Université Aix-Marseille 2017-2018
Master Mathématiques et applications 1ère année

Analyse fonctionnelle

TD1 : Espaces normés, espaces métriques.

Dans l'espace métrique (X,d) et pour tout x_0 dans X

- on note $\mathbb{B}(x_0,r)$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r, c'est à dire $\mathbb{B}(x_0,r)=\{z\in X : d(x_0,z)<r\}$
- on note $\mathbb{B}_f(x_0,r)$ la boule fermée de centre x_0 et de rayon r, c'est à dire $\mathbb{B}_f(x_0,r)=\{z\in X : d(x_0,z)\leq r\}$.

1 Version courte des exercices

Exercice 1.1 (*EXERCICE A SUITE*)

Soit $N\in\mathbb{N}^\star$ et $X=\{0,1\}^N$. Un élément de X est noté $x=(x(1),..,x(N))$

1. Montrer que l'application $d:(x,y)\mapsto card\{i : x(i)\neq y(i)\}$ est une distance sur X.

   On appelle d distance de Hanning. Cette distance est utilisée en particulier en théorie du codage.

2. Pour tout x dans X déterminer $\mathbb{B}(x,1)$.

Exercice 1.2

Soient (X,d) un espace métrique quelconque.
Vérifier que

- les boules ouvertes sont ouvertes
- les boules fermées sont fermées.
- les sphères sont fermées.

Exercice 1.3

Soit X un ensemble ayant plus d'un élément. On pose pour tous x,y dans X $d(x,y)=1$ si $x\neq y$ et $d(x,x)=0$.

1. Montrer que (X,d) est un espace métrique. Quels sont les ouverts et les fermés de X ?
2. Quelle est la boule ouverte centrée en $x_0\in X$ et de rayon 1 ? La boule fermée correspondante $\mathbb{B}_f(x_0,1)$? L'adhérence de $\mathbb{B}(x_0,1)$?
3. Quelles sont les suites convergentes de (X,d) ? Ses suites de Cauchy ? Est-ce un espace complet ?

Exercice 1.4 (*Extrait Partiel 2016-EXERCICE A SUITE*)

Soit $X = \mathcal{C}([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour toute fonction $h : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \frac{h(x)}{x}$ est décroissante on a, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$
$$h(s+t) \leq h(s) + h(t)$$
2. Montrer que $(f,g) \mapsto d(f,g) = \displaystyle\int_0^1 \frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}dt$ définit une distance sur X.

Exercice 1.5

Soit $(\mathbb{E}, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{E}$ et $r > 0$ $\overline{\mathbb{B}(a,r)} = \mathbb{B}_f(a,r)$.
2. Montrer que $\mathbb{B}_f(a,r) \subset \mathbb{B}_f(b,R) \Leftrightarrow r \leq R$ et $\|a-b\| \leq R-r$.

Exercice 1.6

On considère $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Trouvez deux normes sur $C([0,1])$ qui sont équivalentes et deux normes sur $C([0,1])$ qui ne sont pas équivalentes. Justifiez rigoureusement tout ce que vous affirmez.

Exercice 1.7 (*Équivalence entre distances-EXERCICE A SUITE*)

Définition 1

Soit X un ensemble. On considère deux distances d et δ sur X. On dit que les deux distances d et δ sont topologiquement équivalentes (resp. uniformément, resp. fortement) équivalentes si et seulement si l'application Identité I_d est continue (resp uniformément continue, resp lipschitzienne) de (X,d) dans (X,δ) et de (X,δ) dans (X,d).

1. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes
   (a) d et δ sont topologiquement équivalentes.
   (b) pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ et $\tilde{\eta} > 0$ tels que pour tout $y \in X$ tel que $d(x,y) < \eta \Rightarrow \delta(x,y) < \varepsilon$ et pour tout $y \in X$ tel que $\delta(x,y) < \tilde{\eta} \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon$.
   (c) tout ouvert pour la distance d est un ouvert pour la distance δ ainsi que tout ouvert pour la distance δ est un ouvert pour la distance d.
2. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes
   (a) d et δ sont uniformément équivalentes.
   (b) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ et $\tilde{\eta} > 0$ tels que pour tous $x, y \in X$ tels que $d(x,y) < \eta \Rightarrow \delta(x,y) < \varepsilon$ et pour tous $x, y \in X$ tels que $\delta(x,y) < \tilde{\eta} \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon$.

3. Montrer que d et δ sont fortement équivalentes si et seulement si il existe $C > 0$ telle que pour tous x, y dans X

$$C^{-1}d(x,y) \leq \delta(x,y) \leq Cd(x,y)$$

4. Montrer que si d et δ sont deux distances uniformément équivalentes, alors toute suite de Cauchy pour l'une est une suite de Cauchy pour l'autre.
5. Montrer que si d et δ sont topologiquement équivalentes toute suite convergente pour l'une est une suite convergente pour l'autre.

