

# Le puzzle SET

David Kohel  
Institut de Mathématiques de Marseille

Marseille  
26 novembre 2018



# Le puzzle SET

Le puzzle SET consiste d'un ensemble de cartes, portant chaque un symbole ou graphique déterminé par un des trois valeurs pour chaque un des quatre attributs :

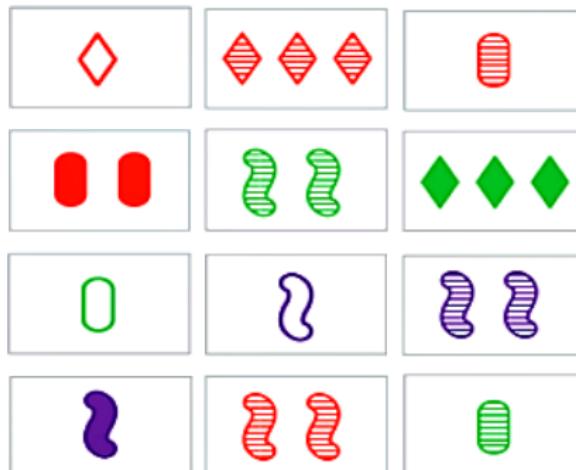
- Couleur (bleu, rouge, vert)  $\in \mathcal{C}$ ,
- Forme (losange, ovale, vague [ou cacahuète])  $\in \mathcal{F}$ ,
- Remplissage (vide, hachuré, plein)  $\in \mathcal{R}$ ,
- Nombre (un, deux, trois)  $\in \mathcal{N}$ .

## Definition

Un SET est un ensemble de trois cartes distinctes, tel que pour chaque un des quatre attributs les valeurs sont soit tous égales, soit tous distinctes

# Objectifs du puzzle

L'objectif du puzzle est de trouver tous les SETs parmi un ensemble de 12 cartes distinctes. Par exemple, dans les cartes ci-dessous



on identifie un premier SET :



## An affine relation [en]

If we (arbitrarily) label the values of an attribute by 0, 1, and 2 in the field  $\mathbb{F}_3$ , then the condition that a triple  $(x, y, z)$  of values are either all equal or all distinct is equivalent to the relation

$$x + y + z = 0 \in \mathbb{F}_3.$$

A card in Set can be identified with vector  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}_3^4$  under a choice of labelings of its attributes.

A triple of cards constitutes a SET if and only if the triple  $(x, y, z)$  of associated vectors satisfies

$$x + y + z = 0 \in \mathbb{F}_3^4.$$

## An affine line [en]

**Example.** Suppose for instance we have the triple of vectors in  $\mathbb{F}_3^4$ ,

$$x = (1, 0, 0, 0), \quad y = (0, 1, 2, 1), \quad z = (2, 2, 1, 2).$$

We verify the relation  $x + y + z = 0$ . If we fix  $x$  as a base point and set  $v = y - x = (2, 1, 2, 1)$ , then we see that

$$z = (1, 2, 1, 2) + x = 2v + x,$$

and hence  $\{x, y, z\} = \{cv + x : c \in \mathbb{F}_3\} = L + x$ , where  $L$  is the line spanned by  $v$ .

Such a triple of vectors is called an *affine line* (in  $\mathbb{F}_3^4$ ), which motivates the definition of affine space.

# Espace affine

Un ensemble  $\mathcal{E}$  est muni d'une structure d'*espace affine* par la donnée d'un espace vectoriel  $E$  (sa *direction*) et d'une application

$$\begin{aligned}\Theta : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ (A, B) &\longmapsto \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

telle que

- pour tout  $A$  de  $\mathcal{E}$ , l'application partiel  $\Theta_A : \mathcal{E} \rightarrow E$ , donnée par

$$\Theta_A(B) = \overrightarrow{AB},$$

soit une bijection, et

- pour tous points  $A, B, C$  de  $\mathcal{E}$ , on ait  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ .

Si la dimension d'un espace affine est un, on l'appelle une *droite affine*; si la dimension est deux, on dit un *plan affine*.

# Sous-espaces affines

Un sous-ensemble  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}$  est un *sous-espace affine* si pour tout point  $A \in \mathcal{F}$ , l'ensemble  $F = \Theta_A(\mathcal{F})$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . On peut démontrer que  $F$  est indépendant du choix de  $A$ .

**Remarque.** Toute espace vectoriel  $E$  est un espace affine (qui est sa propre direction et tel que  $\Theta(u, v) = v - u$ ).

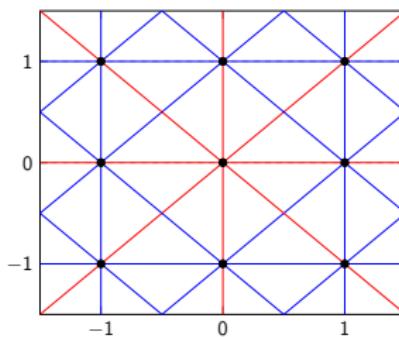
## Proposition

Tout sous-espace affine  $\mathcal{F}$  d'un espace vectoriel  $E$  est de la forme  $F + v$ , où  $F$  est un sous-espace vectoriel et  $v \in E$  est un vecteur.

