Aix-Marseille Université
Préparation à l'agrégation: Option C
https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/david.kohel/tch/Agreg/

Géométrie

Exercices

Résultant et discriminant

Soit A un anneau intègre avec corps de fractions k, et $f \in A[x]$ de degré ℓ avec coefficient dominant $a_n \neq 0$. Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ les racines de f dans $\bar{k}$. Le discriminant de f est

$$\operatorname{disc}(f) = (-1)^{\ell(\ell-1)/2} a_\ell^{2(\ell-1)} \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j) = a_\ell^{2(\ell-1)} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

et que satisfait également l'identité :

$$\operatorname{Res}(f, f') = (-1)^{\ell(\ell-1)/2} a_\ell \operatorname{disc}(f).$$

Cette dernière formulation sert de définition constructive. On rappelle que le résultant $\operatorname{Res}(f, g)$ est défini comme le déterminant d'une matrice de degré $\ell + m$, où $m = \deg(g)$, et satisfait

$$\operatorname{Res}(f, g) = a_\ell^m \det(\mu(g)) = (-1)^{\ell m} b_m^\ell \det(\mu(f))$$

où $\mu(g)$ et $\mu(f)$ sont les applications linéaires de multiplication par g sur $k[x]/(f)$ et par f sur $k[x]/(g)$, respectivement.

1. Soit $f = ax^2 + bx + c$ un polynôme dans $k[x]$, avec $a \neq 0$. On explicite trois méthodes pour le calcul du discriminant de f.

a. Calculer le résultant $\operatorname{Res}(f, f')$ par sa définition originale.

Solution. *Par définition, on a :*

$$\operatorname{Res}(f, f') = \det\left(\begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{bmatrix}\right) = ab^2 - 2a(b^2 - 2ac) = -a(b^2 + 4ac).$$

b. Poser $B = k[x]/(ax^2+bx+c)$, et calculer le résultant en termes du déterminant de l'application linéaire $\mu(f')$ sur B.

Solution. *On observe que* $ax^2 = -b\,x - c$, *et donc,*

$$\mu(f') \cdot 1 = 2ax + b \text{ et } \mu(f') \cdot x = 2ax^2 + bx \equiv -2bx - 2c + bx = -bx - 2c.$$

Dans la base $\{1, x\}$ *de* B, *on obtient la matrice de* $\mu(f')$, *dont le déterminant est :*

$$\det(\mu(f')) = \det\left(\begin{bmatrix} b & 2a \\ -2c & -b \end{bmatrix}\right) = -(b^2 - 4ac).$$

Il suit que $\operatorname{Res}(f, f') = a \det(\mu(f')) = -a(b^2 - 4ac)$.

c. Poser $B = k[x]/(2ax+b) \cong k$, et calculer le résultant en termes du déterminant de l'application linéaire $\mu(f)$ sur B.

Solution. *Dans B, $x \equiv -b/2a$, donc*

$$f(x) = ax^2 + bx + c \equiv a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - b\left(\frac{b}{2a}\right) + c = -a\frac{(b^2-4ac)}{4a^2},$$

et donc $\operatorname{Res}(f, f') = -a(2a)^2\dfrac{(b^2-4ac)}{4a^2} = -a(b^2-4ac).$

Sachant que $\operatorname{Res}(f, f') = -a\operatorname{disc}(f)$, *on obtient* $\operatorname{disc}(f) = b^2 - 4ac$.

2. Calculer le discriminant des polynômes $f = ax^3+bx^2+cx+d$ (en Sage) et montrer que $\operatorname{disc}(f)$ est un carré si $(c,d) = (-3a-b, a)$.

