TD 3 : Séries numériques

Exercice 1.

Déterminer la nature des séries suivantes à l'aide du critère par comparaison ou celui par équivalent

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{n^5}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^3}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n+4)\cos(n)}{n^2(n+1)}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \ln(1+e^{-n})$
8. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$
9. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\frac{1}{\ln(n)^2}$

Exercice 2.

En utilisant le critère de Cauchy ou le critère de d'Alembert déterminer la nature des séries suivantes

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} ne^{-n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{4^{n+1}((n+1)!)}{(2n-1)!}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^n\sin(\frac{\pi}{3})^{2n}}{n^2}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^n\sin(\alpha)^{2n}}{n^2}$ (discuter suivant α)

Exercice 3.

En examinant la limite du terme général montrer que les séries suivantes divergent

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin(n)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^{-1}}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+(-1)^n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Exercice 4.

Déterminer la nature des séries suivantes

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{e^n}{n^5+1}$ 2. $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{-n}}{4+\sin(n)}$ 3. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n+n^2}{3^n n^2+1}$

4. $\sum_{n\geq 1} \frac{4^{n+1}((n+1)!)^3}{(2n-1)!}$ 5. $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n+1}}$ 6. $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n+2}$

Exercice 5.

Soit $\alpha > 1$ et $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \geq 1$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. Justifier que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$ existe et calculer R_n en fonction de S_n et ℓ. En déduire $\lim_{n\to+\infty} R_n$.

   Le but de ce qui suit est d'évaluer la vitesse de convergence de R_n vers 0.
2. Montrer que pour $k \geq 2$ $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq u_k \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt$
3. En déduire que pour $N \geq n \geq 2$ on a $\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leq \int_n^N \frac{1}{t^\alpha} dt$.
4. En déduire que pour $n \geq 2$ $\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ et que $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ quand $n \to +\infty$.