Option C

Géométrie suite

D Kohel

24/11/2020

Espaces projectifs et variétés projs

On a défini $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\bar{k})$ et $V = V(\bar{k})$.

Comme pour les espaces (et variétés) affines on définit, pour K/k une extension :

$$\mathbb{P}^n(K) = \frac{\mathbb{A}^{n+1}(K) - \{0\}}{K^*}$$

orbites

$\|$

= classes d'équivalences dans $\mathbb{A}^{n+1}(K) - \{0\}$ par l'action de K^*.

et

$$V(K) = V(\bar{k}) \cap \mathbb{P}^n(K).$$

Comme pour $\mathbb{A}^n$ et variétés affine, on peut définir $\mathbb{P}^n$ et V d'être des foncteurs des k-algèbres (K/k) aux ensembles ($\mathbb{P}^n(K)$ et $V(K)$).

<u>Dimension</u>. On définit $\dim \mathbb{A}^n = \dim \mathbb{P}^n = n$.

Pour tout polynôme $f \notin k$, $\dim V(f) = n-1$ (un hypersurface).

Si $\deg f = 1$, on dit $V(f)$ est un hyperplan.

Ideal de V.

Soit V une variété ($V = V(f_1, \dots, f_r)$)
on définit $I(V) = \{ f \in A \mid f(x) = 0 \ \forall x \in V \}$,
où $A = \begin{cases} k[x_1, \dots, x_n] & \text{cas affine} \\ k[X_0, \dots, X_n] & \text{cas projectif.} \end{cases}$

Remarque. On va écrire x_i (minuscule) pour les fonctions des coordonnés d'une variété affine dans $\mathbb{A}^n$ et X_i pour les fonctions des coordonnés d'une variété projective dans $\mathbb{P}^n$.

N.B. X_i n'est pas une fonction, mais
$$X_i / X_j = (X_i : X_j) : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ (a_0 : \cdots : a_n) & \longmapsto & (a_i : a_j) \end{array}$$

Topologie de Zariski

On définit $V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ fermé et
$$U(f) = \mathbb{P}^n \setminus V(f) \text{ ouvert.}$$
Ceci définit une topologie sur $\mathbb{P}^n$ et par intersection sur $V \subseteq \mathbb{P}^n$.

Structure des espaces projectifs

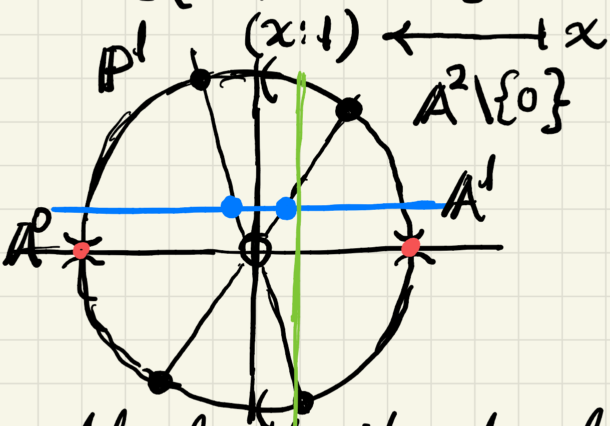
La droite projective $\mathbb{P}^1$, avec anneau des coordonnés $k[X,Y]$.

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0 = \mathcal{U}(Y) \sqcup V(Y)$$

↑ union disjointe

N.B. $V(Y) = \{(1:0)\}$ dim 0

$\mathcal{U}(Y) = \{(x:1) : x \in k\} \cong \mathbb{A}^1$ dim 1



$\mathbb{P}^1$ = ensemble des droites du plan $\mathbb{A}^2$ passant par $(0,0)$

= union de $\mathbb{A}^1$ + un point (compactification par un point)

