Université Aix-Marseille	2018-2019
Master Mathématiques appliquées et statistiques	2ème année

Représentation parcimonieuse des signaux

Notes de cours et Td : Parcimonie et bases de Fourier. Opérateurs de convolution

1 Opérateurs de convolution

1.1 Définition et premières propriétés

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ Soit $L : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ un opérateur linéaire.

Dans tout ce qui suit un vecteur noté x de $\mathbb{C}^N$ a pour coordonnées $x = (x_i)_{i=0,\dots N-1}$.

Définition 1

On définit pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\begin{array}{rccc} \tau_k : & \mathbb{C}^N & \to & \mathbb{C}^N \\ & x & \mapsto & x' \end{array}$$

tel que pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$ on a $x'_n = x_{\overline{n-k}}$

et $\overline{n-k} \in \{0, \dots N-1\}$ tel que $\overline{n-k} = n-k+uN$ avec $u \in \mathbb{Z}$

Remarque : On dit que $\overline{n-k}$ est un représentant de la classe d'équivalence de $n-k$ modulo N. On peut aussi remarquer que $\overline{n-k}$ est le reste de la division euclidienne de $n-k$ par N.

Définition 2

Soit $L : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ un opérateur linéaire. On dit que L est invariant par translation si pour tout $k \in \{0, \dots N-1\}$

$$L \circ \tau_k = \tau_k \circ L$$

C'est à dire pour tout $x \in \mathbb{C}^N$

$$L\left(\tau_k(x)\right) = \tau_k\left(L(x)\right)$$

Définition 3

Soit $h \in \mathbb{C}^N$.

On appelle opérateur de convolution associé à h et on note K_h l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} K_h : & \mathbb{C}^N & \to & \mathbb{C}^N \\ & x & \mapsto & y = h \star x \end{array}$$

avec pour tout $n \in \{0, \dots N-1\}$ $y_n = (h \star x)_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x_{\overline{n-k}}$.

On dit alors que K_h est un filtre linéaire et on appelle h la réponse impulsionnelle du filtre L.

Proposition 1

$\forall h \in \mathbb{C}^N$ et tout $x \in \mathbb{C}^N$ $y = h \star x = x \star h$.

Exemples :

1. (filtre médian) : soit $c \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \mathbb{C}^N$ tel que $h_0 = 1/c$, $h_1 = 1/c$,..,$h_{c-1} = 1/c$ et $h_n = 0$ pour $n \geq c$. L'opérateur K_h est appelé filtre médian.
2. (filtre différentiateur) : Soit $h \in \mathbb{C}^N$ tel que $h_0 = 1/2$ et $h_1 = -\frac{1}{2}$ et $h_n = 0$ sinon. L'opérateur K_h est appelé filtre différentiateur.

Théorème 1

Soit $L : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ un opérateur linéaire.

L est un opérateur linéaire invariant par translation si et seulement si il existe $h \in \mathbb{C}^N$ tel que $L = K_h$, c'est à dire que L est un opérateur de convolution.

1.2 Diagonalisation d'un opérateur linéaire invariant par translation.

Dans toute cette partie on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^N$ tel que $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \overline{y_n}$ pour $x = (x_i)_{i=0,\dots N-1} \in \mathbb{C}^N$ et $y = (y_i)_{i=0,\dots N-1} \in \mathbb{C}^N$. On note $|x|_2^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2$ pour $x \in \mathbb{C}^N$.

On note aussi δ^ℓ pour $\ell \in \{0, \dots N-1\}$ le ℓ-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^N$. Il s'agit du vecteur de $\mathbb{C}^N$ tel que pour $n \in \{0, \dots N-1\}$ on a $\delta_n^\ell = 1$ si $n = \ell$ et 0 sinon. La collection de vecteurs $\{\delta^\ell, \ell \in \{0, \dots, N-1\}\}$ constitue la base canonique de $\mathbb{C}^N$. Pour $\ell \in \mathbb{Z}$ on pose $\delta^\ell = \delta^{\overline{\ell}}$ où $\overline{\ell} \in \{0, \dots, N-1\}$ et $\ell = \overline{\ell} + uN$ avec $u \in \mathbb{N}$ (de nouveau $\overline{\ell}$ est le reste de la division euclidienne de ℓ par N).

On définit les vecteurs de la base de Fourier discrète. Considérons dans un premier temps la famille de vecteurs $\mathcal{E} = \{e^\ell \in \mathbb{C}^N, \ell \in \mathbb{Z}\}$ tels que pour $\ell \in \mathbb{Z}$ et pour $n \in \{0, \dots N-1\}$ la n-ième coordonnée du vecteur e^ℓ s'écrive

$$e_n^\ell = e^{\frac{2i\pi\ell n}{N}}$$

Proposition 2

La famille $\mathcal{E}$ est une famille finie à N éléments qui forme une base orthogonale de $\mathbb{C}^N$ pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Elle est appelée base de Fourier finie.