Famille stable d'un système d'équations différentielles

La famille stable d'un système d'équations différentielles :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n),$$

est la variété $V(f_1, \dots, f_n) \subset \mathbb{A}^n$ pour laquelle $\dfrac{dx_1}{dt} = \cdots = \dfrac{dx_n}{dt} = 0.$

3. On va étudier la famille stable du système :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 - r^2,\ \frac{dy}{dt} = xy - 1. \tag{1}$$

Soit $C : x^2 + y^2 = r^2$ et $D : xy = 1$ dans $\mathbb{A}^2$. Trouver les solutions du système :

$$x^2 + y^2 = r^2,\ xy = 1,$$

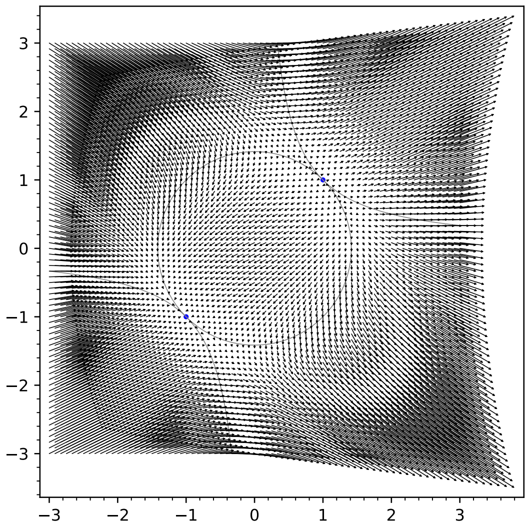
donc les points de $C \cap D$,

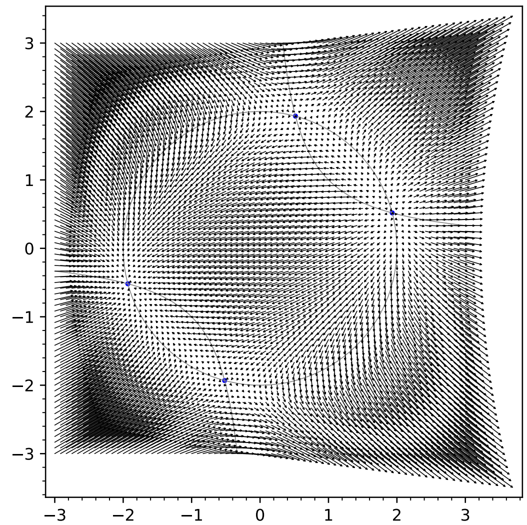
a. par la substitution $y = 1/x$ et **b.** en utilisant le résultant.

c. Que se passe-t-il à $r = \sqrt{2}$?

d. En déduire les points stables du système d'equations differentielles (1).

On peut visualiser les courbes C et D et les points stables en Sage, par exemple, pour $r = \sqrt{2}$ et $r = 2$:





Les courbes $\tilde{C} = V(X^2 + Y^2 - r^2 Z^2)$ et $\tilde{D} = V(XY - Z^2)$ dans $\mathbb{P}^2$ s'appellent les clôtures projectives des courbes affines C et D.

e. La droite projective $V(Z) \subset \mathbb{P}^2$ s'appelle la droite à l'infini, par rapport à l'inclusion $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$, en notant que $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \backslash V(Z)$. Donner un isomorphism de $\mathbb{P}^1$ avec la droite à l'infini.

f. Déterminer les intersections de $\tilde{C}$ et $\tilde{D}$ avec la droite à l'infini.

g. Montrer que tous les points d'intersection de $\tilde{C}$ et $\tilde{D}$ sont dans $\mathbb{A}^2$:

$$\tilde{C} \cap \tilde{D} = C \cap D \subset \mathbb{A}^2,$$

et expliquer la cohérence de ce résultat avec le nombre de points prévu pour le théorème de Bézout concernant l'intersection des courbes.

4. Trouver les solutions du système :

$$x^2 - y^2 = 4z^2, \ x(x+y)y = 2yz^2.$$

En déduire les points stables du système d'équations différentielles :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y^2 - 4z^2, \quad \frac{dy}{dt} = (x^2 + xy - 2z^2)y, \quad \frac{dz}{dt} = (x+y)yz.$$

Géométrie des nombres algébriques

5. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ le sous-corps de $\mathbb{R}$, et $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in K$.

a. Définir l'extension $K/\mathbb{Q}$ comme quotient $\mathbb{Q}[x,y]/I \cong K$ tel que les images de x et y sont $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

b. Définir la variété $V = V(x^2 - 2, y^2 - 3) \subset \mathbb{A}^2$. Montrer que la dimension de V est zéro, et qu'elle a quatre points, tous dans $V(K)$. Associer à chaque point de V une isomorphisme $\mathbb{Q}[x,y]/I \cong K$.

