TD 5 : espaces L^p

Exercice 1. Fonctions dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(J,\mathcal{B}(J),\lambda)$ avec J intervalle de $\mathbb{R}$

Dans ce qui suit on note $\mathcal{L}^p(J)$ pour $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(J,\mathcal{B}(J),\lambda)$ avec J intervalle de $\mathbb{R}$ et $p>0$.

1. Montrer que f_1 définie sur $\mathbb{R}^+$ par
$$f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{x(1+|\ln(x)|^2)} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
est une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ mais n'est dans aucun $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+)$ pour $p\neq 1$.
2. Indiquer à quelle condition sur $p\geq 1$ et sur les réels α et β la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_2(x)=\begin{cases}\frac{|x|^\alpha}{1+|\ln(|x|)|^\beta} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.
3. Soit α,β dans $\mathbb{R}^+_*$ et $\alpha\leq\beta$. Pour quelles valeurs de p la fonction f_3 définie sur $\mathbb{R}^+$ par
$$f_3(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^\alpha+x^\beta} & \text{si } x\neq 0\\ +\infty & \text{sinon}\end{cases}$$
est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+)$?
4. Soit la fonction f_4 définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_4(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$$
   (a) Montrer que f_4 n'est pas dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mais est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ si et seulement si $p>1$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f_4(t)dt$ existe.
   Indication : on pourra utiliser une intégration par partie.
5. Pour quelles valeurs de β la fonction $f_5 : x\mapsto \begin{cases}\frac{e^{-x^2/2}}{|x|^\beta} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ appartient-elle à $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$?

Exercice 2. Espaces $\ell^p(\mathbb{N})$

Soit $E=\mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Pour tout $1\leq p<+\infty$ on note ℓ^p l'espace des suites complexes $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_p=\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty$. L'espace des suites bornées est noté ℓ^∞.

1. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ Indiquer à quel espace ℓ^p appartient la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0=0$ et $u_n=n^{-\alpha}$ pour $n\geq 1$.

2. Montrer que si $1 \leq q \leq p \leq +\infty$ alors $\ell^q \subset \ell^p$.
3. ℓ^p est-il un espace de Banach pour $\|.\|_p$?

Exercice 3. **Inégalité de Hölder sur un espace probabilisé**

Soit (E, T, m) un espace mesuré tel que $m(E) = 1$ et f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, positives telles que pour presque tout x on a $f(x)g(x) \geq 1$.

Montrer que $\int f dm \int g dm \geq 1$.

Exercice 4.

On note $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $1 < p < +\infty$. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'on peut définir pour tout $x \geq 0$ $F(x) = \int_0^x f(t) d\lambda$. Justifier que $F(x) = \mathcal{O}(x^{(p-1)/p})$ au voisinage de $+\infty$
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\left(\int_a^{+\infty} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$.
3. En déduire que $F(x) = o(x^{(p-1)/p})$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 5.

Dans ce qui suit on note $\mathcal{L}^2(J)$ pour $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(J, \mathcal{B}(J), \lambda)$ avec J intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}^2([0, 1])$ et soit pour $x \in [0, 1]$ $F(x) = \int_0^x f d\lambda$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} = 0$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}^2([0, +\infty[)$ et soit pour $x \in [0, +\infty[$ $G(x) = \int_0^x g d\lambda$. Montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur un intervalle $[a, x]$ bien choisi que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{G(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

Exercice 6. **Inégalité de Hölder généralisée**

Soit (E, t, m) un espace mesuré.

1. Soient $(p, q, r) \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

   Soient $f \in \mathcal{L}^p(E, T, m)$ et $g \in \mathcal{L}^q(E, T, m)$ alors $fg \in \mathcal{L}^r(E, T, m)$ et

   $$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

2. En déduire que si g est une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$ telle que $g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, t, m) \bigcap \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, t, m)$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$ alors $g \in \mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, t, m)$ pour tout $r \in [p, q]$ et

   $$\|g\|_r \leq \|g\|_p^{\alpha} \|g\|_q^{1-\alpha} \text{ avec } \alpha \in [0, 1] \text{ tel que } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1 - \alpha}{q}$$

3. Soient n nombres $p_1, \ldots p_n$ dans $[1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{r} := \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \leq 1$.
   Montrer que pour toute famille de fonctions mesurables $f_1, \ldots f_n$ de E dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in \{1, \ldots n\}$ on ait $f_k \in \mathcal{L}^{p_k}_{\mathbb{R}}(E, t, m)$ on a $f_1 \times f_2 \times \ldots f_n \in \mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\|f_1 \times f_2 \times \ldots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \ldots \|f_n\|_{p_n}$

Exercice 7. **Suite de l'exercice précédent**

Pour $p \geq 1$ on note $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $L^p(\mathbb{R})$ pour $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soit $1 \leq q < p \leq +\infty$. Trouver une fonction f qui est dans $\mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, et une fonction g qui est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathcal{L}^q(\mathbb{R})$.
2. Soit $1 \leq q \leq p < +\infty$. Montrer que l'espace $L^p(\mathbb{R}) \bigcap L^q(\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_{pq} = \|.\|_p + \|.\|_q$.
3. Soit r tel que $q < r < p$. Montrer que si f_n converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}) \bigcap L^q(\mathbb{R})$ alors f_n converge dans $L^r(\mathbb{R})$, autrement dit $L^p(\mathbb{R}) \bigcap L^q(\mathbb{R})$ est un sous-espace de Banach de $L^r(\mathbb{R})$.

Exercice 8. **Convergence presque partout et convergence en norme**

Montrer qu'on peut trouver $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que $f_n \to 0$ presque partout et ne converge pas dans $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ muni de $\|.\|_p$.

Exercice 9.

Soient f, g dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, t, m)$ pour $+\infty > p \geq 1$.

1. Vérifier que $h : x \mapsto h(x) = \max(f(x), g(x))$ est dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, t, m)$.
2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $L^p_{\mathbb{R}}(E, t, m)$ convergeant respectivement vers f et g pour $\|.\|_p$. On pose $h_n : x \mapsto \max(f_n(x), g_n(x))$. Montrer que h_n converge vers h dans $L^p_{\mathbb{R}}(E, t, m)$.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p_{\mathbb{R}}(E, t, m)$ convergeant vers f pour $\|.\|_p$. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $g_n \to g$ presque partout. Montrer que $f_n g_n \to fg$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(E, t, m)$.

Exercice 10. **Densité des fonctions bornées à support borné dans $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda)$**

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. On note $L^p(\Omega)$ l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda)$.

On cherche à montrer que $f \in L^p(\Omega)$ est limite dans $L^p(\Omega)$ d'une suite de fonctions bornées identiquement nulles au voisinage du bord de Ω et/ou identiquement nulles hors d'un borné.

1. Pour tout entier $n \geq 1$ on définit la fonction suivante sur $\mathbb{R}$

$$T_n(t) = \begin{cases} t & \text{si } |t| \leq n \\ n\frac{t}{|t|} & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que $T_n(f) \to f$ dans $L^p(\Omega)$.
2. Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'ouverts tels que $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ et on note $\chi_n = \mathbb{1}_{\Omega_n}$ la fonction indicatrice de l'ouvert Ω_n. Montrer que $\chi_n f \to f$ dans $L^p(\Omega)$.

3. Montrer que $\chi_n T_n(f) \to f$ dans $L^p(\Omega)$ et conclure.