Paramétrisation d'une conique

D. Kohel

04/01/2021

Théorème (Bézout)

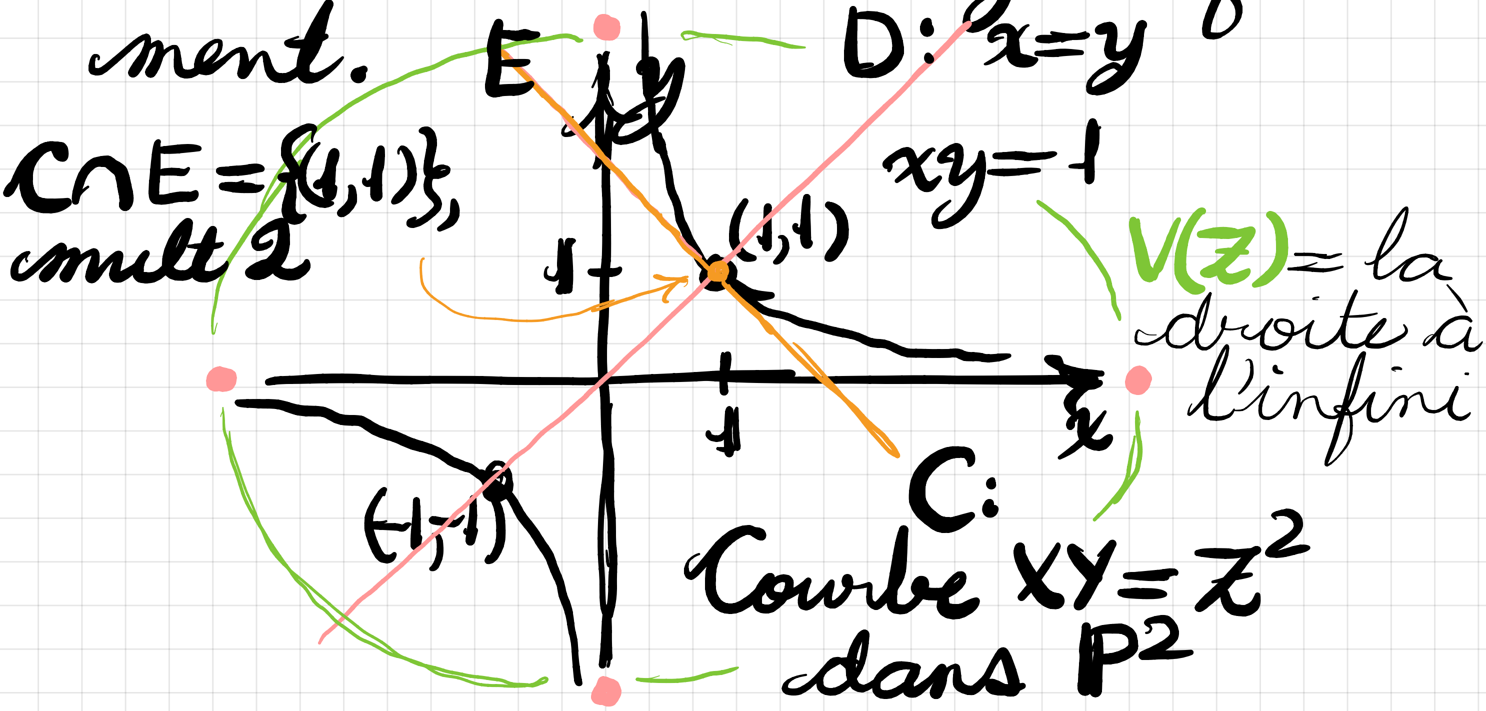
Soit C et D deux courbes proj. dans $\mathbb{P}^2$, définies par f et g :

$$C = V(f) \quad \text{et} \quad D = V(g),$$

de degrés $m = \deg(f)$ et $n = \deg(g)$. Le nombre de points de $C \cap D$, comptés avec multiplicités, est égal à mn (ou infini si elles ont une composante commune).