c. Ajouter une variable z avec relations $z = x + y$ pour réaliser un isomorphisme $\mathbb{Q}[x,y,z]/J \cong K$ qui envoie (x,y,z) à $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \alpha)$.

d. Utiliser le résultant pour déterminer le polynôme caracteristique (= polynôme minimal) de α, en éliminant x et y.

e. Identifier K avec l'espace vectorial $\mathbb{Q}^4$ avec la base $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$. Déterminer la matrice de multiplication par α dans cette base, et son polynôme minimal, en montrant l'équivalence avec le calcul précédent.

6. Soit $p(x) = x^4 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, et soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ ses racines :

$$p(x) = \prod_{i=1}^{4}(x - \alpha_i) \in \mathbb{C}[x].$$

On remarque que $p(x) = x^4 - s_1x^3 + s_2x^2 - s_3x + s_4$, où les s_k sont les polynômes symétriques élémentaires dans les racines de $p(x)$:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,\\
s_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4,\\
s_3 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4,\\
s_4 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.
\end{aligned}$$

En particulier, on a $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (0, 0, -1, 1)$.

Un théorème fondamental des fonctions symmétriques affirme que tout polynôme symétrique en $x = (x_1, \ldots, x_n)$ (fixé par toute permutation de x) peut être exprimé comme polynôme en $s = (s_1, \ldots, s_n)$, les polynômes symétriques élémentaires en x.

a. Trouver des expressions génériques en $\mathbb{Q}[s_1, s_2, s_3, s_4]$ pour les sommes de puissances (en commençant avec $p_1 = s_1$) :

$$p_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k + \alpha_4^k,\ 1 \le k \le 4,$$

et évaluer leurs valeurs pour $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (0, 0, -1, 1)$.

b. Montrer que $\mathbb{C}[x]/(x^4 + x + 1) \to \mathbb{C}^4$, donnée par l'application

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{C}[x]}{(x^4 + x + 1)} &\longrightarrow \mathbb{C}^4\\
x &\longmapsto (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)
\end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneau.

Solution. *L'application $\mathbb{C}[x]/(x^4 + x + 1) \to \mathbb{C}$ envoyant x à α_i, est bien-définies, avec noyau $(x - \alpha_i)$. Par le théorème chinois on obtient un isomorphisme.*

c. Démontrer que la valueur de p_k est la trace de multiplication par x^k sur l'espace vectoriel $\mathbb{Q}[x]/(x^4 + x + 1) \cong \mathbb{Q}^4$. On peut prendre, par exemple, la base $(1, x, x^2, x^3)$. Exposer les différences entre l'isomorphisme d'anneaux de l'exercice précédent et l'isomorphisme d'espaces vectoriels de cet exercice, en notant que ce dernier est suffisant pour l'interprettation des sommes de puissances.

Solution. *L'isomorphisme d'anneau sur $\mathbb{C}$ monte que multiplication par x^k est linéairement équivalent à multiplication par la matrice diagonale, avec coefficients diagonales $(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \alpha_4^k)$, dont la trace est p_k. Or, la multiplication par x^k induit une transformation linéaire sur $\mathbb{Q}[x]/(x^4+x+1)$. Alors on peut déterminer sa trace, dans $\mathbb{Q}$, par son action sur $\mathbb{Q}[x]/(x^4+x+1)$. En effet, la matrice A de multiplication par x est*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $(\mathrm{Tr}(A^k)) = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \dots) = (4, 0, 0, -3, -4, \dots)$.

Le premier isomorphisme, sur $\mathbb{C}$, est un isomorphisme d'anneaux, qui réspecte multiplication. Ça implique un isomorphisme d'espace vectoriel, mais par l'inverse : l'isomorphisme sur $\mathbb{Q}$, n'est pas un isomorphisme d'anneau.

d. En utilisant la linéarité de la trace et l'identité $\alpha_i^{k+4} + \alpha_i^{k+1} + \alpha_i^k = 0$, en déduire une récurrence pour les p_k.

