Espaces euclidiens II

D. Kohel

04/02/2021

Décomposition polaire

$$\begin{array}{ccc} S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (S, Q) & \longmapsto & SQ \end{array}$$ est un homéomorphisme

Algorithme

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors AA^t est symétrique positive définie. (Thme) Il existe alors une décomposition

$$AA^t = PDP^t \text{ avec } P \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et}$$

$D =$ diagonale pos. définie.

Par conséquent,

$$AA^t = S^2 = (PD^{1/2}P^t)^2 \quad (*)$$

où $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ est unique, en choisissant la racine carré $D^{1/2}$ diagonale positive définie.

Il suit que $S^{-1}(AA^t)S^{-1} = I_n$ en mult. par S^{-1} à gauche et à droite

d'où

$$(S^{-1}A)(S^{-1}A)^t = I_n.$$

donc $Q = S^{-1}A \in O_n(\mathbb{R})$, et $A = SQ$.

Diagonalisation d'une matrice (ou endomorphisme) symétrique

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ pour le produit scalaire habituelle sur $\mathbb{R}^n = E$.

$$\langle Sx, y\rangle = (Sx)^t y = x^t (Sy) = \langle x, Sy\rangle$$

Soit λ et μ deux valeurs propres et $E_\lambda \subseteq E$ et $E_\mu \subseteq E$ les espaces propres associés. On va montrer que $E_\lambda \perp E_\mu$ (pour $\lambda \neq \mu$).

Par conséquent, en choisissant des bases orthonormales pour E_λ et E_μ on obtient une base orthonormale pour $E_\lambda \oplus E_\mu$.

Il suit qu'il existe une matrice orthogonale $O_n(\mathbb{R}) = O(E)$ telle que

<u>Thme</u> $S = PDP^t$, où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est la matrice diag des val. propres.

Cor. Si $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ (ou $S_n^{++}(\mathbb{R})$), il existe $S^{1/2}$ unique dans $S_n^+(\mathbb{R})$.

Preuve. On écrit $S = PDP^t$, et alors $S^{1/2} = PD^{1/2}P^t$ avec $D \in S_n^+(\mathbb{R})$ diagonale. $\square$

Décomposition en valeurs singulières

Par la décomposition polaire et la diagonalisation d'une matrice symétrique on obtient

$$A = PDQ \quad (Q \longleftarrow P^tQ \in O_n(\mathbb{R}))$$

avec $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale.

La SVD (singular value decomp) est une généralisation à

- $A \in M_n(\mathbb{R})$ éventuellement de $\det(A) = 0$.

et encore

- $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $P \in O_m(\mathbb{R})$ et D = zero hors diag $Q \in O_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & \mathbb{R}^m \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^{m-p} = \mathbb{R}^m \arrow[u, "Q"'] \end{tikzcd} \qquad n > m \qquad \operatorname{rang} A = p \leq m$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_p & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Endomorphismes normaux

Défn. Un endomorphisme $f \in L(E)$ est normal si $ff^* = f^*f$.

Exemples Les endos suivants sont normaux :

- orthogonaux ($ff^* = f^*f = id_E$)
- symétriques ($f = f^*$)
- anti-symétriques ($f^* = -f$)

Reduction des endos normaux ⑤

Théorème Soit $f \in L(E)$ normal. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \oplus \rho_1 R(\theta_1) \oplus \cdots \oplus \rho_s R(\theta_s)$$

où $r + 2s = n = \dim(E)$, $\rho_i \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < \theta_i < \pi$, et

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin(\theta) \\ \sin\theta & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}).$$

Preuve. L'idée de la preuve se réduit en plusieurs lemmes et une recurrence en la dimension.

Lemme. Soit $f, g \in L(E)$ avec $fg = gf$. Alors tout sous-espace propre de f est stabilisé par g.

Lemme. Soit $f \in L(E)$ et $F \subseteq E$ stable par f. Alors $F^{\perp}$ est stable par f^*.

<u>Preuve</u> (sans éléments)

$\langle f(F), F^\perp \rangle \subseteq \langle F, F^\perp \rangle = \{0\}$

Or,

$\langle f(F), F^\perp \rangle = \langle F, f^*(F^\perp) \rangle$, donc

$f^*(F^\perp) \subseteq F^\perp$. $\square$

<u>Lemme</u>. Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme normal.
Si $E_\lambda \subseteq E$ est un sous-espace propre, alors $E_\lambda^\perp$ est stabilisé par f.

$F_\lambda = \ker(f-\lambda)^n$ corrigé :

<u>Lemme</u>. Si E_λ est l'espace propre pour un endo normal et la valeur propre λ réel, alors

$$f|_{F_\lambda} = \lambda \, id_{F_\lambda} \quad (\text{donc } E_\lambda = F_\lambda)$$

<u>Remarques</u>. Le polynôme caractéristique de f se décompose en produits (sur $\mathbb{R}$) de polynômes linéaires et quadratiques.

