Université Aix-Marseille — 2018-2019

Master Mathématiques appliquées et statistiques — 2ème année

Représentation parcimonieuse des signaux

Correction du Test

mardi 27 novembre 2018

durée 1 heure

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés.
Il est conseillé de lire en entier l'énoncé avant de commencer.
Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

A lire attentivement : le sujet est composé de deux exercices dont un au choix parmi deux. Le premier exercice est obligatoire mais vous choisissez entre l'exercice 2 et l'exercice 3 (ou alors si il vous reste du temps personne bien sûr ne vous empêche de faire les deux !).

Notations

On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^M$ tel que $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=0}^{M-1} x_n \overline{y_n}$ pour $x = (x_i)_{i=0,\dots M-1} \in \mathbb{C}^M$ et $y = (y_i)_{i=0,\dots M-1} \in \mathbb{C}^M$. On note $|x|_2^2 = \sum\limits_{n=0}^{M-1} |x_n|^2$ pour $x \in \mathbb{C}^M$.

Attention la norme euclidienne sera notée $|.|_2$ quel que soit l'espace du type $\mathbb{C}^M$ dans lequel on travaille.

1 Exercice obligatoire

Exercice 1

1. Soit K et N deux entiers supérieurs ou égaux à deux. On note $\mathcal{E}_{KN} = \{e^\ell \in \mathbb{C}^{KN}, 0 \leq \ell \leq KN-1\}$ la famille de vecteurs tels que pour $0 \leq \ell \leq KN-1$ et pour $n \in \{0, \dots KN-1\}$ la n-ième coordonnée du vecteur e^ℓ s'écrive

$$e_n^\ell = e^{\frac{2i\pi \ell n}{KN}}$$

Montrer que $\mathcal{E}_{KN}$ est une base orthogonale de $\mathbb{C}^{KN}$.

Correction

On a clairement $e^\ell \neq 0$ quel que soit ℓ. De plus $\mathcal{E}_{KN}$ comporte KN vecteurs dans un espace de dimension KN. Donc pour montrer que $\mathcal{E}_{KN}$ est une base orthogonale, il suffit de montrer que tous ses vecteurs sont orthogonaux. Calculons donc $\langle e^k, e^\ell\rangle$ pour $k \neq \ell$.

$$\begin{aligned} \langle e^k, e^\ell \rangle &= \sum_{n=0}^{KN-1} e^{\frac{2i\pi \ell n}{KN}} \overline{e^{\frac{2i\pi kn}{KN}}} = \sum_{n=0}^{KN-1} e^{\frac{2i\pi \ell n}{KN}} e^{-\frac{2i\pi kn}{KN}} \\ &= \sum_{n=0}^{KN-1} e^{\frac{2i\pi(\ell-k)n}{KN}} = \sum_{n=0}^{KN-1} \left(e^{\frac{2i\pi(\ell-k)}{KN}}\right)^n \end{aligned}$$

On reconnait les KN premiers termes d'une suite géométrique de raison $r = e^{\frac{2i\pi(\ell-k)}{KN}}$. On rappelle qu'on a pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} r^n = \begin{cases} n_0 & \text{si } r=1 \\ \frac{1-r^{n_0}}{1-r} & \text{si } r \neq 1 \end{cases}$$

Ici $r = e^{\frac{2i\pi(\ell-k)}{KN}}$ et $k \neq \ell$ avec $0 \leq k \leq KN-1$ et $0 \leq \ell \leq KN-1$. On a donc $r \neq 1$.

Voir annexe pour une démonstration précise qui n'était pas exigée.

Donc $\langle e^k, e^\ell \rangle = \frac{1-r^{KN}}{1-r}$. Or $r^{KN} = \left(e^{\frac{2i\pi(\ell-k)}{KN}}\right)^{KN} = e^{2i\pi(\ell-k)} = 1$. Donc $\langle e^k, e^\ell \rangle = 0$ pour $\ell \neq k$.

Donc le système de vecteurs $\mathcal{E}_{KN}$ est un système orthogonal de KN vecteurs de $\mathbb{C}^{KN}$. C'est donc une base de $\mathbb{C}^{KN}$.