= espace couvert des droites affines:

$$\mathbb{P}^1 = \mathcal{U}(X) \cup \mathcal{U}(Y)$$

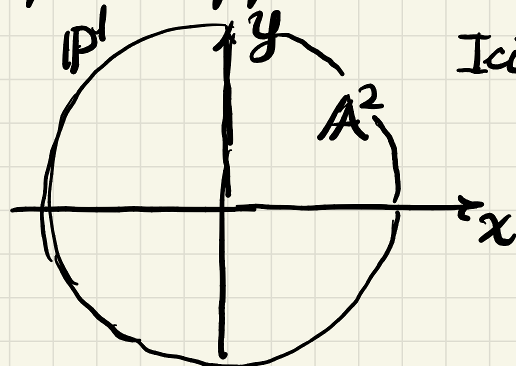
$$\begin{array}{cc} \mathcal{U}(X) & \mathcal{U}(Y) \\ \wr\| & \wr\| \\ \mathbb{A}^1 & \mathbb{A}^1 \\ \text{(vert)} & \text{(bleu)} \end{array}$$

Le plan projectif, anneau $k[X,Y,Z]$

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0 = \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{P}^1.$$

$\mathbb{A}^2 = \mathcal{U}(Z)$, $\mathbb{A}^1 =$ “la droite à l'infini” (par rapport à $\mathbb{A}^2 \subseteq \mathbb{P}^2$)

$\mathbb{P}^2$:



Ici $x = X/Z$
$y = Y/Z$

La droite à l'infini décrit comment on approche l'infini.

Compactification du plan par une droite à l'infini.

$$\mathbb{P}^2 = \mathcal{U}(X) \cup \mathcal{U}(Y) \cup \mathcal{U}(Z), \quad \mathcal{U}(Z) = \{(x:y:1) ; x,y \in k\}$$

$$\mathcal{U}(X) \cong \mathbb{A}^2, \quad \mathcal{U}(Y) \cong \mathbb{A}^2, \quad \mathcal{U}(Z) \cong \mathbb{A}^2$$

$$k\left[\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right] \qquad k\left[\frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y}\right] \qquad k\left[\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right] = k[x,y]$$

anneaux des coordonnés.

En général on a

$$\mathbb{P}^n = \mathcal{U}(X_0) \cup \cdots \cup \mathcal{U}(X_n)$$

$$= \underbrace{\mathbb{A}^n}_{\mathcal{U}(X_0)} \sqcup \underbrace{\mathbb{A}^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{A}^0}_{\mathbb{P}^{n-1} = V(X_0) = \text{hyperplan à l'infini.}}$$

<u>Prop.</u> Soit $V = V(f)$,
où $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogène (ou $k[x_1, \ldots, x_n]$)
tel que $f = \prod_{i=1}^r f_i^{e_i}$.

1) $I(V) = \left(\prod_{i=1}^r f_i\right)$ et $V = V(I(V))$.

2) $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ où $V_i = V(f_i)$.

<u>Théorème</u> (Nullstellensatz de Hilbert)
Soit $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ et $V = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$.
Si $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tel que $f(V) = 0$,
alors il existe m tel que $f^m \in I$.

<u>Cor.</u> $I(V(I)) = \sqrt{I} = \mathrm{rad}(I)$

$$:= \{ f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f^m \in I \}.$$

Solution des systèmes d'équations nonlinéaires.

On note que l'ensemble des solutions d'un système $f_1 = \cdots = f_r = 0$ d'équations polynomiales, $f_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$, est l'ensemble des points k-rationnels $V(k)$, où $V = V(f_1, \ldots, f_r)$.

Le <u>résultant</u> est un outil pour reduction du nombre de variables d'un système d'equations:

$$f_1 = \cdots = f_r = 0$$

<u>Idée</u>: On choisit un variable x, par exemple $x = x_n$, et si $A = k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, on a $A[x] \cong k[x_1, \ldots, x_n]$.

Pour $j = 1, \ldots, r-1$, on utilise f_r pour éliminer le n'ième variable $x = x_n$:

$$g_1 = \mathrm{Res}_x(f_1, f_r), \ldots, g_{r-1} = \mathrm{Res}_x(f_{r-1}, f_r).$$

Comment?

