Espaces euclidiens et hermitiens

D. Kohel

03/02/2021

Espaces vectoriels euclidiens

Défn. Un espace vectoriel euclidien est un e.v. E sur $\mathbb{R}$ de dimension finie équipé d'une forme bilinéaire

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui est

- symétrique : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
- définie : $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in E$,
- positive : $\langle x, x \rangle \geqslant 0$.

Défn. Une forme $\langle \cdot , \cdot \rangle$ satisfaisant ces propriétés est un produit scalaire.

Défn. La norme euclidienne d'un e.v. euclidien est

$$\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geqslant 0$.

<u>Défn</u>. La <u>distance euclidienne</u> est $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

<u>Rappel</u>. Une <u>norme</u> satisfait

(i) $\|x\| = 0$ ssi $x = 0 \in E$,

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$,

(iii) sous-additivité (ou l'inégalité du triangle):

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Défn

<u>Défn</u>. Une <u>distance</u> $d(x,y) = \|x-y\|$ est une distance ssi $\|\cdot\|$ est une norme (satisfaisant (i)–(iii)).

<u>Rem</u>. Reciproquement on peut définir $\|x\| = d(x,0)$, sur un espace vectoriel.

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$$

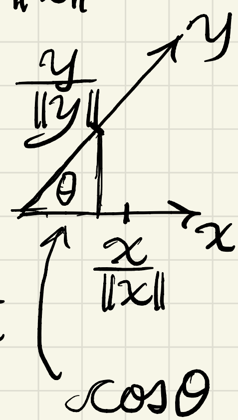
$\forall x,y \in E$, avec égalité ssi x et y sont colinéaire.

Défn On peut définir un angle non orienté par

$$\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Le signe de l'angle dépend d'une orientation.

N.B. $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle$, et $\frac{x}{\|x\|}$ est un vecteur de norme 1.



Théorème (Inégalité de Minkowski)

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \ \forall x,y \in E$$

avec égalité ssi on a colinéarité et $\langle x,y\rangle \geqslant 0$.

<u>Rem.</u> Le théorème affirme qui une norme euclidienne satisfait la sous-additivité (l'inégalité triangulaire), donc elle est une norme.

<u>Identités de polarisation</u>

Soit $E = (E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien avec norme $\| \cdot \|$. On a

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\| \right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)$$

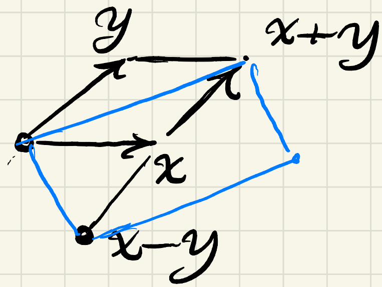
pour tout $x, y \in E$.

<u>Rem.</u> $q(x) = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, donc

- $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est la forme polaire de q.
- $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est déterminée par $\| \cdot \|$, et inversement.

Théorème du parallélogramme (Frechet – von Neumann – Jordan)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$



Rem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

$$2 = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right|.$$

Défn Une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ pour E est dite orthogonale (ou orthonormée) ssi

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème (Projeté orthogonal de Bessel). Soit $F \subseteq E$ un sous e.v. de E avec base orthogonale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r)$. Le projeté orthogonal sur F est donné par

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i \rangle e_i$$

et $\|\pi(x)\|^2 = \sum_i^r \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$

Défn Les coefficients $\langle x, e_i \rangle$ s'appelle le coeffs de Fourier par rapport à $\mathcal{B}$.

Rem (Cor) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une extension de base $\mathcal{B}$ à une base de E. Alors

$$\|\pi(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2.$$

Exemples/Applications

Théorème de Pythagore generalisé

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$
$$= \|x\|^2 + \|y\| + 2\cos(\theta) \|x\| \|y\|$$

où on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ssi x et y sont orthogonaux.

Exemples d'espaces v. euclidiens

- $\mathbb{R}^n$ avec $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$,
  où $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$.
- $\mathbb{R}[x]_n = \mathrm{vect}(1,x,\dots,x^n) = E_n$
  avec produit scalaire
  $$\langle p,q\rangle = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{p(x)q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Une base orthogonale est donnée par les polynômes de Chebyshev :

$$\mathcal{B} = (1, x, -1+2x^2, -3x+4x^3, \dots) = (t_i(x))_i$$

satisfaisant

$$t_0(x)=1,\ t_1(x)=x, \text{ et}$$
$$t_n(x) = -t_{n-2}(x) + 2x\,t_{n-1}(x).$$

Elle est orthonormée si on renormalise 1 à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Application

Théorème (Gram–Schmidt)

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base pour E. Il existe une base unique orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ telle que

- $E_r = \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_r) = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_r)$, $\forall 1 \leq r \leq n$,
- $\langle x_r, e_r \rangle > 0$ $\forall r \geq 1$.

<u>Preuve</u>. On définit $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$, et on pose

- $z_r = x_r - \pi_{E_{r-1}}(x_r) = x_r - y_r$
- $e_r = \frac{z_r}{\|z_r\|}$, pour $1 < r \leq n$. $\square$

Rappels/Remarques

Le projeté $\pi_{E_r} : E \longrightarrow E_r$ est donné par

$$\pi_{E_r}(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i \rangle e_i .$$

e.v. de dim 1.

La decomposition $x_r = y_r + z_r$ est avec $y_r \in E_{r-1}$ et $z_r \in E_{r-1}^{\perp} \cap E_r$.

Application Supplémentaire

Théorème orthogonal.

Pour tout sous-e.v. $F \subseteq E$, on a

$$E = F \oplus F^{\perp} \text{ (somme directe), où}$$

$$F^{\perp} = \{x \in E \mid \langle x, F \rangle = 0\}.$$

Preuve. Soit $\pi = \pi_F : E \longrightarrow F$ le projeté orthogonal. Alors $x = y + z$ où $y = \pi(x)$ et $z = x - y$.