Remarques.

- Il faut compter les points sur la clôture algébrique.
- Les multiplicités peuvent être déterminées algébriquement.



Remarque.

$$C \cap D = \{(1,1), (-1,-1)\}$$

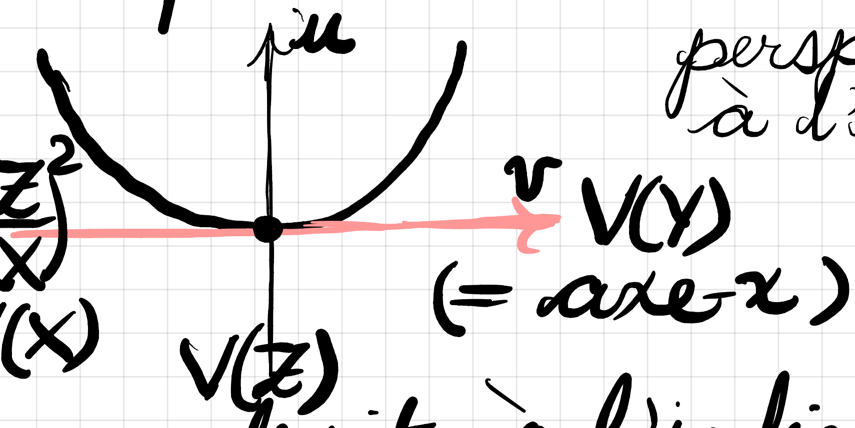
est de cardinal $2 = \deg(C)\deg(D)$.
$= 2.1$.

Les axes x et y ($V(Y)$ et $V(X)$) intersectent C en un point avec multiplicité 2.

$XY = Z^2$

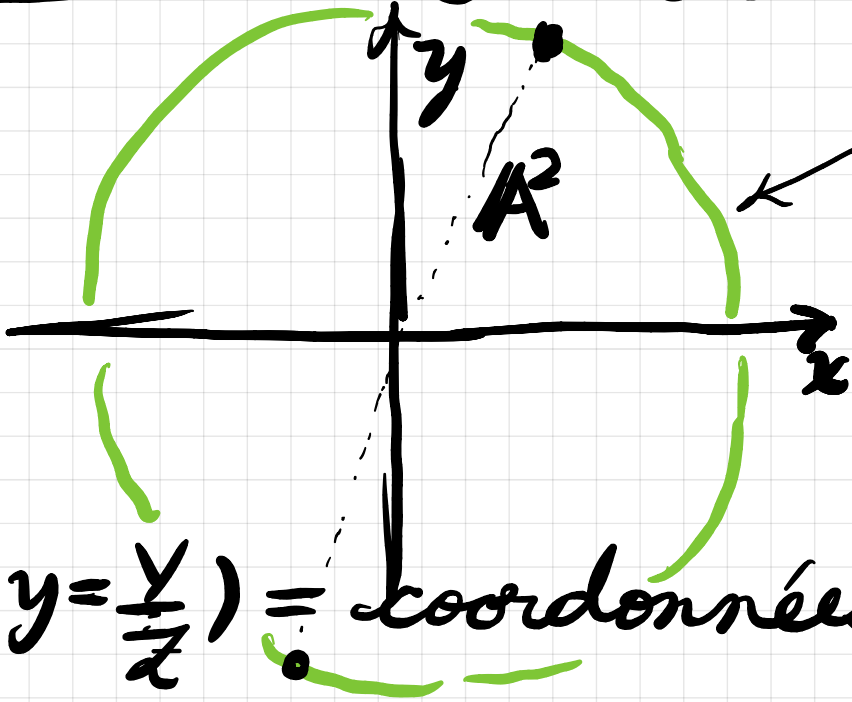
$u = \left(\frac{Y}{X}\right) = v^2 = \left(\frac{Z}{X}\right)^2$

