Option C

Géométrie

D. Kohel

17/11/2020

Géométrie algébrique

Espace affine $\mathbb{A}^n$ sur k (noté $\mathbb{A}^n/k$)
k = corps de base, pas forcement algébriquement clos.
<u>Exemples</u> $k=\mathbb{Q}$ ou $k=\mathbb{F}_p$ sont possibles

On identifie $\mathbb{A}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in \bar{k}\}$, pour $\bar{k}$ une clôture algébrique de k.
Ensuite on définit

$$\mathbb{A}^n(k) = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in k\}.$$

et pour tout extension K/k,

$$\mathbb{A}^n(K) = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in K\}.$$

Donc $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\bar{k}) = \bigcup\limits_{k\subseteq K\subseteq \bar{k}} \mathbb{A}^n(K)$.

On dit $\mathbb{A}^n(K)$ sont les point K-rationnels.

<u>Défn</u>. Un <u>variété affine</u> est l'ensemble des solutions à un système d'équations

$$f_1(x_1,\dots,x_n) = \dots = f_r(x_1,\dots,x_n) = 0 \quad (*)$$

dans $\mathbb{A}^n$, pour $f_1,\dots,f_r \in k[x_1,\dots,x_n]$.

<u>Remarque</u>. Typiquement on reserve le mot variété pour le cas où

l'idéal $(f_1, \ldots, f_r) \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ est ② un premier, sinon on parle d'
<u>ensemble algébrique</u> (affine).

<u>Rappel</u>. $\mathfrak{p} = (f_1, \ldots, f_r)$
$= f_1 A + \cdots + f_r A \subseteq A$ est premier
ssi : $A/\mathfrak{p}$ est un anneau integre.

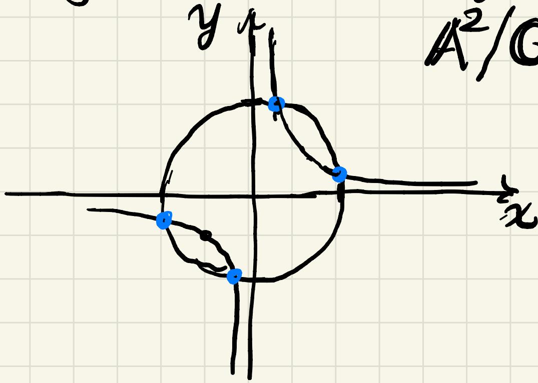
On écrit $V = V(f_1, \ldots, f_r) \subseteq \mathbb{A}^n$ pour cet ensemble algébrique $\circledast$ (ici, comme ci-dessus on va dit variété même si la condition de primalité n'a pas été vérifiée).

On note que V ne dépend que de l'ideal $I = (f_1, \ldots, f_r) \subseteq k[x_1, \ldots, x_r]$, donc on écrit également $V = V(I)$.

<u>Défn</u> On définit pour une variété
$$I(V) = \{ f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f(V) = 0 \}$$
$$\subseteq k[x_1, \ldots, x_n],$$
l'idéal (de définition) de V.

<u>Ex.</u> $V(xy-1)$ et $V(x^2+y^2-4)$:

$\mathbb{A}^2/\mathbb{Q}$



<u>Attention.</u> On écrit souvant $k[x,y]$ (ou $k[x,y,z]$) au lieu de $k[x_1,x_2]$ (ou $k[x_1,x_2,x_3]$) pour la géométrie du plan (ou de l'espace 3-dim'l) affine.

L'intersection $V(xy-1) \cap V(x^2+y^2-4)$

$$= V(xy-1, x^2+y^2-4)$$

est un ensemble de 4 points.

<u>Defn.</u> Une variété (ensemble algébrique) est de dimension 0 ssi

$$V(\bar{k}) = \{P_1, \dots, P_m\}$$

est un ensemble fini. Le nombre de points est le degré. (Ici m.)