2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{C}^{KN}$ on a

$$|y|_2^2 = \frac{1}{KN} \sum_{\ell=0}^{KN-1} |\langle y, e^\ell \rangle|^2$$

Correction

La base $\mathcal{E}_{KN}$ est orthogonale et on a aussi

$$\begin{aligned} \langle e^k, e^\ell \rangle &= \sum_{n=0}^{KN-1} e^{\frac{2i\pi \ell n}{KN}} \overline{e^{\frac{2i\pi \ell n}{KN}}} = \sum_{n=0}^{KN-1} e^{\frac{2i\pi \ell n}{KN}} e^{-\frac{2i\pi \ell n}{KN}} \\ &= \sum_{n=0}^{KN-1} e^{\frac{2i\pi(\ell-\ell)n}{KN}} = \sum_{n=0}^{KN-1} 1 = KN \end{aligned}$$

Donc le système de vecteurs $\left\{\widetilde{e^\ell} = \frac{1}{\sqrt{KN}} e^\ell, \ell = 0, \ldots, KN-1\right\}$ est orthonormé, et forme donc une base orthonormée de $\mathbb{C}^{KN}$.

Pour tout $y \in \mathbb{C}^{KN}$ on a donc la relation de Pythagore

$$|y|_2^2 = \sum_{\ell=0}^{KN-1} |\langle y, \widetilde{e^\ell} \rangle|^2$$

Voir annexe si vous voulez retravailler la démonstration, ce qui est indispensable si vous ne savez pas !

On a donc

$$\begin{aligned}
|y|_2^2 &= \sum_{\ell=0}^{KN-1} |\langle y, \widetilde{e^\ell}\rangle|^2 \\
&= \sum_{\ell=0}^{KN-1} |\langle y, \frac{1}{\sqrt{KN}} e^\ell\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{KN}^2} \sum_{\ell=0}^{KN-1} |\langle y, e^\ell\rangle|^2 = \frac{1}{KN} \sum_{\ell=0}^{KN-1} |\langle y, e^\ell\rangle|^2
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On considère maintenant dans $\mathbb{C}^N$ la famille de vecteurs $\Phi = \{\phi^k \in \mathbb{C}^N, 0 \leq k \leq KN-1\}$ tels que pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\phi_n^k = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2i\pi kn}{KN}}.$$

En d'autres termes ϕ^k est proportionnel à un vecteur obtenu à partir de e^k en ne gardant que ses N premières coordonnées.
Calculer la norme de ϕ^k. Est ce que Φ forme une base de $\mathbb{C}^N$? Est-ce que Φ forme un dictionnaire de $\mathbb{C}^N$?

Correction

On a

$$\begin{aligned}
\langle \phi^k, \phi^k\rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2i\pi kn}{KN}} \frac{1}{\sqrt{N}} \overline{e^{\frac{2i\pi kn}{KN}}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}^2} e^{\frac{2i\pi kn}{KN}} e^{-\frac{2i\pi kn}{KN}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi(k-k)n}{KN}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1 = \frac{1}{N} N = 1
\end{aligned}$$

Le système de vecteurs Φ comprend KN vecteurs distincts dans un espace de dimension N, il ne peut donc pas former une base.

D'autre part remarquons que l'on peut compléter tout vecteur de $\mathbb{C}^N$ noté x par des zéros pour en faire un vecteur de $\mathbb{C}^{KN}$ que l'on note y. On a alors d'après ce qui précède

$$y = \sum_{k=0}^{KN-1} \langle y, \widetilde{e^k} \rangle \widetilde{e^k} = \frac{1}{KN} \sum_{k=0}^{KN-1} \langle y, e^k \rangle e^k = \frac{1}{K\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{KN-1} \langle y, e^k \rangle \frac{e^k}{\sqrt{N}}$$

Voir démonstration en annexe si vous ne savez pas écrire la première égalité.

En ne considérant que les N premières coordonnées de cette relation on obtient

$$x = \sum_{k=0}^{KN-1} \left(\frac{1}{K\sqrt{N}} \langle y, e^k \rangle \right) \phi^k$$

On voit donc que Φ forme un système générateur. Or vu que les vecteurs $\phi^k, k = 0, \ldots, N-1$ sont tous de norme 1, Φ forme donc un dictionnaire.