Exercice 1.8 (*distance ultramétrique-EXERCICE A SUITE*)

Soit (X, d) un espace métrique tel qu'on ait

$$d(x,z) \leq \sup(d(x,y), d(y,z)), \quad \forall (x,y,z) \in X^3 \tag{1}$$

On dit que toute distance qui vérifie la propriété (1) est une distance ultramétrique.

1. **Exemple** Soit E un ensemble non vide et $X = E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E. Pour x et y dans X on pose $p(x,y) = \min\{n : x_n \neq y_n\}$ si $x \neq y$ et $p(x,y) = \infty$ si $x = y$.
   (a) Montrer que $d : (x,y) \mapsto \frac{1}{p(x,y)}$ (avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$) est une distance sur X qui vérifie (1).
   (b) Quelles sont les boules ouvertes et fermées pour cette métrique ?
2. On revient au cas général où (X, d) est un espace métrique tel que d vérifie (1).

   Soient x, y, z trois points de X tels que $d(x,y) \neq d(y,z)$. Montrer que $d(x,z) = \sup(d(x,y), d(y,z))$.
3. Soit $x_0 \in X$ et $r > 0$. Montrer que $\mathbb{B}(x_0, r)$ est un ensemble fermé, et que $\mathbb{B}_f(x_0, r)$ est un ensemble ouvert.
4. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{B}(x_0, r)$ on a $\mathbb{B}(x_0, r) = \mathbb{B}(y, r)$. Montrer de même que pour tout $y \in \mathbb{B}_f(x_0, r)$ on a $\mathbb{B}_f(x_0, r) = \mathbb{B}_f(y, r)$.
5. Montrer que si deux boules (ouvertes ou fermées) ont un point commun alors l'une contient l'autre.

2 Version longue des exercices

Exercice 2.1

Cet exercice est la version longue de l'exercice 1.1 de la section d'exercices courts.

Soit $N \in \mathbb{N}^\star$ et $X = \{0,1\}^N$. Un élément de X est noté $x = (x(1), .., x(N))$.

1. Montrer que l'application $d : (x,y) \mapsto card\{i : x(i) \neq y(i)\}$ est une distance sur X.

   On appelle d distance de Hanning. Cette distance est utilisée en particulier en théorie du codage.

2. Pour tout x dans X déterminer $\mathbb{B}(x,1)$.
3. On prend dans cette question uniquement $N = 3$. On note $\alpha = (0,0,0)$, $\beta = (0,1,1)$, $\gamma = (1,0,1)$, $\lambda = (1,1,1)$ et $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \lambda\}$.

   Donner la valeur de $\min\{d(x,y) : x$ et y dans $F, x \neq y\}$.
4. Soit F un sous-ensemble de X et on suppose que $K = \min\{d(x,y) :$ x et y dans $F, x \neq y\}$ est strictement positif.
   (a) Montrer que pour tout $x \in X$ $\mathbb{B}(x, K/2)$ contient au plus un élément de F.
   (b) Soit I un sous-ensemble de $\{1, .., N\}$. Pour x un élément de X on note x^I l'élément de X tel que $x^I(i) = x(i)$ pour i dans I et $x^I(i) = 0$ sinon.

   On suppose que le cardinal de I est supérieur à $N - K + 1$. Montrer que pour tout x et y dans F on a $d(x^I, y^I) > 0$.

   Ce sont ces propriétés qui sont à la base des codes correcteurs d'erreur.

Exercice 2.2

Cet exercice est la version longue de l'exercice 1.4.

Soit $X = \mathcal{C}([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour toute fonction $h : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \frac{h(x)}{x}$ est décroissante on a, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$

$$h(s+t) \leq h(s) + h(t)$$

2. Montrer que $(f,g) \mapsto d(f,g) = \displaystyle\int_0^1 \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} dt$ définit une distance sur X.

3. Sur X comparer la distance d et la distance associée à la norme $\|.\|_\infty$.
4. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de X qui converge simplement vers une fonction $f \in X$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans (X,d).
5. Montrer qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements de X qui converge dans (X,d) mais ne converge pas simplement vers une fonction f dans X.

Exercice 2.3 (*distance ultramétrique*)

Cet exercice est la version longue de l'exercice 1.8.

Soit (X,d) un espace métrique tel qu'on ait

$$d(x,z) \leq \sup(d(x,y), d(y,z)), \quad \forall (x,y,z) \in X^3 \tag{2}$$

On dit que toute distance qui vérifie la propriété (2) est une distance ultramétrique.