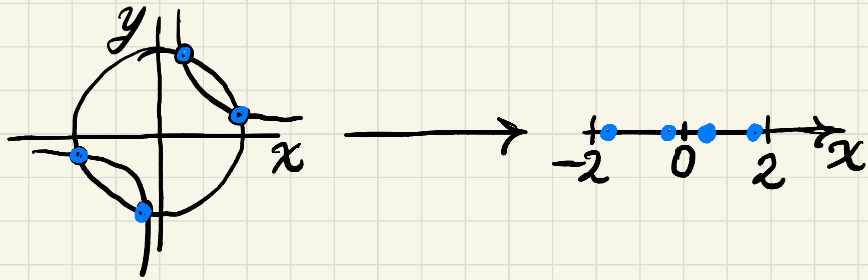
Comment trouver des solutions ?

- sur k ? - sur $\bar{k}$?

<u>Idée</u> : Réduire par élimination des variables.

- Géométriquement : projection

$$\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}$$



- Algébriquement : le resultant.

Le resultant est un algorithme algébrique pour élimination d'un variable.

<u>Exemple</u> (Elimination à la main).

$f_1 = xy - 1$ et $f_2 = x^2 + y^2 - 4 \in I$

$(xy+1) f_1 = x^2y^2 - 1 \in I$

$x^2 f_2 = x^4 + x^2y^2 - 4x^2 \in I$

Alors $x^2 f_2 - (xy+1) f_1 = x^4 - 4x^2 + 1 \in I$.

Les quatre racines de

$$x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

sont alors les racines carrés de

$$\frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Donc

$$x \in \{\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}\} := S$$

Par symétrie, on a également

$$y \in \{\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}\} := S$$

Or les quatre solutions sont un sous-ensemble des $4 \times 4 = 16$ tuples $(x,y) \in S^2$, satisfaisant $xy = 1$.

<u>L'espace projectif</u> $\mathbb{P}^n/k$

$$\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}}{\sim}, \text{ où}$$

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$$

ssi il existe $\lambda \in k^*$ tel que

$$x_i = \lambda y_i \text{ pour tout } 0 \leq i \leq n.$$

On écrit $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ pour la classe.

Si on a $x_i \neq 0$, on peut écrire (6)

$$x = (x_0 : x_1 : \cdots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i} : \frac{x_1}{x_i} : \cdots : 1 : \cdots : \frac{x_n}{x_i}\right)$$

position i

et donc on a une inclusion $\mathbb{A}^n \xrightarrow{\sigma_i} \mathbb{P}^n$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (x_1 : x_2 : \cdots : x_i : 1 : x_{i+1} : \cdots : x_n)$$

On va voir que $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, donné par σ_i, est un ouvert (topologie à venir).

Pour $\mathbb{A}^n$, l'anneau $k[x_1, \dots, x_n]$, s'appelle l'anneau de coordonnés. Pour $\mathbb{P}^n$, on définit l'anneau des polynômes

$$k[X_0, X_1, \dots, X_n]$$

l'anneau des coordonnés.

<u>Défn</u> Une <u>variété</u> (un ensemble algébrique) dans $\mathbb{P}^n$ est

$$V(f_1, \dots, f_r) = \{(x_0 : \cdots : x_n) : f_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \ \forall i\}$$

où $f_i(X_0, \dots, X_n)$ est un polynôme homogène : $f_i(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f_i(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

On dit que I est un idéal homogène s'il existe un système de générateurs homogènes pour I.

Remarque. Un polynôme f est homogène de degré ssi chaque monôme de f est de degré d.

Ex. $f(X,Y) = X^2 - Y^2 - X - Y$ n'est pas homogène, mais

$$f_1 = X+Y \quad \text{et} \quad f_2 = X^2 - Y^2$$

sont homogènes et

$$f(X,Y) \in I = (f_1, f_2) \subseteq \mathbb{Q}[X,Y],$$

où I est homogène.

Remarque. Pour le plan proj $\mathbb{P}^2_k$ on écrit souvant $k[X,Y,Z]$ pour son anneau de coordonnés (au lieu de $k[X_0,X_1,X_2]$).

Remarque. Par définition

$$\dim(\mathbb{A}^n) = \dim(\mathbb{P}^n) = n.$$