TD 1 : Dérivées, primitives et intégrales généralisées

Notations et définitions

— $\mathbf{1}_A$ indique que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon avec A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

— Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b[$. On note $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. On dit que $\int_a^b f(x)dx$ existe si $\lim_{x\to b} F(x)$ existe et on a $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b} F(x) - F(a)$.

Exercice 1.

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes, leur ensemble de dérivation, et calculer leurs dérivées.

1. $f_1 : x \mapsto \frac{x^4+2x+1}{x^3+1}$
2. $f_2 : x \mapsto x^2 e^{x^2}$
3. $f_3 : x \mapsto \sin(\cos^2(x))$
4. $f_4 : x \mapsto x^3(\ln(x^2) - 1)$

Exercice 2.

On rappelle que pour tous $a,b \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

1. Déduire des relations précédentes les formules pour
   (a) $\cos(a-b)$
   (b) $\sin(a-b)$
   (c) $\sin(2a)$
   (d) $\cos(2a)$
   Toutes ces formules ainsi que celles de l'énoncé sont à savoir par coeur
2. Calculer les quantités suivantes et retrouver ces résultats graphiquement.
   (a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ en fonction de $\sin(x)$
   (b) $\cos(\pi + x)$ et $\cos(\pi - x)$ en fonction de $\cos(x)$
   (c) $\sin(\pi + x)$ et $\sin(\pi - x)$ en fonction de $\sin(x)$
3. Calculer

$$I_1 = \int_0^{\pi} \cos^2(2x + \frac{\pi}{4})dx \qquad I_2 = \int_0^{\pi} \sin(2x)\cos(3x)dx$$
$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2x)\cos(5x)dx \qquad I_4 = \int_0^{\pi} \cos^2(3x)\cos(4x)dx$$
$$I_5 = \int_0^{\pi} \sin^2(2x + \frac{\pi}{4})\cos^2(5x)dx \qquad I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x + \frac{\pi}{4})\cos(x + \frac{\pi}{4})dx$$

Exercice 3.

Calculer à l'aide d'intégrations par parties les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^1 xe^{2x}dx \qquad I_2 = \int_0^1 3x^2e^xdx \qquad I_3 = \int_1^2 x\ln(x)dx$$

$$I_4 = \int_1^2 x^2\ln(x)dx \qquad I_5 = \int_0^1 x\sin(2x)dx \qquad I_6 = \int_0^1 x^2\cos(x)dx$$

$$I_7 = \int_0^1 \arctan(x)dx \qquad I_8 = \int_0^1 x\arctan(x)dx \qquad I_9 = \int_0^1 (x^2+x+1)e^xdx$$

$$I_{10} = \int_1^2 \ln(x)dx \qquad I_{11} = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}dx \qquad I_{12} = \int_1^2 \frac{\ln(x^2+x)}{x^2}dx$$

Exercice 4.

Calculer à l'aide de changements de variables les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^1 (\cos(x))^{1234}\sin(x)dx \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{3+e^{-x}}dx \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}dx \qquad I_5 = \int_0^{\pi/4} \tan(x)dx \qquad I_6 = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$$

$$I_7 = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)^4}dx \qquad I_8 = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx \qquad I_9 = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}+2x}dx$$

Exercice 5.

Parmi les intégrales suivantes dire lesquelles sont bien définies et lesquelles sont généralisées, en justifiant à chaque fois votre réponse.

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx \qquad \int_{-2}^1 \frac{\cos(x)}{x}dx \qquad \int_0^1 \ln(x)dx \qquad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}dx \qquad \int_0^1 \frac{x}{\ln(x)}dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\arccos(x)}dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{2-x}dx \qquad \int_0^{+\infty} 3\mathbf{1}_{]0,2[}(x)\cos(x)dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$