Espaces euclidiens III

D. Kohel

09/02/2021

Décomposition d'un endomorphisme orthogonal en produit de réflexions

Symétries

Défn Soit $u \in E$ euclidien. La symétrie orthogonale par rapport à u est l'application linéaire

$$s_u : E \longrightarrow E$$
$$v \longmapsto \frac{2\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle} u - v$$

- s_u est un endomorphisme orthogonal : (i) $s_u^* = s_u$ (symétrique) et (ii) $s_u^2 = id_E$.

(i) $\langle s_u(v), w\rangle = \frac{2\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}\langle u,w\rangle - \langle v,w\rangle$

$= \langle v, s_u(w)\rangle$, donc

$s_u = s_u^*$.

(ii) $s_u^2 = id_E$ est clair

Par conséquent $s_u^2 = s_u s_u^* = s_u^* s_u = id_E$.

Propriétés de s_u :

$s_u(u) = u$ et $\ker(s_u - id_E) = \mathrm{vect}(u)$, et $\ker(s_u + id_E) = u^\perp$.

Défn. Soit $F \subseteq E$. La symétrie orthogonale par rapport à F est l'application :

$$\begin{aligned} s_F : E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto 2\pi_F(v) - v. \end{aligned}$$

En particulier, $s_F^2 = id_E$, et
$\ker(s_F - id_E) = F$ et
$\ker(s_F + id_E) = F^\perp$.

N.B. On voit que $s_F = \pi_F - \pi_{F^\perp}$.

Défn Une symétrie de E est un endomorphisme satisfaisant $s^2 = id_E$. La symétrie est orthogonale ssi $\ker(s-1) \perp \ker(s+1)$.

Defn. Une réflexion r_H est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H. Si $H = u^\perp$, pour $u \in E$, alors $r_H = -s_u$.

Théorème. Soit E un e.v. euclid. Les réflexions engendre $O(E)$.

Remarque. Ce résultat est l'analogue du résultat que le groupe symétrique S_n est engendré par les transpositions. En effet c'est plus qu'une analogie, car

$$S_n \longrightarrow O_n(\mathbb{R})$$

où l'image de σ est la matrice dont les colonnes $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$, une matrice de permutation.

<u>Preuve</u>. On peut démontrer ce resultat par recurrence dans la dimension n.
Pour $n=1$, le resultat est vrai, car $O(E)=\{\pm id_E\}$, et $-id_E$ est une réflexion (la seule).
On suppose que le résultat est vrai pour en dim $\leq n-1$.
Soit $f\in O(E)$. Si $F=\ker(f-id_E)\neq 0$, on a une décomposition $F\oplus F^\perp$ tel que $f=f|_F\oplus f|_{F^\perp}$, car f stabilise F et $F^\perp$.
Comme $f|_F=id_F$, une décomposition de $f|_{F^\perp}$ en réflexions donne une decomposition de f.
On suppose qu'il existe $v\in E$ tel que $f(v)\neq v$.

On pose $u = v - f(v)$, et ④
$H = u^\perp$. La reflexion satisfait

$$r_H(u) = f(v) - v = -u.$$

On note $v + f(v) \in H = u^\perp$, car

$$\begin{aligned}\langle v+f(v), v-f(v)\rangle &= \langle v,v\rangle - \langle v, f(v)\rangle + \langle f(v), v\rangle \\ &\quad - \langle f(v), f(v)\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

parce que

- $\langle v, f(v)\rangle = \langle f(v), v\rangle$ par symétrie du produit scalaire
- $\langle f(v), f(v)\rangle = \langle v, f^* f(v)\rangle$
  $= \langle v, v\rangle$.

Rappel:

<u>Lemme</u> Si $f \in O(E)$, alors $\langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$ pour tout $v_1, v_2 \in E$.

On a donc ⑤

$$r_H(v - f(v)) = -v + f(v), \text{ et}$$
$$r_H(v + f(v)) = v + f(v)$$

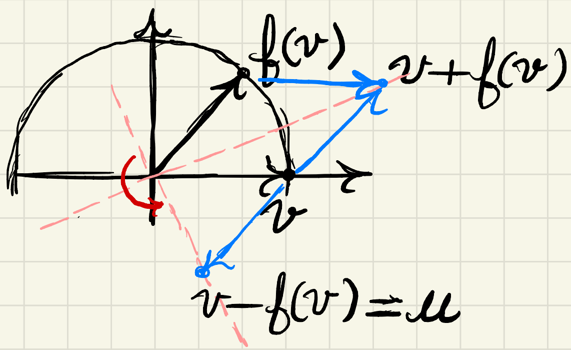
Donc, comme r_H est linéaire,

$$r_H(v) = f(v) \text{ et } r_H(f(v)) = v.$$

Par conséquent v est fixé par

$$r_H \circ f,$$

donc on a une décomposition de $(r_H \circ f)|_{v^\perp}$ en produit de réflexions. Il suit que f admet une telle décomposition.