$\{(u,v)\} = \mathbb{P}^2 \setminus V(X)$
$\cong \mathbb{A}^2$



La droite $D: x+y=2$ est

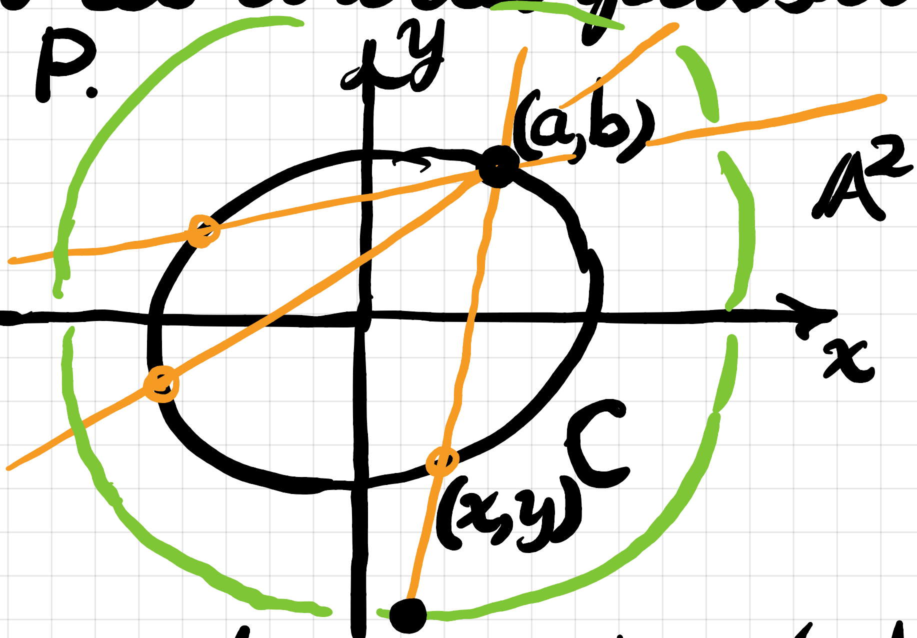
Rappel $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{P}^1$ où $\mathbb{P}^1 = V(Z)$



$\left(x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}\right)$ = coordonnées affines

<u>Conclusion</u> : Une conique $C \subseteq \mathbb{P}^2$ a deux points d'intersection avec toute droite $D \subseteq \mathbb{P}^2$.

Par conséquent, si $P = (a,b)$ est un point de C, on a une bijection entre les points de C est les droites passant par P.



Supposant que $(a,b) = (a:b:1)$ est dans le plan affine $\mathbb{A}^2$, les droites D donnent une projection à la droite à l'infini :

$$C \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1 = V(z) \text{ à l'infini}$$

<u>Remarque</u> Encore par Bézout : chaque droite D

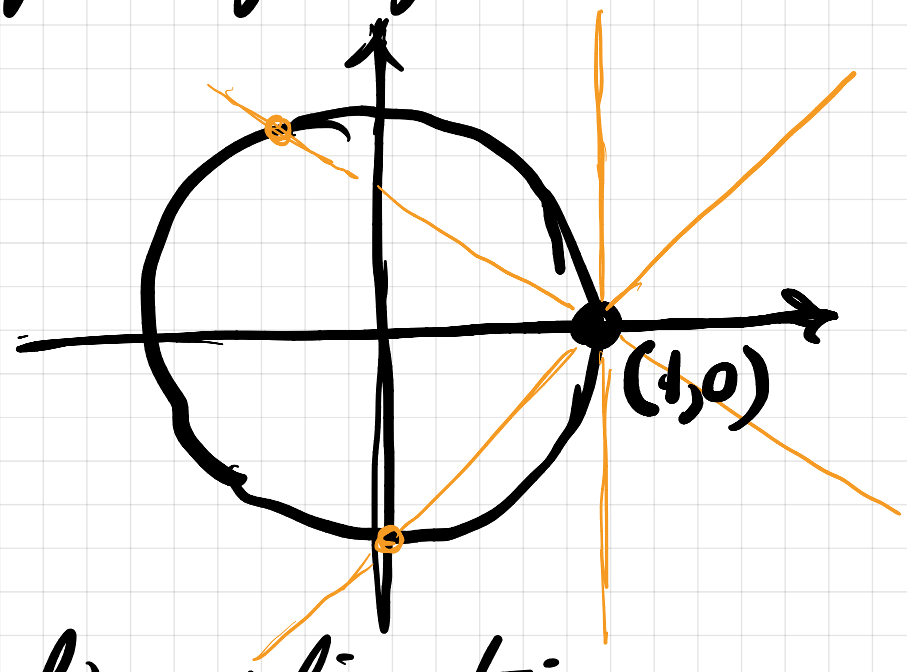
a un point et un seul point ④ d'intersection avec la droite $\mathbb{P}^1$ à l'infini : c'est l'image du point $(x,y) \in C$.