- Par le lemme précédent, on peut diagonaliser $\ker((f-\lambda)^m)$ où $(X-\lambda)^m \| \chi_f(X)$. On en déduit que $\ker((f-\lambda)^m) = k(f-\lambda)$, c.à.d. le polynôme minimal est sans facteur (linéaire) carré.
- Si $(X^2+aX+b)^m \| \chi_f(X)$ on peut montrer pareil que
  $F = \ker((f^2+af+b)^m) = \ker(f^2+af+b)$.

— Pour $x \in F$, le sous-e.v.

$$N = \mathrm{vect}(x, f(x))$$

est un sous-espace vectoriel stabilisé par f.

— On montre que $f|_N$ est une rotation du plan $\times$ un scalaire ρ, c.à.d qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de N telle que

$M_{\mathcal{B}}(f|_N) = \rho R(\theta).$

N.B. La normalisation $\rho > 0$ et $0 < \theta < \pi$ suit de

$$-\rho R(\theta) = \rho R(\theta + \pi)$$

et

$$M_{\{e_1, e_2\}}(f|_N) = \rho R(\theta)$$

Conjugaison par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ssi

$$M_{\{e_2, e_1\}}(f|_N) = \rho R(-\theta) = \rho R(2\pi - \theta).$$

On peut également conjuger par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: $\{e_1, e_2\} \longmapsto \{e_1, -e_2\}$.

Par recurrence en la dimension, on obtient le théorème par application de ces lemmes.

Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant pos. def. ⑨

On se place dans le context

— La forme pos. déf :

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

est un produit scalaire fixé. Donc $E = (E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

— La forme polaire de l'autre est la forme bilinéaire associée à $f \in S(E)$.

On se réduit au problème de réduction (= diagonalisation) d'un endomorphisme symétrique.

Remarque

Il y a une bijection entre f symétrique ($\in S(E)$) et formes bilinéaires symétriques :

Soit donné

$$\begin{aligned} \langle \cdot,\cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \langle x,y \rangle \end{aligned}$$

On associe à f la forme $\langle \cdot,\cdot \rangle_f$ donné par

$$\begin{aligned} \langle x,y \rangle_f := \langle f(x), y \rangle &= \langle x, f^*(y) \rangle \\ &= \langle x, f(y) \rangle \\ &= \langle f(y), x \rangle =: \langle y,x \rangle_f, \end{aligned}$$

donc elle est bien symétrique.

En forme matricielle

$E = \mathbb{R}^n$, $S \in S_n(\mathbb{R}) = S(E)$, E équipé de $\langle x,y \rangle = x^t y$ (produit matricielle de vecteurs colonnes)

Alors on définit

$\langle x,y \rangle_S = \langle Sx, y \rangle$.

On a donc

$$\langle x,y\rangle_S = \langle Sx,y\rangle = (Sx)^t y$$
$$= x^t(Sy) \quad (S=S^t)$$
$$= \langle x, Sy\rangle$$
$$= \langle Sy, x\rangle = \langle y,x\rangle_S.$$

Ex. $\mathbb{R}^2$, avec

$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2.$

$S=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1\end{pmatrix}$ donne

$$\langle x,y\rangle_S = x_1y_1 + \frac{1}{2}(x_2y_1+x_1y_2)+x_2y_2$$

La forme quadratique associée est $Q_S(x) := \langle x,x\rangle_S = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

Trouver une base orthonormée pour diagonaliser Q_S.

On veut trouver $P\in O_2(\mathbb{R})$ telle que $PSP^t = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$.

Product mixte : $E = \mathbb{R}^n$

Soit $v_1, \dots, v_n \in E$, $v_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$, dans ~~la~~ une base orthogonale de E. Alors le **produit mixte** de $(v_1, \dots, v_n)$ est $[v_1, \dots, v_n] = \det((x_{ij}))$.

Lemme. Le produit mixte est indépendent de la base orthonormée $\mathcal{B}$ (orientée ou à signe près).

Preuve. Soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées. Posons $Q \in O_n(\mathbb{R})$ la matrice orthorgonale de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors

$$Q \underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{\mathcal{B}} = \underbrace{(u_1, \dots, u_n)}_{\mathcal{B}'}$$

Par conséquent

$$[v_1, \dots, v_n] = \overbrace{\det(Q)}^{= \pm 1} [u_1, \dots, u_n].$$

Remarque. Le produit mixte est le volume du parallèlotope engendré par $(v_1, \dots, v_n)$.

Orientation. Une orientation est donné (par rapport à une base) par le signe du produit mixte d'une autre base. L'orientation est la classe d'équivalence des base donné par le produit mixte.

Ex $[v_2, v_1, v_3, \dots, v_n] = -[v_1, \dots, v_n]$

Multiplication par -1 change l'orientation ssi $\dim(E)$ est impair.

Produit vectoriel

Soit E un espace euclidien orienté, de dimension 3.
Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ une base orthonormée (donnant l'orientation sur E).

Défn Le produit vectoriel de (u, v) est le vecteur unique w tel que :

- $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$
- $[u, v, w] \in \mathbb{R}_+^* [u_1, u_2, u_3]$
- $\|w\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$
  $= \|u\|^2 \|v\|^2 (\sin \theta)^2.$

On le note $w = u \wedge v$. ($= u \times v$ en anglais)