Solution. *En prenant la trace de l'identité, on obtient $p_{4+k} = -p_{k+1} - p_k$.*

Envéloppe d'une famille

Une famille de courbes planes, dans une paramétre t, est une surface $\mathcal{F} \subset \mathbb{A}^3$ définie par un polynôme $f(x, y, t) \in K[x, y, t]$, telle que pour chaque $t_0 \in K$, la fibre

$$\mathcal{F}_{t_0} : f(x, y, t_0) = 0 \subset \mathbb{A}^2$$

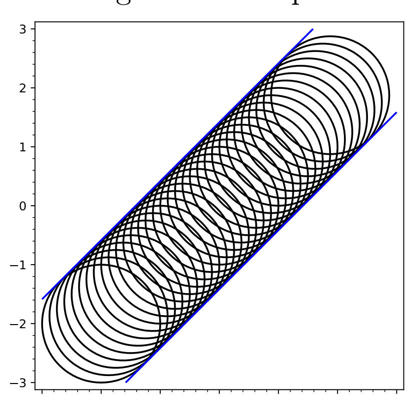
est une courbe. L'enveloppe de $\mathcal{F}$ est l'ensemble de points $(x, y) \in \mathbb{A}^2$ tel que

$$f(x, y, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, t) = 0$$

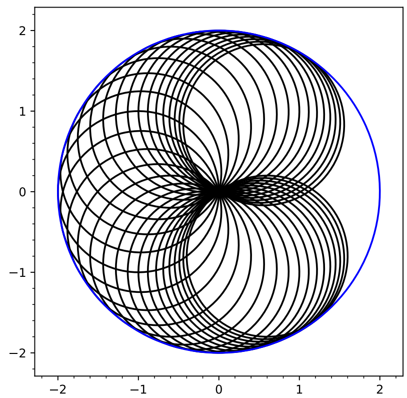
pour au moints un t.

7. Interpréter l'enveloppe de $\mathcal{F}$ comme l'image de la projection de $V(f, f_t)$ à $\mathbb{A}^2$, où $f_t = \partial f / \partial t$. Si l'enveloppe est une courbe (ou union de courbes), justifier cette définition. Décrire une méthode pour calculer l'enveloppe et le lien avec le résultant.

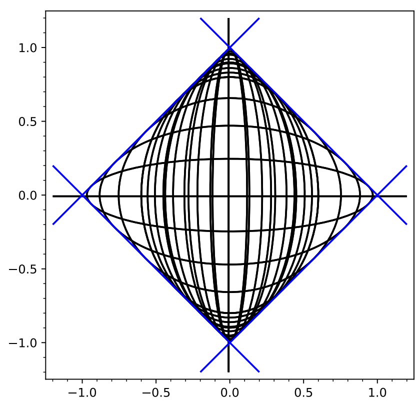
8. Soit $\mathcal{F}_1$ la famille $(x-t)^2 + (y-t)^2 = 1$. Montrer que l'enveloppe de $\mathcal{F}_1$ comporte deux composantes, des droites tangentes à chaque fibre de la famille.



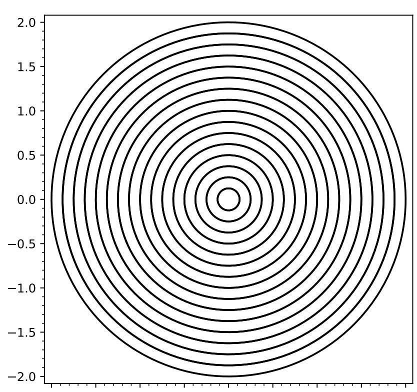
9. Soit $\mathcal{F}_2$ la famille $(x-u)^2+(y-v)^2=1$, pour (u,v) un point sur le cercle $C: u^2+v^2=1$. On peut paramétriser C par $(u,v)=((t^2-1)/(t^2+1), 2t/(t^2+1))$ pour avoir une famille en t. Montrer que l'enveloppe de $\mathcal{F}_2$ comporte un cercle tangent à toute fibre de la familles et les deux droites complexes $x=\pm iy$.



