Sommes des puissances des entiers

L'histoire raconte que le maître du jeune écolier Gauss, agacé de son comportement, lui donne l'exercice de calculer la somme de tous les entiers de 1 à 100. Après une minute, la réponse lui vient en forme d'une parabole,

> *Dans l'avenir lointain, un savant dénommé Schrödinger, contruit une boîte remarquable, dont l'intérieur, une fois fermée, est isolée de l'univers connu. Il demande à son chat de file à l'intérieur. Le chat, méfiant, demande «Quelle est la probabilité que je sors vivant de cette boîte ?»*

Le jeune Gauss soulève la main en donnant la réponse : 5050.

Sommes partielles

Loin de déviner la réponse par un moyenne mystique, le jeune Gauss de l'histoire a réconnu l'identité :

$$\sum_{m=1}^{n} m = \frac{n(n+1)}{2}$$

en sommant les termes des couples $(m+1, n-m)$ de la suite :

$$1, 2, \ldots, m+1, \ldots, n-m, \ldots, n-1, n.$$

On définit plus généralement les sommes partielles

$$S_r(n) = \sum_{m=1}^{n} m^r,$$

et on pose la question de l'existence d'une expression pour cette somme. Dans la suite on va établir le lemme suivant.

Lemme. *La somme $S_r(n)$ est l'évaluation en n d'un polynôme $S_r(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de degré $r+1$, de la forme*

$$S_r(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + \frac{1}{2}x^r + O(x^{r-1}).$$

On a déjà vu que $S_1(n) = n(n+1)/2$, et on va déterminer les valeurs de $S_2(n)$ et $S_3(n)$. En particulier, on pourra établir l'égalité $S_3(n) = S_1(n)^2$.

Méthode limite réelle

Si $S_r(n) = \displaystyle\sum_{m=0}^{r+1} c_m n^m$, on peut déterminer le coefficient dominant c_{r+1} par la limite :

$$c_{r+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_r(n)}{n^{r+1}}$$

en ensuite les coefficients $c_r, \ldots, c_1, c_0$ par

$$c_{r-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_r(n) - \sum_{m=r+1-k}^{r+1} c_m n^m}{n^{r-k}}.$$

Exemple. On va calculer ces limites afin de déterminer $S_3(n)$ avec Sage. Avant de commencer, on définit une fonction pour le calcul de $S_r(n)$.

```
def S(r,n):
    return sum([ m^r for m in range(1,n+1) ])
```

D'abord on calcule la limite pour c_4,

```
I = [ 2^k for k in range(9,16) ]
for n in I:
    1.0*S(3,n)/n^4
```

```
0.250977516174316
0.250488519668579
0.250244200229645
0.250122085213661
0.250061038881540
0.250030518509448
0.250015259021893
```

et on devine que $c_4 = 1/4$.

Ensuite on calcule la limite pour c_3 :

```
I = [ 2^k for k in range(9,16) ]
for n in I:
    1.0*(S(3,n) - n^4/4)/n^3
```

```
0.500488281250000
0.500244140625000
0.500122070312500
0.500061035156250
0.500030517578125
0.500015258789062
0.500007629394531
```

ce qui permet de deviner que $c_3 = 1/2$.

Alliant plus loin, on trouve $c_2 = 1/2$ et $c_1 = c_0 = 0$, d'où $S_3(n) = n^2(n+1)^2/4$.

On note que le résultat satisfait la relation $S_3(n) = S_1(n)^2$ et que le coefficient dominant est bien $1/(r+1) = 1/4$, en accord avec le lemme précédent.

Algorithme par intérpolation

L'évaluation des polynômes en $a \in \mathbb{Q}$ induit un homomorphisme

$$\mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[x]/(x-a)$$

avec noyau l'idéal $(x-a)$. Pour détermination du polynôme $S_r(x)$, de degré $d = r+1$, on restreint à la sous-espace vectoriel des aux polynômes dans la base $\{1, x, x^2, \ldots, x^d\}$. On obtient donc un isomorphisme, donné par évaluation au points $\{0, 1, \dots, d\}$:

$$\mathbb{Q}^{d+1} \cong \bigoplus_{m=0}^{d} \mathbb{Q}\, x^m \longrightarrow \bigoplus_{n=0}^{d} \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x-n)} \cong \mathbb{Q}^{d+1}$$

La matrice de transformation est donné par $A = (n^m)$ pour $0 \leq m, n \leq d$. Pour un polynôme $f(x) = \sum_{m=0}^{d} c_m x^m$ de degré d, on obtient son image par la transformation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & d & \dots & d^d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(d) \end{bmatrix}$$

Il suffit d'invertir A pour recupérer les coefficients $(c_0, c_1, \dots, c_d)$ dans la base $\{1, x, \dots, x^d\}$.

