Université d'Aix-Marseille | Site de l'Etoile, CMI
Master 1 de Mathématiques 2016-2017 | Analyse Fonctionnelle

Examen Partiel de Novembre 2017.

Exercice 1

Considérons l'espace $\mathbb{E} := C[0,1]$. Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{E}$ telle que $(\mathbb{E}, \| \ \|)$ soit un espace de Banach et que pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{E}$ et tout élément f de $\mathbb{E}$ tels que $\|f_n - f\| \to 0$ quand n tend vers $+\infty$ on ait

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t), \ \ \forall t \in [0,1].$$

1. Donner un exemple d'une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{E}$ qui vérifie les hypothèses ci-dessus.
2. Énoncer le théorème du graphe fermé.
3. Énoncer le théorème de l'application ouverte.
4. Montrer que l'application identité $x \mapsto x$ de $(\mathbb{E}, \| \ \|)$ sur $(\mathbb{E}, \| \ \|_\infty)$ est continue.
5. En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\|f\|_\infty \leq \alpha \|f\|, \ \ \forall f \in \mathbb{E}.$$

6. Montrer que les normes $\| \ \|$ et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes.

Exercice 2

On suppose que $(\mathbb{E}, \| \ \|_\mathbb{E})$ est un espace normé quelconque et on note $\mathbb{E}'$ l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $\mathbb{E}$ muni de sa norme naturelle

$$\|f\|_{\mathbb{E}'} := \sup_{\|x\|_\mathbb{E}=1} |f(x)|, \ \ \forall f \in \mathbb{E}'.$$

1. Établir que $(\mathbb{E}', \| \ \|_{\mathbb{E}'})$ est un espace de Banach.
2. Énoncer le théorème de Banach-Steinhaus.
3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{E}$ telle que telle que pour tout $f \in \mathbb{E}'$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)$ converge. Montrer que l'application $\mathcal{G} : f \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)$ est une forme linéaire continue sur $(\mathbb{E}', \| \ \|_{\mathbb{E}'})$.

Problème

Les deux parties sont indépendantes. De plus tout résultat de l'une des questions du problème peut être utilisé par la suite, même s'il n'a pas été établi.

Partie 1. On dit qu'un espace métrique $(\mathbb{X}, d)$ est de Baire si l'intersection de toute famille dénombrable d'ouverts denses est dense.
1.1 Montrer que $(\mathbb{Z}, d)$ est de Baire pour la distance $d(m,n) =:= |m-n|$.
1.2 Montrer que $(\mathbb{Q}, d)$ n'est pas de Baire pour la distance $d(x,y) := |x-y|$.

Partie 2. On suppose que $(\mathbb{X}, d)$ est complet et soit U un ouvert de $(\mathbb{X}, d)$. Posons

$$d_U(x,y) := d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)} \right|, \ \ (x,y) \in U^2.$$

2.0 Montrer que $x \mapsto d(x, U^c)$ est 1-Lipschitzienne sur (X, d), et est donc continue sur (X, d). Montrer que pour $x \in U$ $d(x, U^c) \neq 0$.
2.1 Montrer que $(\mathbb{X}, d)$ est de Baire.
2.2 Établir que d_U est une distance sur U.
2.3 Établir que (U, d_U) est de Baire.
2.4 Établir que l'application identité $x \mapsto x$ de (U, d_U) sur (U, d) est un homomorphisme.

En particulier pour montrer que $x \mapsto x$ est continue en tout point x_0 de (U, d) sur (U, d_U), on pourra penser à utiliser la continuité de $x \mapsto d(x, U^c)$ en x_0.

Partie 3. On suppose que $(\mathbb{X}, d)$ n' est pas complet et pour tout $a \in \mathbb{X}$ et $r > 0$ on note $\mathbb{B}_f(a,r) := \{x \in \mathbb{X} : d(a,x) \leq r\}$.
3.1 Montrer que $\mathbb{B}_f(a,r)$ est un fermé de $(\mathbb{X}, d)$ $\forall a \in \mathbb{X}$ et $\forall r > 0$.
3.2 Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{X}$ non convergente dans $(\mathbb{X}, d)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}.$$

3.3 Montrer que la la suite $(\mathbb{B}_f(x_n, \frac{1}{2^{n-1}}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés telle que

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{B}_f(x_n, \frac{1}{2^{n-1}}) = \emptyset.$$