Le puzzle SET

David Kohel
Institut de Mathématiques de Marseille

Marseille
26 novembre 2018

Le puzzle SET

Le puzzle SET consiste d'un ensemble de cartes, portant chaqu'un un symbole ou graphique déterminé par un des trois valeurs pour chaqu'un des quatre attributs :

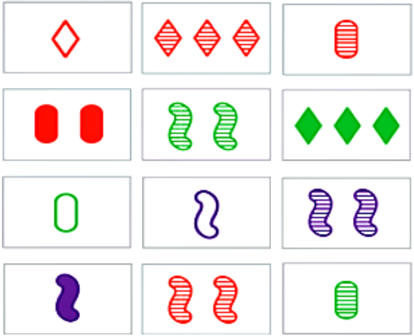
- Couleur (bleu, rouge, vert) $\in \mathcal{C}$,
- Forme (losange, ovale, vague [ou cacahuète]) $\in \mathcal{F}$,
- Remplissage (vide, hachuré, plein) $\in \mathcal{R}$,
- Nombre (un, deux, trois) $\in \mathcal{N}$.

Definition

Un SET est un ensemble de trois cartes distinctes, tel que pour chaqu'un des quatre attributs les valeurs sont soit tous égales, soit tous distinctes

Objectifs du puzzle

L'objectif du puzzle est de trouver tous les SETs parmi un ensemble de 12 cartes distinctes. Par exemple, dans les cartes ci-dessous



on identifie un premier SET :

An affine relation [en]

If we (arbitrarily) label the values of an attribute by 0, 1, and 2 in the field $\mathbb{F}_3$, then the condition that a triple (x, y, z) of values are either all equal or all distinct is equivalent to the relation

$$x + y + z = 0 \in \mathbb{F}_3.$$

A card in Set can be identified with vector $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}_3^4$ under a choice of labelings of its attributes.

A triple of cards constitutes a SET if and only if the triple (x, y, z) of associated vectors satisfies

$$x + y + z = 0 \in \mathbb{F}_3^4.$$

An affine line [en]

Example. Suppose for instance we have the triple of vectors in $\mathbb{F}_3^4$,

$$x = (1,0,0,0), \; y = (0,1,2,1), \; z = (2,2,1,2).$$

We verify the relation $x + y + z = 0$. If we fix x as a base point and set $v = y - x = (2,1,2,1)$, then we see that

$$z = (1,2,1,2) + x = 2v + x,$$

and hence $\{x, y, z\} = \{cv + x \; : \; c \in \mathbb{F}_3\} = L + x$, where L is the line spanned by v.

Such a triple of vectors is called an *affine line* (in $\mathbb{F}_3^4$), which motivates the definition of affine space.

Espace affine

Un ensemble $\mathcal{E}$ est muni d'une structure d'*espace affine* par la donnée d'un espace vectoriel E (sa *direction*) et d'une application

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ (A, B) &\longmapsto \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

telle que

- pour tout A de $\mathcal{E}$, l'application partiel $\Theta_A : \mathcal{E} \to E$, donnée par

  $$\Theta_A(B) = \overrightarrow{AB},$$

  soit une bijection, et
- pour tous points A, B ,C de $\mathcal{E}$, on ait $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

Si la dimension d'un espace affine est un, on l'appelle une *droite affine*; si la dimension est deux, on dit un *plan affine*.

Sous-espaces affines

Un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un *sous-espace affine* si pour tout point $A \in \mathcal{F}$, l'ensemble $F = \Theta_A(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E. On peut démontrer que F est indépendent du choix de A.

Remarque. Toute espace vectoriel E est un espace affine (qui est sa propre direction et tel que $\Theta(u, v) = v - u$).

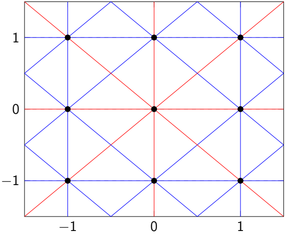
Proposition

Tout sous-espace affine $\mathcal{F}$ d'un espace vectoriel E est de la forme $F + v$, où F est un sous-espace vectoriel et $v \in E$ est un vecteur.

Remarque. La définition d'un espace affine ne place pas de condition sur le corps de base de sa direction. Dans la suite on donne l'exemple des droites affines dans $\mathbb{F}_3^2$.