Remarque. On peut observer que l'isomorphisme est donné par le théorème chinois :

$$\frac{\mathbb{Q}[x]}{\left(\prod_{n=0}^{d}(x-n)\right)} \longrightarrow \bigoplus_{n=0}^{d} \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x-n)}.$$

Le principe de l'interpolation est de reconstruir une fonction polynôme (à gauche) à partir de ces valuers (à droite). Ici on a développé la transformation linéaire associée au homomorphisme d'évaluation, afin de déterminer son inverse. Une autre méthode pour le calcul de l'inverse est l'interpolation de Lagrange. On pourra en effet montrer que ces méthodes sont équivalentes.

Exemple. On suppose que $r = 1$. La matrice A de l'évaluation en $(0, 1, 2)$, et son inverse, sont

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Les évaluation de $S_1(n)$ donne $(S_1(0), S_1(1), S_1(2)) = (0, 1, 3)$.

$$A^{-1} \begin{bmatrix} S_1(0) \\ S_1(1) \\ S_1(3) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

On récupère alors le polynôme $S_1(n) = 0 + n/2 + n^2/2 = n(n+1)/2$.

Formule de récurrence

Proposition. *Les sommes des puissances $S_r(n)$ satisfaient les récurrences*

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{r+1}{k} S_k(n) = (n+1)^{r+1} - 1.$$

Preuve. En ajoutant $S_{r+1}(n)$ aux deux côtés, l'identité est équivalente à l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} S_k(n) = \sum_{m=1}^{n} (m+1)^{r+1}.$$

L'égalité suit en changeant l'ordre de sommation. □

On en déduit l'expression récursive pour $S_r(n)$:

$$(r+1)S_r(n) = (n+1)^{r+1} - 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r+1}{k} S_k(n),$$

et par conséquent que $S_r(n)$ est l'évaluation en n d'un polynôme $S_r(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de degré $r+1$ avec coefficient dominant $1/(r+1)$. On peut également établir que le coefficient de x^r est $1/2$, comme affirmé dans la lemme ci-dessus, et que $(r+1)!S_r(x)$ est dans $\mathbb{Z}[x]$.

Exemple. À partir de $S_0(n) = n$ et $S_1(n) = n(n+1)/2$, la récurrence pour $S_r(n)$ permet de calculer

$$S_2(n) = \frac{1}{3}\big((n+1)^3 - 1 - 3S_1(n) - S_0(n)\big) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Suggestions et pistes de réflexion

Les pistes de réflexion suivaantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en oeuvre.

— On pourra compléter les preuves ou assertions du texte.

— On pourra motiver le terme dominant de $S_r(n)$ dans le lemme par les inégalités provenant de l'interprétation de $S_r(n)$ comme somme de Riemann :

$$\int_{x=0}^{n} x^r dx = \frac{n^{r+1}}{r+1} \le \sum_{m=1}^{n} m^r \le \int_{x=1}^{n+1} x^r dx = \frac{(n+1)^{r+1} - 1}{r+1} \in \frac{n^{r+1}}{r+1} + n^r + O(n^{r-1}).$$

On note également l'approximation

$$\sum_{m=1}^{n} m^r = \int_{x=0}^{n} (x+1/2)^r dx + O(n^{r-1}),$$

ce qui donne le lemme.

— On pourra illustrer à l'aide de l'ordinateur les calculs des valeurs de $S_r(n)$, avec analyse de la complexité du calcul dans la taille de donnés r et n.

— En particulier, on pourra reporter la présentation du lemme, en élaborant la section **Méthodes limite réelle** avec des calculs explicites, pour motiver la conjecture du lemme par une approche par computation.

— On pourra détailler un des algorithmes pour le calcul du polynôme $S_r(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

— On pourra élaborer le lien entre l'interpolation de Lagrange et la méthode d'interpolation par une transformation matricielle.

— On pourra détailler un des algorithmes pour le calcul du polynôme $S_r(x) \in \mathbb{Q}[x]$.