Espaces hermitiens

D. Kohel

09/02/2021

Espaces hermitiens et groupes unitaires

Les espaces hermitiens sont les espaces vectoriels complexes analogues aux espaces euclidiens. Les matrices unitaires (que forment un groupe) généralisent les matrices orthogonales, respectant le produit scalaire hermitien. L'espace hermitien canonique est $\mathbb{C}^n$, équipé du produit scalaire hermitien

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Formes sesquilinéaires

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie.

②

Défn On dit qu'une application $\varphi : E\times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une <u>forme sesquilinéaire</u> si

- φ est $\mathbb{R}$-bilinéaire, et
- $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y)$,
- $\varphi(x, \lambda y) = \bar{\lambda}\varphi(x,y)$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ et $x, y \in E$.

N.B. sesqui $= 1 + 1/2$

$= \begin{cases} \text{pleinement } \mathbb{C}\text{-lin en } x, \text{ et} \\ \text{semi-linéaire en } y \end{cases}$

Défn

Une forme sesqui-linéaire est <u>hermitienne</u> si $\varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)}$ pour tout $x, y \in E$.

En particulier $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$ si φ est hermitienne. On note que la matrice de φ dans $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$

$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))$

est conjuguée à sa transposée :

$M_{\mathcal{B}}(\varphi)^t = \overline{M_{\mathcal{B}}(\varphi)}$.

<u>Défn</u>. Une forme hermitienne est <u>définie</u> si $\varphi(x,x) \neq 0$ quand $x \neq 0$ et <u>positive</u> si $\varphi(x,x) \geqslant 0$.

<u>Espace hermitien</u>

<u>Défn</u> Un espace vectoriel complexe E, muni d'une forme hermitienne positive définie $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ s'appelle un <u>espace hermitien</u>.

<u>Défn</u>. Soit E un espace hermitien. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux ssi $\langle x, y \rangle = 0$.

<u>Théorème de Pythagore</u>. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ssi $\langle x, y \rangle = 0$

<u>L'inegalité de Bessel</u> Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée.

$\|\pi(x)\|^2 = \sum |\langle x, e_i \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$

où $\pi(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i \rangle e_i$ est le projeté sur $\mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_r)$.

<u>L'inégalité de Cauchy-Scharz</u> :
$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$.

<u>L'inégalité de Minkowski</u> :
$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$.

On peut également produire une base orthonormée par l'algorithme de Gram-Schmidt.

<u>Défn</u> Le supplementaire orthogonal de $F\subseteq E$ est $F^{\perp}=\{x\in E : \langle x,F\rangle=\{0\}\}$.

Comme pour les espaces euclidiens, $F\oplus F^{\perp}=E$ est une décomposition en somme directe.

<u>Endomorphismes hermitiens</u>

<u>Défn</u>. L'adjoint de $f\in L(E)$ est l'endomorphisme $f^*\in L(E)$ tel que $\langle f(x),y\rangle=\langle x,f^*(y)\rangle$.

On en déduit de la défn que $M_{\mathcal{B}}(f^*)=\overline{M_{\mathcal{B}}(f)}^t$.

__Défn__ Un endo $f \in L(E)$ est hermitien si $f = f^*$ (analogue de symétrique). On en déduit que $\langle x, f^*(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$ est une forme hermitienne.

__Lemme__ Si $F \subseteq E$ est stabilisé par $f \in L(E)$ hermitien, alors $F^\perp$ est stabilisé par f.

__Lemme__ Si $f \in L(E)$ est hermitien alors les valeurs propres de f sont réelles.

__Lemme__. Un endomorphisme est diagonalisable par une base orthonormée.

__Défn__ On note $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A^t = A\}$ les matrices hermitiennes et $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ des matrices positives définies.

On a alors

$$\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$$

un homéomorphisme.

<u>Indication</u>. On écrit $A = P D \overline{P}^t$, pour P = matrice de passage pour une base orthonormée, donc $P\overline{P}^t = I_n$. On a alors

$$\exp(A) = P \exp(D) \overline{P}^t,$$

car $A^n = (PD\overline{P}^t)^n = P D^n \overline{P}^t$.