Aix-Marseille Université
Préparation à l'agrégation: Option C
https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/david.kohel/tch/Agreg/

Géométrie

Exercices

Résultant et discriminant

Soit A un anneau intègre avec corps de fractions k, et $f \in A[x]$ de degré ℓ avec coefficient dominant $a_n \neq 0$. Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ les racines de f dans $\bar{k}$. Le discriminant de f est

$$\mathrm{disc}(f) = (-1)^{\ell(\ell-1)/2} a_\ell^{2(\ell-1)} \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j) = a_\ell^{2(\ell-1)} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

et que satisfait également l'identité :

$$\mathrm{Res}(f, f') = (-1)^{\ell(\ell-1)/2} a_\ell \, \mathrm{disc}(f).$$

Cette dernière formulation sert de définition constructive. On rappelle que le résultant $\mathrm{Res}(f,g)$ est défini comme le déterminant d'une matrice de degré $\ell + m$, où $m = \deg(g)$, et satisfait

$$\mathrm{Res}(f,g) = a_\ell^m \det(\mu(g)) = (-1)^{\ell m} b_m^\ell \det(\mu(f))$$

où $\mu(g)$ et $\mu(f)$ sont les applications linéaires de multiplication par g sur $k[x]/(f)$ et par f sur $k[x]/(g)$, respectivement.

1. Soit $f = ax^2 + bx + c$ un polynôme dans $k[x]$, avec $a \neq 0$. On explicite trois méthodes pour le calcul du discriminant de f.

- **a.** Calculer le résultant $\mathrm{Res}(f, f')$ par sa définition originale.
- **b.** Poser $B = k[x]/(ax^2 + bx + c)$, et calculer le résultant en termes du déterminant de l'application linéaire $\mu(f')$ sur B.
- **c.** Poser $B = k[x]/(2ax + b) \cong k$, et calculer le résultant en termes du déterminant de l'application linéaire $\mu(f)$ sur B.

2. Calculer le discriminant des polynômes $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (en Sage) et montrer que $\mathrm{disc}(f)$ est un carré si $(c, d) = (-3a - b, a)$.

Famille stable d'un système d'équations différentielles

La famille stable d'un système d'équations différentielles :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n),$$

est la variété $V(f_1, \dots, f_n) \subset \mathbb{A}^n$ pour laquelle $\dfrac{dx_1}{dt} = \cdots = \dfrac{dx_n}{dt} = 0$.

3. On va étudier la famille stable du système :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 - r^2,\ \frac{dy}{dt} = xy - 1. \tag{1}$$

Soit $C : x^2 + y^2 = r^2$ et $D : xy = 1$ dans $\mathbb{A}^2$. Trouver les solutions du système :

$$x^2 + y^2 = r^2,\ xy = 1,$$

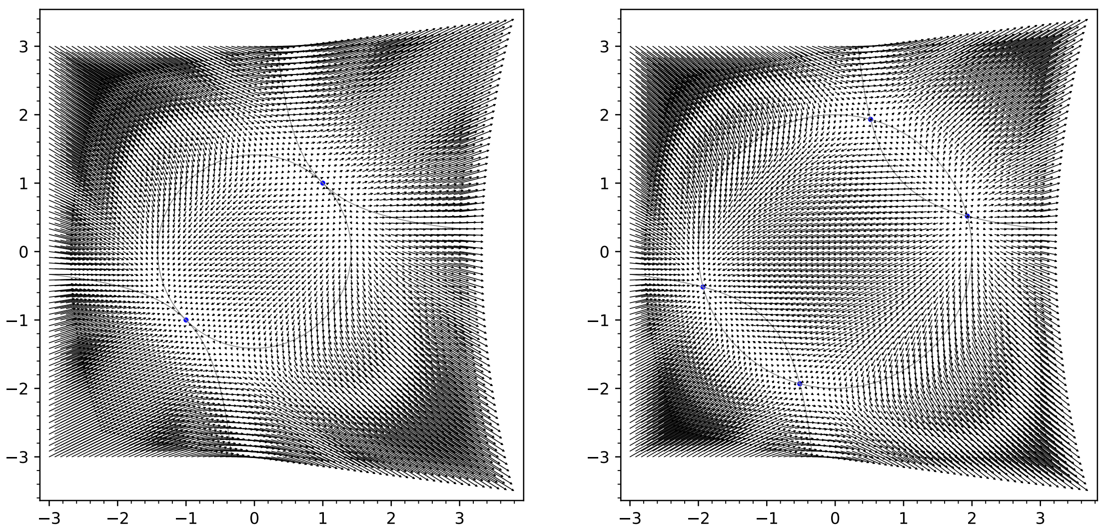
donc les points de $C \cap D$,

a. par la substitution $y = 1/x$ et **b.** en utilisant le résultant.

c. Que se passe-t-il à $r = \sqrt{2}$?

d. En déduire les points stables du système d'equations differentielles (1).