Exemple : droites affines dans $\mathbb{F}_3^2$

Exemple. Soit $E = \mathbb{F}_3^2$, un plan vectoriel sur $\mathbb{F}_3$. Les droites affines dans E sont donc de la forme $D + v$, où D est une droite vectorielle. Il y a quatre droites D dans $\mathbb{F}_3^2$ et donc $12 = 4 \times 3$ droites affines.



Droites affines dans $\mathbb{F}_3^2$

N.B. En général, le nombre de droites affines dans $\mathbb{F}_p^n$ est

$$|\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_p)| \cdot |\mathbb{F}_p^{n-1}| = \frac{(p^n - 1)}{(p-1)} \cdot p^{n-1}.$$

Isomorphisme et classes d'équivalence affine

Une application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ d'espaces affines est *affine* s'il existe une application linéaire $f : E \to F$ de leurs directions tel que

$$\Theta(\varphi(A), \varphi(B)) = f(\Theta(A, B)).$$

On rappelle que les donnés d'une structure d'espace affine sur $\mathcal{X}$ et d'un point $A \in \mathcal{X}$ déterminent une bijection $\iota = \Theta_A : \mathcal{X} \to E$. Inversement, une bijection $\iota : \mathcal{X} \to E$ induit une structure d'espace affine $\Theta(A, B) = \iota(B) - \iota(A)$.

On dit que deux bijections $\iota_1, \iota_2 : \mathcal{X} \to E$, entre un ensemble $\mathcal{X}$ et un espace vectoriel E, sont dans la même classe *équivalence affine* s'il existe un automorphisme affine φ de E tel que $\iota_2 = \varphi \circ \iota_1$.

Espaces affines de cardinal 3

Avant d'enoncer le théorème de classification des SET, on caracterise les structures d'espace d'une ensemble de 3 éléments.

Lemme

Toute permutation de $\mathbb{F}_3$ est affine.

Démonstration.

Les automorphismes affines sont de la forme $x \mapsto ax + b$, pour $(a, b) \in \mathbb{F}_3^* \times \mathbb{F}_3$, qui parcourrent les six permutations de $\mathbb{F}_3$. $\square$

Par conséquent il n'y a qu'une seule classe d'équivalence affine d'un ensemble de 3 éléments :

Proposition

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de cardinal 3. Toutes les bijections $\mathcal{X} \to \mathbb{F}_3$ appartiennent à la même classe d'équivalence affine.

Le théorème principal

Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{N}$ les ensembles :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \{\texttt{bleu}, \texttt{rouge}, \texttt{vert}\},\\
\mathcal{F} &= \{\texttt{losange}, \texttt{ovale}, \texttt{vague}\},\\
\mathcal{R} &= \{\texttt{vide}, \texttt{hachuré}, \texttt{plein}\},\\
\mathcal{N} &= \{1, 2, 3\}.
\end{aligned}$$

Des bijections de ces ensembles avec $\mathbb{F}_3$ déterminent une structure d'espace affine sur $\mathcal{E} = \mathcal{C} \times \mathcal{F} \times \mathcal{R} \times \mathcal{N}$, avec direction $E = \mathbb{F}_3^4$.

Theorem

Soient fixées des bijections entre des attributs de couleur, forme, remplissage, et nombre avec le corps $\mathbb{F}_3$. Les triples de cartes constituant un SET sont des droites affines de $\mathcal{E}$.

Généralisations à quatre valeurs ?

On peut se demander comment caracteriser les SETs si on admet 4 valeurs (donc 4 cartes dans un SET, avec valeurs en chaque attribut soit tous égales soit tous distinctes).

On peut mettre des attributs en bijection avec $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_4$, ou $\mathbb{F}_2^2$.

Pour que le choix d'une bijection parmi 24 soit non pertinant, il faut une seule classe d'équivalence affine. Or, les cardinaux d'automorphismes affines sont :

$$|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})| = 2{\cdot}4 = 8, \ |\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_4)| = 3{\cdot}4 = 12, \ |\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_2^2)| = 6{\cdot}4 = 24.$$

Seule le dernier parcourt toutes les permutations. On doit donc choisir des bijections avec $E = \mathbb{F}_2^2$, donnant une structure de plan affine sur $\mathbb{F}_2$.

FIN