Université Aix-Marseille — 2017-2018

Master Mathématiques et applications — 1ère année

Analyse fonctionnelle

TD3 : espaces complets, théorème de Baire, théorème de Banach-Steinhaus.

1 Version courte

Exercice 1.1

Soit $X = C([0,1])$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. On considère $N_p(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ pour $p = 1, 2$.

   Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont des normes sur X et qu'elles ne sont pas équivalentes.
2. Quelle est l'adhérence (pour chacune de ces normes) du sous-espace $\mathcal{P}$ des fonctions polynômiales ?

Exercice 1.2

Soit $X = C([0,1])$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et F un sous-espace de dimension finie.

Montrer qu'une suite de fonctions de F converge uniformément si et seulement si elle converge simplement sur $[0,1]$.

Exercice 1.3

Soit E un espace normé et F un espace de Banach. Montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach.

Exercice 1.4

Soit (X,d) un espace métrique complet et une application $f : X \to X$. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul r tel que f^r (composée r fois de f) est k-contractante avec $0 < k < 1$.

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 1.5

A l'aide du théorème de Baire montrer qu'un fermé dénombrable non vide X de $\mathbb{R}$ a au moins un point isolé.

On pourra considérer $\omega_x = X/\{x\}$.

Exercice 1.6

Soit (X,d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés de (X,d) tels que $X = \bigcup\limits_{n\geq 1} F_n$. Montrer que $\bigcup\limits_{n\geq 1} \overset{\circ}{F_n}$ est un ouvert dense de X.

Exercice 1.7

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

1. Soit $\delta > 0$. On pose

$$F_{n,\delta} = \{x \in \mathbb{R} : \forall i,j \geq n, |f_i(x) - f_j(x)| \leq \delta\}.$$

   Vérifier que $U_\delta = \bigcup\limits_{n\geq 1} \overset{\circ}{F}_{n,\delta}$ est un ouvert dense.

2. Montrer que f est continue sur $U = \bigcap\limits_{k\geq 1} U_{\frac{1}{k}}$.
3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dérivable partout. Montrer que f' est continue sur une partie dense de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.8 (*EXERCICE A SUITE*)

Soient E, F, G trois espaces de Banach. Soit $a : E \times F \to G$ une application bilinéaire.

On suppose que a est séparemment continue, c'est à dire

$$\begin{array}{lll} \forall x \in E, & y \in F \mapsto a(x,y) & \text{est continue et} \\ \forall y \in F, & x \in E \mapsto a(x,y) & \text{est continue.} \end{array}$$

Montrer que a est continue sur $E \times F$ (i.e il existe $M > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in E \times F$ $\|a(x,y)\|_G \leq M\|x\|_E\|y\|_F$).

Exercice 1.9 (*inspiré de l'examen de janvier 2017*)

Soit $\mathbb{H} = L^2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt$$

pour tous éléments f et g de $\mathbb{H}$. On note $\|.\|_2 : f \mapsto (\langle f, f\rangle)^{1/2}$.

Soient $(k_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ une famille de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que

— Pour tout $\alpha \in \Gamma$ il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|k_\alpha(t)| \leq \frac{C}{1+|t|} \tag{1}$$

— pour tout élément f de $\mathbb{H}$ on a

$$\sup_{\alpha\in\Gamma} \left| \int_{\mathbb{R}} k_\alpha(t)\overline{f}(t) \right| < \infty \tag{2}$$

1. Montrer que pour tout $\alpha \in \Gamma$ k_α est dans $\mathbb{H}$.
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout élément de $\mathbb{H}$ on a
$$\sup_{\alpha\in\Gamma} \left| \int_{\mathbb{R}} k_\alpha(t)\overline{f}(t) \right| \leq C\|f\|_2$$
3. Montrer que $\sup\limits_{\alpha\in\Gamma} \|k_\alpha\|_2 \leq C$.

Exercice 1.10

Soit $p \geq 1$ et $\ell^p(\mathbb{Z})$ l'ensemble dont les éléments sont les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que pour $p \in [1, +\infty[$ donné

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} |s_n|^p = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |s_n|^p < +\infty. \tag{3}$$

Si $s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $\ell^p(\mathbb{Z})$ on pose

$$\|s\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |s_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

Soit $p \in [1, +\infty[$. On se donne $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels telle que

$$\forall s \in \ell^p(\mathbb{Z}), \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n||s_n| < +\infty$$

Montrer que $a \in \ell^q(\mathbb{R})$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Il est fortement recommandé d'avoir travaillé les résultats des questions 2b et 2c de l'exercice 3.2 avant de faire cet exercice.

2 Version longue

Exercice 2.1

Cet exercice est la version longue de l'exercice 1.8.

Soient E, F, G trois espaces de Banach. Soit $a : E \times F \to G$ une application bilinéaire.

On suppose que a est séparemment continue, c'est à dire

$$\begin{array}{lll} \forall x \in E, & y \in F \mapsto a(x, y) & \text{est continue et} \\ \forall y \in F, & x \in E \mapsto a(x, y) & \text{est continue.} \end{array}$$

1. Montrer que a est continue sur $E \times F$ (i.e il existe $M > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in E \times F$ $\|a(x, y)\|_G \leq M\|x\|_E\|y\|_F$).
2. Donner un exemple d'application ϕ (non linéaire) qui est séparemment continue mais pas continue.

3. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications polynômiales sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme $N_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)|dt$. Montrer que l'application

$$\Phi : (f,g) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

est bilinéaire, séparemment continue mais pas continue.

