Espaces euclidiens

1. Soit E un espace euclidien de dimension finie n, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal tel que son polynôme caracteristique est $\chi_f(T) = P(T)^m$, où $P(T) \in \mathbb{R}[T]$ est irreducible. On note que $P(T)$ est de degré 1 ou 2.

a. Montrer que le polynôme minimal de f est $p(T)$.

b. Si $\deg(P) = 1$, montrer que f est diagonalisable.

c. Si $\deg(P) = 2$, montrer que E est une somme directe d'espaces de dimension 2 stabilisés par f.

2. Soit E un espace euclidien et $u \in E\backslash\{0\}$. On pose $s_u(v) = v - \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} u$.

Montrer que s_u est un endomorphisme orthogonal et calculer

$$\ker(s_u + 1_E), \operatorname{im}(s_u - 1_E), \ker(s_u - 1_E), \text{ et } \operatorname{im}(s_u + 1_E).$$

Décrire alors s_u géométriquement.

3. On rappel la décomposition polaire : $S_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

a. Donner une description explicite de $S_2^{++}(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

c. Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n^{+}(\mathbb{R})$ est une bijection, et également

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_n^{-}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n^{-}(\mathbb{R}),$$

où $\mathrm{SO}_n^{\pm}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^{\pm}(\mathbb{R})$ sont les sous-ensembles de matrices de déterminant positif $(+)$ ou negatif $(-)$.

d. Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n^{-}(\mathbb{R})$, alors A a une valeur propre réelle.

e. Montrer que toute matrice $A \in \mathrm{GL}_2^{-}(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

4. Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{4-t^2}}dt, \text{ où } \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2}\frac{t^{2n}}{\sqrt{4-t^2}}dt = \binom{2n}{n}.$$

a. Montrer que $\mathrm{vect}(1, x^2, \dots, x^{2m})$ est orthogonal à $\mathrm{vect}(x, x^3, \dots, x^{2m+1})$.

b. Utiliser l'algorithme de Gram–Schmidt pour déterminer une base orthonormale $(P_0, P_1, \dots, P_5)$ pour $\mathbb{R}_5[x]$, à partir de la base $(1, x, \dots, x^5)$.

Soit E un espace euclidien. On rappel que la symétrie s_F par rapport à F est l'endomorphisme orthogonal défini par $\ker(s_F - 1) = F$ et $\ker(s_F + 1) = F^\perp$. Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan $H = \mathrm{vect}(u)^\perp$.

5. Soit F et G des sous-espaces d'un espace euclidien E avec $F \subset G$. Soit s_F et s_G les symétries orthogonales par rapport à F et G, respectivement. Montrer que $s = s_F \circ s_G$ est une symétrie orthogonal et déterminer les espaces $\ker(s - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(s + \mathrm{id}_E)$.

6. Déterminer des conditions pour lesquelles deux symétries s_F et s_G commutent.

7. Soient E un espace euclidien, $f \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par f. Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par f.

8. Soient $f \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par f. Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par f.

9. Soient $f \in SO(E)$. Si $\dim(E)$ est impair, montrer que 1 est valeur propre de f. Montrer que si $g \in SO^-(E)$, alors -1 est valeur propre de g.

10. Soit $f \in O(E)$. On pose $F = \ker(f - \mathrm{id}_E)$ et $r = \dim(F^\perp) = n - \dim(F)$. Montrer que f peut être décomposé en produit d'au plus r réflexions, et inversement si f est produit de t réflexions, montrer que $r \leq t$.

11. Soit $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^t = -A^2$.

- **a.** Montrer que A est dans $O_3(\mathbb{R})$, et déterminer son déterminant et ses valeurs propres réelles.
- **b.** Pour une valeur propre λ, montrer que l'image de $A - \lambda I_3$ est un plan P dans $\mathbb{R}^3$, stabilisé par A, et décrire la matrice de l'action de A sur P dans une base orthonormée.
- **c.** Soit A la matrice
$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \\ 7 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$
et déterminer ses espaces caracteristiques.