On peut visualiser les courbes C et D et les points stables en Sage, par exemple, pour $r = \sqrt{2}$ et $r = 2$:



Les courbes $\tilde{C} = V(X^2 + Y^2 - r^2Z^2)$ et $\tilde{D} = V(XY - Z^2)$ dans $\mathbb{P}^2$ s'appellent les clôtures projectives des courbes affines C et D.

e. La droite projective $V(Z) \subset \mathbb{P}^2$ s'appelle la droite à l'infini, par rapport à l'inclusion $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$, en notant que $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \backslash V(Z)$. Donner un isomorphism de $\mathbb{P}^1$ avec la droite à l'infini.

f. Déterminer les intersections de $\tilde{C}$ et $\tilde{D}$ avec la droite à l'infini.

g. Montrer que tous les points d'intersection de $\tilde{C}$ et $\tilde{D}$ sont dans $\mathbb{A}^2$:

$$\tilde{C} \cap \tilde{D} = C \cap D \subset \mathbb{A}^2,$$

et expliquer la cohérence de ce résultat avec le nombre de points prévu pour le théorème de Bézout concernant l'intersection des courbes.

4. Trouver les solutions du système :

$$x^2 - y^2 = 4z^2,\ x(x + y)y = 2yz^2.$$

En déduire les points stables du système d'équations différentielles :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y^2 - 4z^2, \quad \frac{dy}{dt} = (x^2 + xy - 2z^2)y, \quad \frac{dz}{dt} = (x+y)yz.$$

Géométrie des nombres algébriques

5. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ le sous-corps de $\mathbb{R}$, et $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in K$.

a. Définir l'extension $K/\mathbb{Q}$ comme quotient $\mathbb{Q}[x,y]/I \cong K$ tel que les images de x et y sont $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

b. Définir la variété $V = V(x^2 - 2, y^2 - 3) \subset \mathbb{A}^2$. Montrer que la dimension de V est zéro, et qu'elle a quatre points, tous dans $V(K)$. Associer à chaque point de V une isomorphisme $\mathbb{Q}[x,y]/I \cong K$.

c. Ajouter une variable z avec relations $z = x + y$ pour réaliser un isomorphisme $\mathbb{Q}[x,y,z]/J \cong K$ qui envoie (x,y,z) à $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \alpha)$.

d. Utiliser le résultant pour déterminer le polynôme caracteristique (= polynôme minimal) de α, en éliminant x et y.

e. Identifier K avec l'espace vectorial $\mathbb{Q}^4$ avec la base $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$. Déterminer la matrice de multiplication par α dans cette base, et son polynôme minimal, en montrant l'équivalence avec le calcul précédent.

6. Soit $p(x) = x^4 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, et soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ ses racines :

$$p(x) = \prod_{i=1}^{4} (x - \alpha_i) \in \mathbb{C}[x].$$

On remarque que $p(x) = x^4 - s_1 x^3 + s_2 x^2 - s_3 x + s_4$, où les s_k sont les polynômes symétriques élémentaires dans les racines de $p(x)$:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \\
s_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4, \\
s_3 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4, \\
s_4 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.
\end{aligned}$$

En particulier, on a $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (0, 0, -1, 1)$.

Un théorème fondamental des fonctions symmétriques affirme que tout polynôme symétrique en $x = (x_1, \ldots, x_n)$ (fixé par toute permutation de x) peut être exprimé comme polynôme en $s = (s_1, \ldots, s_n)$, les polynômes symétriques élémentaires en x.

a. Trouver des expressions génériques en $\mathbb{Q}[s_1, s_2, s_3, s_4]$ pour les sommes de puissances (en commençant avec $p_1 = s_1$) :

$$p_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k + \alpha_4^k, \ 1 \le k \le 4,$$

et évaluer leurs valeurs pour $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (0, 0, -1, 1)$.

b. Montrer que $\mathbb{C}[x]/(x^4+x+1) \to \mathbb{C}^4$, donnée par l'application