<u>Exemple</u> (Classique) Paramétrisation du cercle.

$$C : x^2 + y^2 = 1, \quad \subseteq \mathbb{A}^2$$

donc $\tilde{C} : X^2 + Y^2 = Z^2 \subseteq \mathbb{P}^2$ sa clôture projective.

Il existe $(1,0) \in C(\mathbb{Q})$. On va trouver une paramétrisation par projection à l'infini.



On a l'application :

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ (x,y) &\longmapsto (x-1 : y) \end{aligned}$$

On prolonge à sa clôture projective :

$$\begin{aligned} \tilde{C} &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ (X:Y:Z) &\longmapsto (X-Z:Y) \end{aligned}$$

$\tilde{C} : X^2+Y^2 = Z^2$

alors

$$X^2-Z^2 = (X-Z)(X+Z) = -Y^2,$$

donc

$$(X-Z:Y) = (-Y:X+Z),$$

car

$$\frac{X-Z}{Y} = \frac{-Y}{X+Z}.$$

Le prolongement est donc

$$(X:Y:Z) \longmapsto \begin{cases} (X-Z:Y) \\ (-Y:X+Z) \end{cases}$$

est bien défi sur toute la courbe. En effet,

$$(1:0:1) \longmapsto \begin{cases} (0:0) - \text{pas défi} \\ (0:2) = (0:1) \text{ bien défi} \end{cases}$$

Paramétrisation de $\tilde{C}$ est l'inverse de cette isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \tilde{C} \\ (U:V) &\longmapsto (F:G:H) \\ &\qquad = (X:Y:Z) \end{aligned}$$

On a les relations :

$$X^2+Y^2=Z^2 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} (U:V)&=(X-Z:Y) \\ (U:V)&=(-Y:X+Z) \end{aligned}\right\}$$

(parant)

$$\Updownarrow$$

$$UY=V(X-Z) \qquad (2)$$

$$U(X+Z)=-VY \qquad (3)$$

(2) & (3)

$$V^2(X-Z)+U^2(X+Z)=0$$

$$(U^2+V^2)X+(U^2-V^2)Z=0$$

$$x=\frac{X}{Z}=\frac{U^2-V^2}{U^2+V^2} \qquad y=\frac{2UV}{U^2+V^2}$$

Alors

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \tilde{C} \\ (U:V) & \longmapsto & (x:y:1) = (X:Y:Z) \end{array}$$

$$= (U^2 - V^2 : 2UV : U^2 + V^2)$$

est l'inverse de la projection à partir de $(1,0) \in C$ (ou $(1:0:1) \in \tilde{C}$).

Si on met $u = \frac{U}{V}$, on obtient :

$$(x,y) = \left(\frac{u^2-1}{u^2+1}, \frac{2u}{u^2+1}\right).$$

On vérifie que :

$$\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2u}{u^2+1}\right)^2 = \left(\frac{u^2+1}{u^2+1}\right)^2 = 1.$$