Remarque : On voit qu'en réalité $e^{-\ell} = e^{N-\ell}$ pour $\ell \in \mathbb{Z}$. De plus on a aussi pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}$ et tout $\ell \in \mathbb{Z}$ $e^{\frac{2i\pi(-\ell)n}{N}} = e^{\frac{2i\pi(N-\ell)n}{N}}$. Donc on peut ainsi, par exemple avec N pair, examiner les coordonnées e_n^ℓ de e^ℓ en les ordonnant avec n de $-N/2$ à $N/2 - 1$.

Définition 4

Soit $x \in \mathbb{C}^N$. On note pour $\ell \in \{0, \dots N-1\}$ $\hat{x}_\ell = \langle x, e^\ell \rangle$ et on appelle transformée de Fourier discrète de x le vecteur $\hat{x} = (\hat{x}_\ell)_{\ell \in \{0,\dots,N-1\}}$.

Exemples :

1. Soit $\omega_0 \in \{0, \dots N-1\}$ et $x \in \mathbb{R}^N$ tel que pour tout $n \in \{0, \dots N-1\}$ $x_n = \cos\left(\frac{2\omega_0\pi}{N}\right)$. On a $\hat{x} = \frac{N}{2}\delta^{\omega_0} + \frac{N}{2}\delta^{-\omega_0}$.
2. Soit $\ell_0 \in \{0, \dots N-1\}$ et $x = \delta^{\ell_0}$. On a $\hat{x} = e^{\ell_0}$.

Corollaire 1

(de la proposition 2) Soit $x \in \mathbb{C}^N$. On a les identités suivantes

(Formule de reconstruction)

$$x = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{x}_\ell e^\ell \tag{1}$$

(Relation de Pythagore)

$$|\hat{x}|_2^2 = N|x|_2^2 \tag{2}$$

En particulier, d'après la définition (4) pour tout $x \in \mathbb{C}^N$ et tout $\ell \in \{0,,\dots N-1\}$

$$\hat{x}_\ell = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2i\pi n\ell}{N}} \tag{3}$$

et on a aussi d'après (1) pour tout $n \in \{0,\dots N-1\}$,

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{x}_\ell e^{\frac{2i\pi n\ell}{N}} \tag{4}$$

Remarques : Ces calculs ne sont pas effectués tels quels par un ordinateur. En effet dans le cas où on a $N = 2^{n_0}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}^*$, nous avons la possibilité d'utiliser un algorithme basé sur des factorisations astucieuses pour effectuer le calcul de $\hat{x}$ à partir de x. Cet algorithme appelé « Transformée de Fourier rapide », ou encore FFT en anglais (Fast Fourier Transform) est un des plus efficaces du monde. Il permet de calculer $\hat{x}$ en $\mathcal{O}(N\ln(N))$ opérations, c'est à dire que le nombre d'opérations pour effectuer le calcul est proportionnel à $N\ln(N)$.

Un calcul direct donnerait en réalité pour chaque coordonnée de $\hat{x}$ N multiplications suivies de $N-1$ additions, soit un coût d'environ $2N^2$ opérations pour le calcul de $\hat{x}$. Dès que N commence à être grand (par exemple $N = 10^6$, ce qui est une taille très courante en image ou même en son), il devient crucial d'utiliser l'algorithme FFT.

Enfin remarquons que la formule (4) est très proche de (3), et qu'il est clair que le même type d'algorithme pourra être utilisé pour calculer x à partir de $\hat{x}$. En général il est codé sous le nom de IFFT (Inverse Fast Fourier Transform).

Théorème 2

Soit $L : \mathbb{C}^N \mapsto \mathbb{C}^N$ un opérateur linéaire de convolution (ou invariant par translation). On note h la réponse impulsionnelle de L.

La base de Fourier $\mathcal{E}$ est une base de diagonalisation de L. Les valeurs propres de L sont les nombres complexes $\{\hat{h}_\ell, \ell \in \{0,\dots N-1\}\}$.

De plus on a pour tout $x \in \mathbb{C}^N$ $y = L(x)$ qui vérifie pour tout $\ell \in \{0,\dots N-1\}$ $\hat{y}_\ell = \hat{h}_\ell \times \hat{x}\ell$. On a aussi $L(x) = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{h}_\ell \hat{x}_\ell e^\ell$

En pratique : Sauf cas particulier où le filtre h a très peu de coefficients non nuls, pour calculer $y = L(x)$ on calculera d'abord $\hat{y}$ puis on utilisera la formule d'inversion (1) (qui correspond aussi à (4)).