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{C}[x]}{(x^4+x+1)} &\longrightarrow \mathbb{C}^4 \\ x &\longmapsto (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneau.

c. Démontrer que la valueur de p_k est la trace de multiplication par x^k sur l'espace vectoriel $\mathbb{Q}[x]/(x^4+x+1) \cong \mathbb{Q}^4$. On peut prendre, par exemple, la base $(1, x, x^2, x^3)$. Exposer les différences entre l'isomorphisme d'anneaux de l'exercice précédent et l'isomorphisme d'espaces vectoriels de cet exercice, en notant que ce dernier est suffisant pour l'interprettation des sommes de puissances.

d. En utilisant la linéarité de la trace et l'identité $\alpha_i^{k+4}+\alpha_i^{k+1}+\alpha_i^k = 0$, en déduire une récurrence pour les p_k.

Envéloppe d'une famille

Une famille de courbes planes, dans une paramétre t, est une surface $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}^3$ définie par un polynôme $f(x,y,t) \in K[x,y,t]$, telle que pour chaque $t_0 \in K$, la fibre

$$\mathcal{F}_{t_0} : f(x,y,t_0) = 0 \subset \mathbb{A}^2$$

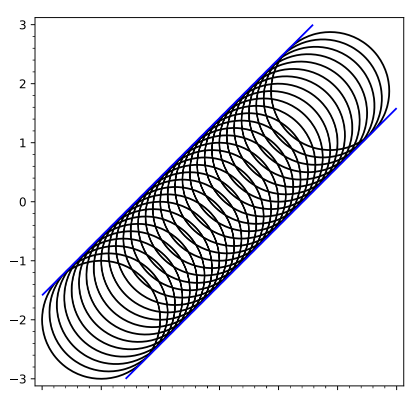
est une courbe. L'enveloppe de $\mathcal{F}$ est l'ensemble de points $(x,y) \in \mathbb{A}^2$ tel que

$$f(x,y,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t) = 0$$

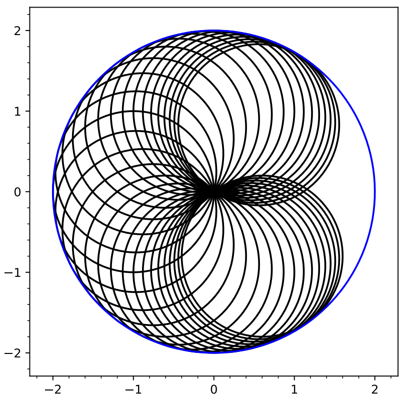
pour au moints un t.

7. Interpréter l'enveloppe de $\mathcal{F}$ comme l'image de la projection de $V(f, f_t)$ à $\mathbb{A}^2$, où $f_t = \partial f/\partial t$. Si l'enveloppe est une courbe (ou union de courbes), justifier cette définition. Décrire une méthode pour calculer l'enveloppe et le lien avec le résultant.

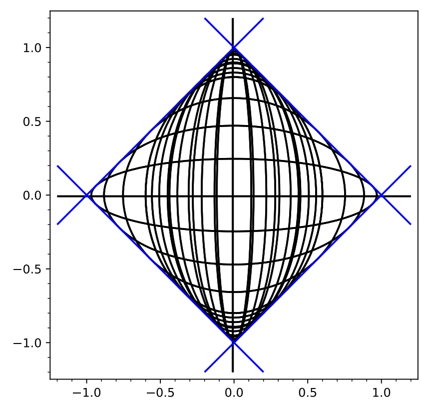
8. Soit $\mathcal{F}_1$ la famille $(x-t)^2+(y-t)^2 = 1$. Montrer que l'enveloppe de $\mathcal{F}_1$ comporte deux composantes, des droites tangentes à chaque fibre de la famille.



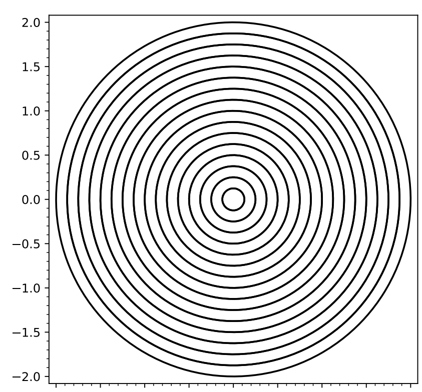
9. Soit $\mathcal{F}_2$ la famille $(x-u)^2+(y-v)^2=1$, pour (u,v) un point sur le cercle $C : u^2+v^2=1$. On peut paramétriser C par $(u,v)=((t^2-1)/(t^2+1), 2t/(t^2+1))$ pour avoir une famille en t. Montrer que l'enveloppe de $\mathcal{F}_2$ comporte un cercle tangent à toute fibre de la familles et les deux droites complexes $x=\pm iy$.