3 Exercices très bons pour rédiger et réfléchir

Exercice 3.1

Soient $y \in \mathcal{C}([a,b])$ et $k \in \mathcal{C}([a,b] \times [a,b])$ des fonctions continues. On se propose de résoudre l'équation (intégrale de Fredholm) suivante :

$$x(s) - \int_a^b k(s,t)x(t)\,dt = y(s) \quad \text{pour } s \in [a,b] \tag{5}$$

d'inconnue $x \in \mathcal{C}([a,b])$. Pour ce faire on suppose que le "noyau" k satisfait l'hypothèse suivante :

$$\lambda := \max_{a \le s \le b} \int_a^b |k(s,t)|\,dt < 1 \quad \left(\text{ou même} \quad \max_{a \le s,t \le b} |k(s,t)| < \frac{1}{b-a}\right).$$

1. Rappeler pourquoi $(\mathcal{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$ est un espace complet.
2. Soit $x \in \mathcal{C}([a,b]) \mapsto Ax \in \mathcal{C}([a,b])$ l'application donnée par

   $$(Ax)(s) := \int_a^b k(s,t)x(t)\,dt + y(s)\ .$$

   Noter que (5) équivaut à $Ax = x$ et qu'on cherche donc un point fixe de $x \mapsto Ax$. Déduire des hypothèses faites sur k qu'un tel point fixe $x \in \mathcal{C}([a,b])$ existe et que toute suite $A^n x_0$, $x_0 \in \mathcal{C}([a,b])$, converge uniformément vers ce point fixe x.
3. *Dépendance continue de la solution $x = x(y)$.*
   Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{C}([a,b])$ deux fonctions et $x_1, x_2 \in \mathcal{C}([a,b])$ les deux solutions associées de (5) ou, de façon équivalente, les points fixes des applications associées $x \mapsto A_i x$. Montrer que

   $$\|x_1 - x_2\|_\infty = \|A_1 x_1 - A_2 x_2\|_\infty \le \|y_1 - y_2\|_\infty + \lambda \|x_1 - x_2\|_\infty\ .$$

   En déduire que

   $$\|x_1 - x_2\|_\infty \le \frac{1}{1-\lambda}\|y_1 - y_2\|_\infty$$

   et donc que la solution x de (5) dépend continuement de la fonction y.

Exercice 3.2

Soit $p \ge 1$ et $\ell^p(\mathbb{Z})$ l'ensemble dont les éléments sont les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que pour $p \in [1, +\infty[$ donné

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} |s_n|^p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |s_n|^p < +\infty. \tag{6}$$

Si $s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $\ell^p(\mathbb{Z})$ on pose

$$\|s\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |s_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7}$$

1. Soient x et y deux réels positifs et p un réel positif.
   (a) Montrer que si $0 \leq p \leq 1$ on a $(x+y)^p \leq x^p + y^p$.
   (b) Montrer que si $p \geq 1$ on a $(x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p)$.
   (c) Montrer que si $p > 1$ on a
   $$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{8}$$
   où q vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   On fixe $p > 1$.
2. (a) Montrer que $(\ell^p(\mathbb{Z}), |.|_p)$ est un espace vectoriel.
   (b) Montrer l'inégalité de Hölder c'est à dire que pour q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, et pour tous $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\ell^p(\mathbb{Z})$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\ell^q(\mathbb{Z})$ on a
   $$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \overline{y_n}\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q \tag{9}$$
   Indication : on pourra commencer par démontrer l'inégalité pour $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.
   (c) Montrer que $(\ell^p(\mathbb{Z}), \|.\|_p)$ est un espace de Banach.
3. On prend maintenant $p = 2$. Soit $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes. On définit l'ensemble
   $$C = \{x \in \ell^2(\mathbb{Z}),\ \forall n \in \mathbb{Z}\ |x_n| \leq |c_n|\}$$
   (a) On suppose que $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Montrer que C est fermé dans $\ell^2(\mathbb{Z})$.
   (b) On suppose toujours que $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Montrer que sur l'ensemble C la topologie de $\ell^2(\mathbb{Z})$ est exactement la topologie de la convergence simple, c'est à dire que si $(s^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de C on a
   $$(s^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \ell^2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \text{Pour tout } n \in \mathbb{Z} \text{ la suite } (s^k_n)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{R}.$$
   (c) Montrer que la propriété précédente est fausse pour $c \notin \ell^2(\mathbb{Z})$, par exemple en prenant pour c la suite constante égale à 1.
   (d) On suppose que $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Montrer que l'ensemble C est un compact de $\ell^2(\mathbb{Z})$.
4. on se place toujours dans le cas où $p = 2$.
   (a) Donner un élément z qui est dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ mais pas dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ de norme $\|z\|_2 = \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ donné.
   (b) Montrer que pour tout entier $N \geq 1$ $A_N = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| \leq N\}$ est un ensemble fermé dans $(\ell^2(\mathbb{Z}), \|.\|_2)$.
   (c) Montrer que A_N est d'intérieur vide dans $(\ell^2(\mathbb{Z}), \|.\|_2)$.
   (d) En déduire que $\ell^1(\mathbb{Z})$ est d'intérieur vide dans $(\ell^2(\mathbb{Z}), \|.\|_2)$.

(e) Généraliser en montrant que si $1 \leq p < p' \leq +\infty$ alors $\ell^p(\mathbb{Z})$ est d'intérieur vide dans $(\ell^{p'}(\mathbb{Z}), \|.\|_{p'})$.

Remarque : on a toujours que l'intérieur d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé est vide, ce qu'on redémontre dans les premières questions en détaillant le fait qu'il s'agit ici d'une union dénombrable de fermés d'intérieur vide.