Travaux dirigés

Démonstrations et application immédiate des résultats du cours.

Exercice 1

1. *Soit* $x \in \mathbb{R}^N$ *tel que* $x_n = n$ *pour* $n \in \{0, \dots N-1\}$. *Calculer* $\tau_k(x)$ *pour* $k \in \{0, \dots N-1\}$ *et représenter graphiquement* x *et* $\tau_k(x)$ *pour le cas* $N = 5$. *Comment peut-on expliquer de façon simple l'action de* τ_k *sur* x *?*
2. *Soit* $\ell \in \{0, \dots, N-1\}$. *Calculer et expliciter* $\tau_k(\delta^0)$ *puis* $\tau_k(\delta^\ell)$.
3. *Quelle définition pourrait-on donner à* τ_k *pour* $k \in \mathbb{Z}$ *?*

Exercice 2

Expliciter et détailler les exemples :

1. *du filtre médian. On prend* $c = 2$. *Calculer les coordonnées de* y *selon les valeurs de* n. *Calculer la matrice de* K_h *dans la base canonique.*
2. *du filtre dérivateur. Calculer les coordonnées de* y *selon les valeurs de* n. *Calculer la matrice de* K_h *dans la base canonique.*

Exercice 3

Montrer le théorème 1 en utilisant à un moment de la démonstration un produit matrice-vecteur.

Exercice 4

Montrer la proposition 2 ainsi que les formules (1) et (2).

Exercice 5

Appliquer le théorème 2 dans les cas particuliers du filtre médian et du filtre dérivateur de l'exercice (2). En particulier calculer $\hat{h}$ *pour chacun de ces filtres et commenter.*

Exercice 6

Démontrer le théorème 2.

Exercices pour aller plus loin.

Exercice 7 (*Interpolation discrète*)

Soit N *un entier pair et* $f = (f_0, .., f_{N-1})$ *un signal fini de taille* N. *Soit* g *un signal fini tel que* $\hat{g}$ *vérifie*

$$\hat{g}_k = \begin{cases} 2\hat{f}_k & \text{si } 0 \leq k < \frac{N}{2} \\ \hat{f}_{N/2} & \text{si } k = \frac{N}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{N}{2} \leq k < \frac{3N}{2} \\ \hat{f}_{N/2} & \text{si } k = \frac{3N}{2} \\ 2\hat{f}_{k-N} & \text{si } \frac{3N}{2} \leq k < 2N \end{cases}$$

1. *Montrer que* $g_{2n} = f_n$.
2. *Application : on dispose d'une image de taille* $N \times N$ *pixels avec* N *entier et on souhaite l'agrandir pour avoir une image de taille* $2N \times 2N$. *Comment peut-on procéder ? Quel sera l'avantage de cette méthode ?*
3. **Étude numérique avec Python** *: programmer la méthode sur un exemple à l'aide de Python à l'aide des fonctions* `fft` *et* `ifft` *du module* `numpy.fft`.

Exercice 8 (*Base de cosinus : version discrète*)

On s'intéresse à la version discrète une base construite à partir de cosinus discrets qui s'ap-

plique à des signaux numériques réels finis de longueur N. On parle de DCT pour Discrete Cosinus Transform. Plusieurs versions sont disponibles et c'est la DCT II (étudiée ci-dessous) qui est utilisée pour la compression d'images dans la norme JPEG.

On munit ici $\mathbb{R}^N$ du produit scalaire usuel. Si x et y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$ on a

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n$$

On définit N signaux C^n pour $n = 0, \ldots, N-1$ de la manière suivante. On pose

$$C_k^0 = \frac{1}{\sqrt{N}}\ \forall k = 0, \ldots, N-1$$

Les $N-1$ autres signaux sont définis pour $n = 1, \ldots N-1$ par

$$C_k^n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi n}{2N}\right)\ \forall k = 0, \ldots, N-1$$

1. *Montrer que la famille des C^n est orthonormale.*
2. *Est-ce une base de $\mathbb{R}^N$?*
3. **Étude numérique avec Python** *: A l'aide des fonctions* `dct,idct` *du module* `scipy.fftpack` *programmer la décomposition dans la base de C^n des deux signaux*
   (a) *$x \in \mathbb{R}^N$ avec $N = 2048$ points tel que $x_n = 1$ si $N/4 \leq n \leq 3N/4$ et 0 sinon.*
   (b) *$x \in \mathbb{R}^N$ avec $N = 2048$ points tel que $x_n = \left(\frac{n}{N} - \frac{1}{2}\right)^2$.*

   Que pensez vous du comportement des coefficients ?