Espaces hermitiens

D. Kohel

11/02/2021

Endomorphismes normaux

<u>Défn</u>. Un endomorphisme $f \in L(E)$ est <u>normal</u> si $ff^* = f^*f$. En particulier les endomorphismes suivants sont normaux :

- <u>hermitiens</u> ($f = f^*$),
- <u>unitaires</u> ($ff^* = f^*f = id_E$),
- <u>anti-hermitiens</u> ($f = -f^*$).

<u>Lemme</u>. Les valeurs propres de $f \in L(E)$ sont

- <u>réelles</u> si f est hermitien,
- <u>de module 1</u> si f est unitaire,
- <u>imaginaire pures</u> si f est anti-hermitien.

<u>Théorème</u> Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée diagonalisant f.

Lemme Si $f \in L(E)$ est unitaire, alors $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. ②

Preuve Directement: ①

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, f^* f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

pour tout $x, y \in E$.

② (Comme corollaire...)

Il existe une base orthonormée diagonalisant f, dont les valeurs propres sont de module 1. Si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, dans cette base, alors

$$f(x) = \lambda_1 x_1 e_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Il suit que

$$\|x\|^2 = \sum x_i \bar{x}_i = \sum |x_i|^2$$
$$= \sum |\lambda_i|^2 |x_i|^2 = \|f(x)\|^2.$$

Il suffit de montrer que la forme quadratique hermitienne $q(x) = \|x\|^2$

sa forme polaire. $\square$

<u>Forme polaire d'une forme quadratique hermitienne</u>

Soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique hermitienne donnée par

$$q(x) = \varphi(x,x),$$

où $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme hermitienne.

On a donc (exercice):

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\varphi(x,y)) &= (q(x+y) - q(x) - q(y))/2 \\ &= (q(x+y) - q(x-y))/4, \text{ et} \\ \mathrm{Im}(\varphi(x,y)) &= (q(x+iy) - q(x) - q(y))/2 \\ &= (q(x+iy) - q(x-iy))/4. \end{aligned}$$

Il suit que q détermine sa <u>forme polaire</u> φ.

On peut donc enoncer:

Théorème. Une forme quadratique hermitienne q est associée à une unique forme hermitienne φ.

Remarque. Il suit que la norme hermitienne $\|\cdot\|$ détermine également la forme polaire hermitienne φ.

Ex. $E = \mathbb{C}$, $q(z) = q(x+iy)$
$$= z\bar{z} = x^2 + y^2.$$

On a donc :

$$\mathrm{Re}(\varphi(z,w)) = \left((z+w)(\bar{z}+\bar{w}) - z\bar{z} - w\bar{w}\right)/2$$
$$= (z\bar{w} + \bar{z}w)/2$$

Si $z = x+iy$, $w = u+iv$,
$$= xu + yv, \text{ et}$$

$$\mathrm{Im}(\varphi(z,w)) = \left((z+iw)(\bar{z}-i\bar{w}) - z\bar{z} - w\bar{w}\right)/2$$
$$= -xv + yu.$$

Groupes de matrices et endomorphismes unitaires

Défn. On note par $\mathcal{U}(n)$ ou $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ le groupe de matrices unitaires :

$$\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : AA^t = I_n\},$$

et par

$$S\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) = S\mathcal{U}(n) = \det^{-1}(1),$$

le sous-groupe de matrices de déterminant 1.

Remarque. $O_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et

$$\det : \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{U}_1(\mathbb{C}) = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : |\lambda| = 1\}$$

et

$$\det : O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow O_1(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}.$$

On a $S\mathcal{U}_1(\mathbb{C}) = SO_1(\mathbb{R}) = \{1\}$, et il y a une homéomorphisme

$$SO_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{U}_1(\mathbb{C})$$

$$\rho(\theta) \longmapsto e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Décomposition polaire

L'application

$$\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \times \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$
$$(H, \mathcal{U}) \longmapsto H\mathcal{U}$$

est surjective et un homéomorphisme.

<u>Remarque</u>. On peut montrer que $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est compacte.

Pour $n=1$, il s'agit de la décomposition $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, où $r \in \mathbb{R}_+^* = \mathcal{H}_1^{++}(\mathbb{C}) = \exp(\mathbb{R})$, $e^{i\theta} \in \mathcal{U}(1) = S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$, $\mathbb{R} = \mathcal{H}_1(\mathbb{C})$

et où $\mathbb{C}^* = GL_1(\mathbb{C})$.

Pour $n=2$, on a

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

$$\mathcal{H}_2^{++}(\mathbb{C}) = \left\{ P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \overline{P}^t : P \in SU(2) ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

$$\mathcal{U}(2) = \mathcal{U}(1) \cdot SU(2) = SU(2) \cdot \mathcal{U}(1).$$

N.B. On a alors

$$\det : GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$$
$$HU \longmapsto \det(H)\det(U)$$
$$\det(H) = \lambda_1\lambda_2, \quad \det(U) = (e^{i\theta})^2$$

où

$$H = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}\overline{P}^t,$$

$$U = e^{i\theta}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix} \in U(1)\cdot SU(2).$$

En général on a

$$\det : \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}_1^{++}(\mathbb{C}) = \mathbb{R}_+^*$$
$$P\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\overline{P}^t \longmapsto \lambda_1\cdots\lambda_n$$
$$\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\det : U(1)\cdot SU(n) = U(n) \longrightarrow U(1)$$
$$e^{i\theta}A \longmapsto e^{in\theta}$$

où le déterminant stabilise la décomposition polaire

$$\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \times U(n) \longrightarrow \mathcal{H}_1^{++}(\mathbb{C}) \times U(1).$$