<u>Remarque</u> Par la classification des endomorphismes normaux, $f = id_F \oplus -id_G \oplus (\rho(\theta_1) \oplus \cdots \oplus \rho(\theta_s))$ dans une base orthonormée, donnant $E = F \oplus G \oplus (P_1 \oplus \cdots \oplus P_s)$,

où $F = \ker(f - id_E)$,

$G = \ker(f + id_E)$,

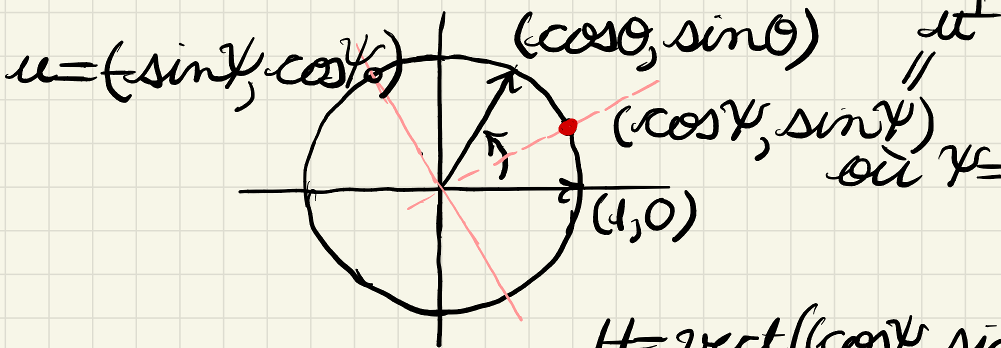
et $\dim_{\mathbb{R}} P_1 = \cdots = \dim_{\mathbb{R}} P_s = 2$.

N.B. Les seules valeurs propres d'un endo orthorgonal sont ± 1.

On a vu le role de $F = \ker(f - id_E)$ dans la preuve. G est aussi évident (qu'on peut exprimer $-id_G$ comme produit de réflexions). Il reste à comprendre les rotations $\rho(\theta)$ sur un plan euclidien P.

Ex. Soit $P = \mathbb{R}^2$, et

$$\rho(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$



où $\psi = \dfrac{\theta}{2}$.

$H = \text{vect}((\cos\psi, \sin\psi))$
$= (-\sin\psi, \cos\psi)^\perp$

$$\rho(\theta)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$r_H = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos^2\psi - \sin\psi^2 & 2\cos\psi\sin\psi \\ 2\cos\psi\sin\psi & -\cos^2\psi + \sin^2\psi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}; \quad \det r_H = -1.$$

On a alors :

$$r_H \circ \rho(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$ donnant $\rho(\theta)$ en produit de deux réflexions.

En effet
$$\rho(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Classification des éléments de $O_2(\mathbb{R})$

$$1,-1,\ \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\rho(\theta)\ \Big]\ SO_2(\mathbb{R})=O_2^+(\mathbb{R})$$

en effet
$$1=\rho(0) \text{ et } -1=\rho(\pi).$$

N.B. Aucune matrice de $SO_2(\mathbb{R})\setminus\{\pm 1\}$ est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$).

$O_2^-(\mathbb{R})=\det^{-1}(-1)$: réflexions avec valeurs propres 1 et -1 :
$$r(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

avec $r(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ et $r(\pi)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

N.B. Toute matrice de $O_2^-(\mathbb{R})$ est diagonalisable, toute matrice de $O_2^-(\mathbb{R})$ est conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ par un élément de $O_2^+(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R})$.

On note que

$$O_2^-(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} SO_2(\mathbb{R})$$
$$= SO_2(\mathbb{R})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{etc.}$$

- $SO_2(\mathbb{R})$ est distingué dans $O_2(\mathbb{R})$
- $SO_2(\mathbb{R})$ est topologiquement le composant connexe de $1 = I_2$.

<u>Classification des éléments de $O_3(\mathbb{R})$</u>

- Matrices diagonalisable (tous les 3 valeurs propres sont réelles, dans $\{\pm 1\}$)

$$A \sim \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \pm 1 & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Si toutes les valeurs propres sont 1 (ou -1), on a $A = I_3$ (ou $A = -I_3$).

Sinon :

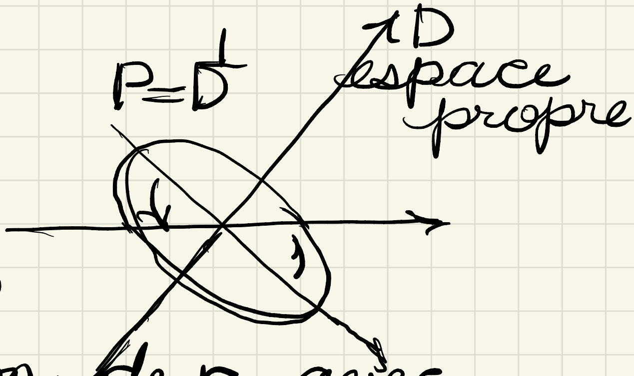
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$\in SO_3(\mathbb{R})$ $\qquad \in O_3(\mathbb{R})$

- Si toutes les valeurs propres ne sont pas réelles, il existe une valeur propre réelle $\in \{\pm 1\}$, et

$$A \sim \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & \boxed{\rho(\theta)} \end{pmatrix}.$$

L'espace $E = D \oplus P$, où $\dim D = 1$ et $P = D^{\perp}$.



Si la valeur propre réele est -1, A est la composition de r_P avec une rotation dans P.