1. **Premier exemple**.
   Soit E un ensemble non vide et $X = E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E. Pour x et y dans X on pose $p(x,y) = \min\{n : x_n \neq y_n\}$ si $x \neq y$ et $p(x,y) = \infty$ si $x = y$.
   (a) Montrer que $d : (x,y) \mapsto \frac{1}{p(x,y)}$ (avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$) est une distance sur X qui vérifie (2).
   (b) Quelles sont les boules ouvertes et fermées pour cette métrique ?
2. On revient au cas général où (X,d) est un espace métrique tel que d vérifie (2).

   Soient x, y, z trois points de X tels que $d(x,y) \neq d(y,z)$. Montrer que $d(x,z) = \sup(d(x,y), d(y,z))$.
3. Soit $x_0 \in X$ et $r > 0$. Montrer que $\mathbb{B}(x_0,r)$ est un ensemble fermé, et que $\mathbb{B}_f(x_0,r)$ est un ensemble ouvert.
4. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{B}(x_0,r)$ on a $\mathbb{B}(x_0,r) = \mathbb{B}(y,r)$. Montrer de même que pour tout $y \in \mathbb{B}_f(x_0,r)$ on a $\mathbb{B}_f(x_0,r) = \mathbb{B}_f(y,r)$.
5. Montrer que si deux boules (ouvertes ou fermées) ont un point commun alors l'une contient l'autre.
6. **Deuxième exemple**.
   Soit p un nombre premier fixé. Pour tout entier n on note $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. Soit $x = r/s$ un rationnel non nul.
   (a) On pose $v_p(x) = v_p(r) - v_p(s)$ Montrer que cette définition ne dépend pas de la représentation de x par une fraction particulière, autrement dit qu'elle est indépendante de r et de s.
   (b) Montrer que pour x et y deux rationnels non nuls on a $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$
   (c) On pose maintenant $d(x,x) = 0$ et $d(x,y) = p^{-v_p(x-y)}$ Montrer que d est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 2.4

Cet exercice est la version longue de l'exercice 1.7.

Définition 2

Soit X un ensemble. On considère deux distances d et δ sur X. On dit que les deux distances d et δ sont topologiquement équivalentes (resp. uniformément, resp. fortement) équivalentes si et seulement si l'application Id est continue (resp uniformément continue, resp lipschitzienne) de (X, d) dans (X, δ) et de (X, δ) dans (X, d).

1. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes
   (a) d et δ sont topologiquement équivalentes.
   (b) pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ et $\tilde{\eta} > 0$ tels que pour tout $y \in X$ tel que $d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(x, y) < \varepsilon$ et pour tout $y \in X$ tel que $\delta(x, y) < \tilde{\eta} \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon$.
   (c) tout ouvert pour la distance d est un ouvert pour la distance δ ainsi que tout ouvert pour la distance δ est un ouvert pour la distance d.
2. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes
   (a) d et δ sont uniformément équivalentes.
   (b) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ et $\tilde{\eta} > 0$ tels que pour tous $x, y \in X$ tels que $d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(x, y) < \varepsilon$ et pour tous $x, y \in X$ tels que $\delta(x, y) < \tilde{\eta} \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon$.
3. Montrer que d et δ sont fortement équivalentes si et seulement si il existe $C > 0$ telle que pour tous x, y dans X

$$C^{-1} d(x, y) \leq \delta(x, y) \leq C d(x, y)$$

4. Montrer que si d et δ sont deux distances uniformément équivalentes, alors toute suite de Cauchy pour l'une est une suite de Cauchy pour l'autre.
5. Montrer que si d et δ sont topologiquement équivalentes toute suite convergente pour l'une est une suite convergente pour l'autre.
6. **Premier exemple :**
   (a) Soit (X, d) un espace métrique et ϕ une fonction strictement croissante, concave, telle que $\phi(0) = 0$. Montrer que pour tout $u \geq 0$ et $v \geq 0$ on a
      i. $\phi(u) > 0$ si $u > 0$
      ii. $\phi(u + v) \leq \phi(u) + \phi(v)$
   (b) Montrer que $(x, y) \mapsto \delta(x, y) = \phi(d(x, y))$ définit une distance sur X.
   (c) Soit $\phi_1 : u \mapsto \inf(u, 1)$ et $\phi_2 : u \mapsto \frac{u}{1+u}$. Montrer ϕ_1 et ϕ_2 vérifient les hypothèses de la question 6a. Montrer que $\delta_1 = \phi_1(d)$ et $\delta_2 = \phi_2(d)$ sont fortement équivalentes.

(d) On suppose que ϕ est continue en 0. Montrer que les métriques d et δ sont topologiquement équivalentes. Sont-elles uniformément équivalentes ? Fortement équivalentes ?

7. On prend maintenant le cas particulier $X = \mathbb{R}$ et $d(x, y) = |x - y|$. On pose $D(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

   (a) Montrer que d et D sont topologiquement équivalentes mais qu'il existe des suites de Cauchy pour l'une qui ne sont pas suites de Cauchy pour l'autre.

   (b) Montrer que (X, D) n'est pas un espace métrique complet.