**Remarque.** La définition d'un espace affine ne place pas de condition sur le corps de base de sa direction. Dans la suite on donne l'exemple des droites affines dans  $\mathbb{F}_3^2$ .

## Exemple : droites affines dans $\mathbb{F}_3^2$

**Exemple.** Soit  $E = \mathbb{F}_3^2$ , un plan vectoriel sur  $\mathbb{F}_3$ . Les droites affines dans  $E$  sont donc de la forme  $D + v$ , où  $D$  est une droite vectorielle. Il y a quatre droites  $D$  dans  $\mathbb{F}_3^2$  et donc  $12 = 4 \times 3$  droites affines.



Droites affines dans  $\mathbb{F}_3^2$

N.B. En général, le nombre de droites affines dans  $\mathbb{F}_p^n$  est

$$|\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_p)| \cdot |\mathbb{F}_p^{n-1}| = \frac{(p^n - 1)}{(p - 1)} \cdot p^{n-1}.$$

# Isomorphisme et classes d'équivalence affine

Une application  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  d'espaces affines est *affine* s'il existe une application linéaire  $f : E \rightarrow F$  de leurs directions tel que

$$\Theta(\varphi(A), \varphi(B)) = f(\Theta(A, B)).$$

On rappelle que les donnés d'une structure d'espace affine sur  $\mathcal{X}$  et d'un point  $A \in \mathcal{X}$  déterminent une bijection  $\iota = \Theta_A : \mathcal{X} \rightarrow E$ .

Inversement, une bijection  $\iota : \mathcal{X} \rightarrow E$  induit une structure d'espace affine  $\Theta(A, B) = \iota(B) - \iota(A)$ .

On dit que deux bijections  $\iota_1, \iota_2 : \mathcal{X} \rightarrow E$ , entre un ensemble  $\mathcal{X}$  et un espace vectoriel  $E$ , sont dans la même classe *équivalence affine* s'il existe un automorphisme affine  $\varphi$  de  $E$  tel que  $\iota_2 = \varphi \circ \iota_1$ .

# Espaces affines de cardinal 3

Avant d'enoncer le théorème de classification des SET, on caractérise les structures d'espace d'une ensemble de 3 éléments.

## Lemme

*Toute permutation de  $\mathbb{F}_3$  est affine.*

## Démonstration.

Les automorphismes affines sont de la forme  $x \mapsto ax + b$ , pour  $(a, b) \in \mathbb{F}_3^* \times \mathbb{F}_3$ , qui parcourent les six permutations de  $\mathbb{F}_3$ . □

Par conséquent il n'y a qu'une seule classe d'équivalence affine d'un ensemble de 3 éléments :

## Proposition

*Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble de cardinal 3. Toutes les bijections  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{F}_3$  appartiennent à la même classe d'équivalence affine.*

# Le théorème principal

Soient  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{N}$  les ensembles :

$$\mathcal{C} = \{\text{bleu, rouge, vert}\},$$

$$\mathcal{F} = \{\text{losange, ovale, vague}\},$$

$$\mathcal{R} = \{\text{vide, hachuré, plein}\},$$

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}.$$

Des bijections de ces ensembles avec  $\mathbb{F}_3$  déterminent une structure d'espace affine sur  $\mathcal{E} = \mathcal{C} \times \mathcal{F} \times \mathcal{R} \times \mathcal{N}$ , avec direction  $E = \mathbb{F}_3^4$ .

## Theorem

*Soient fixées des bijections entre des attributs de couleur, forme, remplissage, et nombre avec le corps  $\mathbb{F}_3$ . Les triples de cartes constituant un SET sont des droites affines de  $\mathcal{E}$ .*

## Généralisations à quatre valeurs ?

On peut se demander comment caractériser les SETs si on admet 4 valeurs (donc 4 cartes dans un SET, avec valeurs en chaque attribut soit tous égales soit tous distinctes).

On peut mettre des attributs en bijection avec  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{F}_4$ , ou  $\mathbb{F}_2^2$ .

Pour que le choix d'une bijection parmi 24 soit non pertinent, il faut une seule classe d'équivalence affine. Or, les cardinaux d'automorphismes affines sont :

$$|\text{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})| = 2 \cdot 4 = 8, \quad |\text{Aut}(\mathbb{F}_4)| = 3 \cdot 4 = 12, \quad |\text{Aut}(\mathbb{F}_2^2)| = 6 \cdot 4 = 24.$$

Seule la dernière parcourt toutes les permutations. On doit donc choisir des bijections avec  $E = \mathbb{F}_2^2$ , donnant une structure de plan affine sur  $\mathbb{F}_2$ .

**FIN**