n\theta)$ et $J = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \rho^n \sin(n\theta)$ pour $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ fixés.

1. Donner la condition sur ρ pour que I et J soient absolument convergentes.
2. On prend le cas particulier $\rho = \frac{1}{2}$.
   (a) Justifier que les séries I et J convergent dans ce cas.
   (b) On forme la série à termes complexes $K = I + iJ$ et on note $z = \rho e^{i\theta}$.
   Expliciter le terme général d'ordre n k_n de la série K en fonction de z c'est à dire donner k_n en fonction de z tel que $K = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} k_n$.
   (c) Donner une expression de K en fonction de z.
   (d) En déduire une expression des sommes des séries I et J.

   Indication : on pourra calculer les parties réelles et imaginaires de K.

Exercice 4.

On considère la série de terme général $u_n = \left(\alpha + \frac{1}{n^\beta}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, avec α et β des réels positifs ou nuls fixés.

1. Donner l'expression de $v_n = (u_n)^{\frac{1}{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On prend $\alpha = 0$. Déduire de l'étude de v_n que la série $\sum u_n$ converge pour $\beta > 0$.
3. On prend $\alpha > 0$ quelconque et $\beta = 0$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
4. On suppose $\alpha \neq 1$ et $\beta > 0$. Donner les conditions sur α et β auxquelles la série converge.
5. Soit $\alpha = 1$. On étudie dans ce qui suit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

   Indication : on pourra penser à calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n)$ et en déduire ensuite la limite de u_n.

   (a) Montrer que pour $0 < \beta < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
   (b) Montrer que pour $\beta = 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$.
   (c) Montrer que pour $\beta > 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
6. En déduire que si $\alpha = 1$ la série $\sum u_n$ diverge pour toutes les valeurs de β.

Exercice 5.

Soit f la fonction 2π périodique définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \pi - |x|$.

1. Montrer que la fonction est paire.
2. Tracer le graphe de la fonction sur $[-2\pi, 2\pi]$. La fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
3. Calculer ses coefficients de Fourier.
4. Donner sa série de Fourier.
5. Pour $t \in \mathbb{R}$ fxié la série de Fourier $S_N f(t)$ converge-t-elle vers $f(t)$? Justifiez votre réponse.