On observe (par rapport à une base orthogonale $(e_1, \dots, e_r)$ de F) que $\langle x, y \rangle = \langle y, y \rangle$, car

$$\langle x, \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i \rangle e_i \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i \rangle^2$$

$$= \langle y, y \rangle.$$

Par conséquent,

$$\underbrace{\langle z, y \rangle = \langle x - y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle}_{= 0.}$$

Somme directe : $\|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = 0$ ssi $y = z = 0$.

Dualité

Défn L'espace vectoriel dual de E est $E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R}) = L(E, \mathbb{R})$.

Par rapport au produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$ (sur E euclidien) on obtient un homomorphisme

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto \langle x, \cdot \rangle = \phi(x). \end{aligned}$$

Comme $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est définie, cet homomorphisme est injective, donc un isomorphisme (E de dimension finie), car

$$\dim_{\mathbb{R}}(E) = \dim_{\mathbb{R}}(E^*).$$

En effet, par rapport à une base $(e_1, \ldots, e_n)$ on a une <u>base duale</u> $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ définie par

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

<u>Rem</u>. Si $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est orthonormée, on a $\phi(e_i)=\langle e_i,\cdot\rangle=e_i^*$.

<u>Endomorphisme adjoint</u>

Soit E un e.v. euclidien

<u>Théorème</u> (Adjoint)

Soit $f\in L(E)=\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme. Il existe $f^*\in L(E)$, l'endo. adjoint, unique tel que

$$\langle f(x),y\rangle=\langle x,f^*(y)\rangle \quad \forall x,y\in E.$$

<u>Défn</u> L'endomorphisme f^* s'appelle l'<u>adjoint</u> de f. On dit que f est :

- <u>orthogonal</u> si $f^*f=ff^*=1_E$,
- <u>symétrique</u> si $f^*=f$,
- <u>anti-symétrique</u> si $f^*=-f$.

<u>Rem</u>. On dit aussi auto-adjoint pour symétrique ($f^* = f$). L'appelation se justifie par une proposition à venir.

<u>Défn</u>. On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux (un groupe), et on note par $S(E)$ et $A(E)$ les ensembles d'endomorphismes symétriques et anti-sym. (des espaces vectoriels, car $(f+g)^* = f^* + g^*$ et $(\lambda f)^* = \lambda f^*$).

On identifie un sousgroupe distingué $SO(E) \subseteq O(E)$ d'endomorphismes de det 1.

On va voir que $\det : O(E) \to \{\pm 1\}$, car $\det(f) = \det(f^*)$.

<u>Proposition</u> Soit $\mathcal{B} \subseteq E$ une base orthonormée, $f \in L(E)$. Alors $M_{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^t$.
En particulier $M_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice symétrique si f est symétrique; et si f est orthogonal $M_{\mathcal{B}}(f)^{-1} = M_{\mathcal{B}}(f)^t$ et $\det(f) = \det(f^*) \in \{\pm 1\}$.

Endomorphismes remarquables

Soit $E = \mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire habituel.

<u>Défn</u>. On note $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq L(\mathbb{R}^n) = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ le groupe de matrices $n \times n$ inversibles. On note $S_n(\mathbb{R}) = S(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques, et

$A_n(\mathbb{R}) = A(\mathbb{R}^n)$ les matrices anti-symetriques. Soit $S_n^{++}(\mathbb{R}) \subseteq S_n(\mathbb{R})$ les matrices symétriques positives définies. ($S_n^{+}(\mathbb{R})$ est reservé pour les matrices sym. positives, pas strictement positives.)

<u>Remarque</u>. Soit E de dim n.

On a : $\dim_{\mathbb{R}}(L(E)) = \dim_{\mathbb{R}}(M_n(\mathbb{R})) = n^2$

$$\dim_{\mathbb{R}}(S(E)) = \dim_{\mathbb{R}}(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\dim_{\mathbb{R}}(A(E)) = \dim_{\mathbb{R}}(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

On peut décomposer les endomorphismes en somme directe :

$$\begin{aligned} L(E) &\longrightarrow S(E) \oplus A(E). \\ f &\longmapsto \left(\frac{f+f^*}{2}, \frac{f-f^*}{2}\right) \end{aligned}$$

Décomposition polaire

On cherche l'analogue de la décomposition des complexes
$z = r e^{i\theta}$, où $z \in \mathbb{C}^* = GL_1(\mathbb{C})$
$r \in \mathbb{R}_+^* = S_1^{++}(\mathbb{R})$
et
$u = e^{i\theta} \in U_1(\mathbb{C}) \quad = \exp(\mathbb{R})$
à définir dans le contexte des espaces hermitiens.

L'analogue pour les matrices, dans le cadre euclidien, est le homéomorphisme :

$$\begin{aligned} S_n^{++}(n) \times O_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (S, Q) &\longmapsto SQ, \end{aligned}$$

qui est en effet un difféo-morphisme.

<u>$n=1$:</u> $S_1^{++}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$, $O_1(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$
$\subseteq \mathbb{R}^* = GL_1(\mathbb{R})$.

<u>$n=2$:</u>

$$S_2^{++}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : \begin{array}{l} ac > b^2 \\ a, c > 0 \end{array} \right\}$$

conditions pour pos. déf.

$$O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right\}$$

$$SO_2(2)$$

$$\cup \; SO_2(2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$SO_2(2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Algorithme</u> (idée)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors AA^t est symétrique définie positive. Il existe donc S telle que

$$S^2 = AA^t.$$

Pourquoi? On écrit $S = (AA^t)^{1/2}$.