10. Soit $\mathcal{F}_3$ la famille $x^2/u^2+y^3/v^2=1$, pour (u,v) sur le cercle $C : u^2+v^2=1$, paramétrisé, comme ci-dessus par $(u,v)=((t^2-1)/(t^2+1), 2t/(t^2+1))$. Montrer que l'enveloppe de $\mathcal{F}_3$ comporte quatres composantes droites, tangentes aux fibres de la famille.

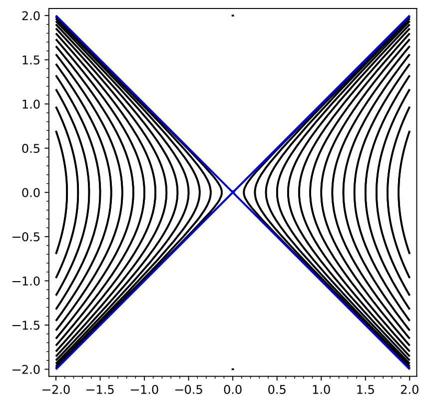


11. Soit $\mathcal{F}_4$ la famille $x^2+y^2=t^2$. Les fibres de la famille sont des cercles concentriques, sans tangente communes sur $\mathbb{R}$.



a. Montrer que l'enveloppe de $\mathcal{F}_4$ est la courbe $V(x^2+y^2)$, qui est composée de deux droites : $D_0 : x = iy$ et $D_1 : x = -iy$ dans le plan affine complexe.

b. Pour mieux visualiser et interpretter ces droites, on fait un changement de variables $(x, y) \mapsto (x, iy)$, tels que la famille *tordue* devient $\mathcal{F}_4^t : x^2 - y^2 = t^2$, l'enveloppe $V(x^2 - y^2)$ et les droites $D_0^t : x = y$ et $D_1^t : x = -y$.



Enveloppe de $\mathcal{F}_4^t$ dans le plan (x, y)

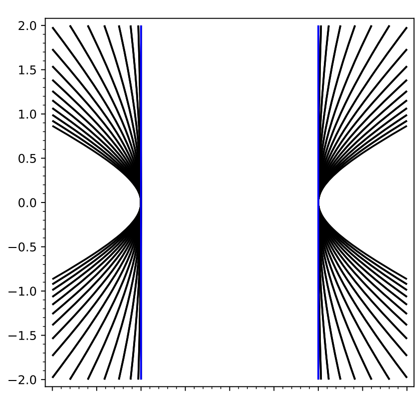
c. Observer que les droites D_0^t et D_1^t ne sont pas tangentes aux fibres de $\mathcal{F}_4^t$. On va regarder l'enveloppe de la clôture projective

$$\tilde{\mathcal{F}}_4^t : X^2 - Y^2 = t^2 Z^2.$$

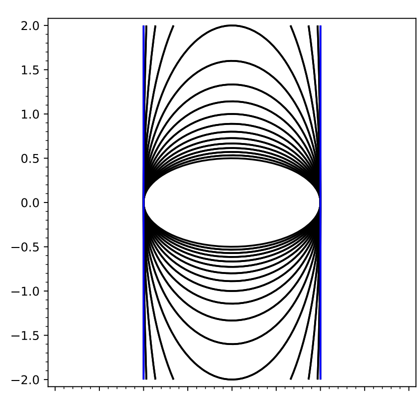
d. Déterminer l'enveloppe de la clôture projective de la famille $\mathcal{F}_4^t$ dans les plans $(x, z) = (x : 1 : z)$ et $(y, z) = (1 : y : z)$. En particulier pour

$$x^2 - 1^2 = t^2 z^2 \text{ et } 1^2 - y^2 = t^2 z^2,$$

Montrer que l'enveloppe consiste que les deux droites ci-dessus, qui sont tangentes à chaque fibre de la familles (à des points avec $z = 0$) et une troisième droites parasite $z = 0$ (comme le deuxième cercle de la famille $\mathcal{F}_2$).



Enveloppe de $\mathcal{F}_4^t$ dans le plan (x, z)



Enveloppe de $\mathcal{F}_4^t$ dans le plan (y, z)