Définition et propriétés

Soit f et g dans $A[x]$,

$$f = a_0 x^l + \cdots + a_l,\quad a_0 \neq 0 \quad \deg(f) = l$$

$$g = b_0 x^m + \cdots + b_m,\quad b_0 \neq 0 \quad \deg(g) = m$$

$$\mathrm{Res}_x(f,g) = \det\begin{bmatrix}
a_0 & & 0 & b_0 & & 0 \\
a_1 & a_0 & & b_1 & & \\
\vdots & a_1 & \ddots & \vdots & & \\
 & \vdots & a_0 & & & b_0 \\
a_l & & a_1 & & & b_1 \\
 & a_l & \vdots & b_m & & \vdots \\
 & & \ddots & & \ddots & \\
0 & & a_l & 0 & & b_m
\end{bmatrix}$$

$l-1$ $\quad$ $m+1$ $\quad$ $m-1$

m $\quad$ l $\quad$ $(l+m)\times(l+m)$

Propriétés

Proposition

- $\mathrm{Res}(f,g) = (-1)^{lm}\,\mathrm{Res}(g,f)$
- $\mathrm{Res}(f,g) \in \mathbb{Z}[a_0,\dots,a_l,b_0,\dots,b_m]$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $\mathrm{car}(A) = n \neq 0$.
- $\mathrm{Res}(f,g) = 0$ ssi $\mathrm{pgcd}(f,g) \neq 1$, si $A = k$ est un corps.
- Ils existent $a(x)$ et $b(x) \in A[x]$ tels que

$$a(x)f(x) + b(x)g(x) = \mathrm{Res}(f,g).$$

En effet $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[a_0,\dots,a_l,b_0,\dots,b_l][x]$.

• Si $f(x)=a_0\prod(x-\alpha_i)$, $g(x)=b_0\prod(x-\beta_j)$ on a

$$\mathrm{Res}_x(f,g)=a_0^m b_0^l \prod_i\prod_j(\alpha_i-\beta_j)$$

$$=a_0^m\prod_{i=1}^{l} g(\alpha_i)=(-1)^{lm} b_0^l\prod_{j=1}^{m} f(\beta_j).$$

<u>Définition</u> Le <u>discriminant</u> d'un polynôme $f(x)=a_0x^l+\dots+a_l=a_0\prod_{i=1}^{l}(x-\alpha_i)$ est

$$\mathrm{disc}(f)=a_0^l\prod_{1\le i<j\le l}(\alpha_i-\alpha_j)^2.$$

<u>Prop</u> $\mathrm{Res}(f,f')=(-1)^{l(l-1)/2}a_0\,\mathrm{disc}(f)$.

<u>Preuve</u> (Exercice)

<u>Calcul du résultant</u>

Soit $B=A[x]/(f(x))$ et

$$\mu(g): B\longrightarrow B$$

l'application linéaire $h\mapsto gh$ de multiplication par g. Alors

$$\mathrm{Res}(f,g)=a_0^m\det(\mu(g)).$$

<u>Remarque.</u> On peut écrire $\mu(g)$ par une matrice das la base $\{1,x,\dots,x^{l-1}\}$.

<u>Preuve</u> (Indication):

On suppose que $A=k$ est un corps et les racines de f sont de mult 1.

Par le théorème chinois,

$$\overline{B}=\frac{k[x]}{(f(x))}\cong\prod\frac{k[x]}{(x-\alpha_i)}\xrightarrow[\mu(g)]{}\prod\frac{k[x]}{(x-\alpha_i)}$$
$$(1)\longmapsto(g(\alpha_i))\quad\cong\overline{B}$$

Donc le théorème chinois nous donne un diagonalisation de $\mu(g)$.

Alors $\det(\mu(g))=\prod_{i=1}^{l}g(\alpha_i)$.

Donc par la proposition, on a

$$\operatorname{Res}(f,g)=a_0^m\det(\mu(g)).$$

<u>Cor.</u> $\operatorname{Res}(f_1f_2,g)=\operatorname{Res}(f_1,g)\operatorname{Res}(f_2,g)$.