10. Soit $\mathcal{F}_3$ la famille $x^2/u^2+y^3/v^2=1$, pour (u,v) sur le cercle $C: u^2+v^2=1$, paramétrisé, comme ci-dessus par $(u,v)=((t^2-1)/(t^2+1), 2t/(t^2+1))$. Montrer que l'enveloppe de $\mathcal{F}_3$ comporte quatres composantes droites, tangentes aux fibres de la famille.

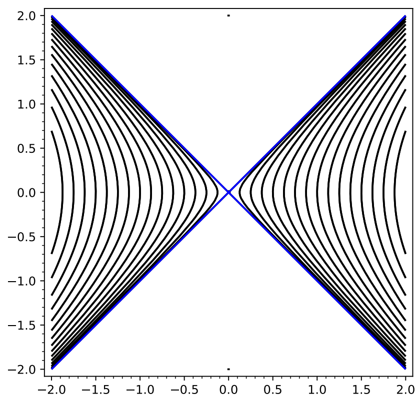


11. Soit $\mathcal{F}_4$ la famille $x^2+y^2=t^2$. Les fibres de la famille sont des cercles concentriques, sans tangente communes sur $\mathbb{R}$.



a. Montrer que l'enveloppe de $\mathcal{F}_4$ est la courbe $V(x^2+y^2)$, qui est composée de deux droites : $D_0 : x = iy$ et $D_1 : x = -iy$ dans le plan affine complexe.

b. Pour mieux visualiser et interpretter ces droites, on fait un changement de variables $(x, y) \mapsto (x, iy)$, tels que la famille *tordue* devient $\mathcal{F}_4^t : x^2 - y^2 = t^2$, l'enveloppe $V(x^2 - y^2)$ et les droites $D_0^t : x = y$ et $D_1^t : x = -y$.



Enveloppe de $\mathcal{F}_4^t$ dans le plan (x, y)

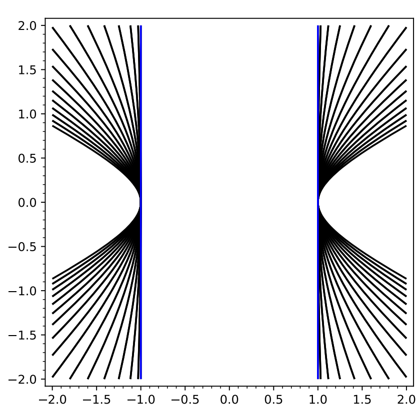
c. Observer que les droites D_0^t et D_1^t ne sont pas tangentes aux fibres de $\mathcal{F}_4^t$. On va regarder l'enveloppe de la clôture projective

$$\tilde{\mathcal{F}}_4^t : X^2 - Y^2 = t^2 Z^2.$$

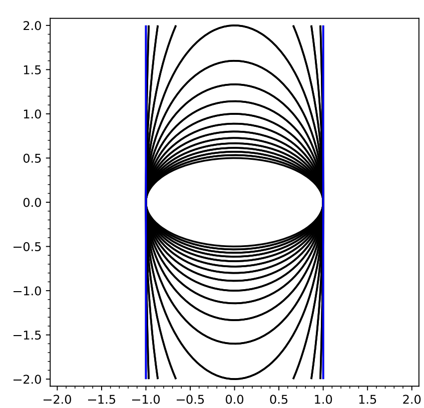
d. Déterminer l'enveloppe de la clôture projective de la famille $\mathcal{F}_4^t$ dans les plans $(x, z) = (x : 1 : z)$ et $(y, z) = (1 : y : z)$. En particulier pour

$$x^2 - 1^2 = t^2 z^2 \text{ et } 1^2 - y^2 = t^2 z^2,$$

Montrer que l'enveloppe consiste que les deux droites ci-dessus, qui sont tangentes à chaque fibre de la familles (à des points avec $z = 0$) et une troisième droites parasite $z = 0$ (comme le deuxième cercle de la famille $\mathcal{F}_2$).



Enveloppe de $\mathcal{F}_4^t$ dans le plan (x, z)



Enveloppe de $\mathcal{F}_4^t$ dans le plan (y, z)