4. Soit $x \in \mathbb{C}^N$. Montrer que

$$|x|_2^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{KN-1} |\langle x, \phi^k \rangle|^2 \tag{1}$$

Correction

De nouveau on complète x par des zéros pour obtenir un vecteur y qui est dans $\mathbb{C}^{KN}$. On a alors

$$|y|_2^2 = \sum_{n=0}^{KN-1} |y_n|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = |x|_2^2$$

vu que toutes les coordonnées y_n de y pour $n > N$ sont nulles et que les N premières valent chacune x_n.

D'autre part on a de même

$$\langle y, e^k \rangle = \sum_{n=0}^{KN-1} y_n \overline{e_n^k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \overline{e_n^k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sqrt{N}\ \overline{\phi_n^k} = \sqrt{N} \langle x, \phi^k \rangle$$

Donc d'après la question 2 de l'exercice, on a

$$\begin{aligned} |x|_2^2 &= |y|_2^2 = \frac{1}{KN} \sum_{k=0}^{KN-1} |\langle y, e^k \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{KN} \sum_{k=0}^{KN-1} |\sqrt{N} \langle x, \phi^k \rangle|^2 = \frac{N}{KN} \sum_{k=0}^{KN-1} |\langle x, \phi^k \rangle|^2 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2 Un exercice à prendre au choix parmi les deux

Exercice 2 [Suite de l'exercice 1, au choix avec l'exercice 3]
On pourra bien sûr utiliser les résultats obtenus dans l'exercice 1.

1. On note D la matrice à N lignes et KN colonnes dont les colonnes sont composées des vecteurs ϕ^k, $0 \leq k \leq KN-1$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^N$.

   On note D^* la matrice à KN lignes et N colonnes dont les lignes sont les vecteurs $\overline{\phi^k} = (\overline{\phi^k_n})_{0 \leq n \leq N-1}$.

   Calculer $\langle DD^*x, x\rangle$ en fonction de $\sum_{k=0}^{KN-1} |\langle x, \phi^k\rangle|^2$.

   Correction

   Remarquons (cf TP sur le Matching Pursuit, et autrement faites le calcul par vous-même) que pour $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{KN-1} \end{pmatrix}$ *on a* $D\alpha = \sum_{k=0}^{KN-1} \alpha_k \phi^k$.

   D'autre part $D^*x = \begin{pmatrix} \langle x, \phi^0\rangle \\ \vdots \\ \langle x, \phi^{KN-1}\rangle \end{pmatrix}$ *(de même faites le calcul par vous-même).*

   Donc $DD^*x = \sum_{k=0}^{KN-1} \langle x, \phi^k\rangle \phi^k$.

   Ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle DD^*x, x\rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{KN-1} \langle x, \phi^k\rangle \phi^k, x \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{KN-1} \langle x, \phi^k\rangle \langle \phi^k, x\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{KN-1} \langle x, \phi^k\rangle \overline{\langle x, \phi^k\rangle} = \sum_{k=0}^{KN-1} |\langle x, \phi^k\rangle|^2 \end{aligned}$$

2. Montrer que DD^* est inversible.

Correction

DD^* est une matrice carrée. Donc elle est inversible si et seulement si son noyau est réduit à zéro.

Soit x tel que $DD^*x = 0$. On a alors d'après ce qui précède

$$\langle DD^*x, x\rangle = 0 = \sum_{k=0}^{KN-1} |\langle x, \phi^k\rangle|^2$$

et d'après la dernière question de l'exercice 1

$$\langle DD^*x, x\rangle = 0 = \sum_{k=0}^{KN-1} |\langle x, \phi^k\rangle|^2 = K|x|_2^2$$

Donc $|x|_2^2 = 0$ et donc $x = 0$. Donc la matrice DD^* est inversible.

3. Soit $R = (DD^*)^{-1}$ et $\widetilde{\phi^k} = R\phi^k$ pour tout $0 \leq k \leq KN-1$. Montrer que tout $x \in \mathbb{C}^N$ peut s'écrire

$$x = \sum_{k=0}^{KN-1} \langle x, \phi^k \rangle \widetilde{\phi^k}$$

Correction

Soit $x \in \mathbb{C}^N$.

On pose $z = DD^*x = \sum_{k=0}^{KN-1} \langle x, \phi^k \rangle \phi^k$. Donc par linéarité de $R = (DD^*)^{-1}$

$$\begin{aligned} x &= (DD^*)^{-1}(z) = Rz = \sum_{k=0}^{KN-1} \langle x, \phi^k \rangle R(\phi^k) \\ &= \sum_{k=0}^{KN-1} \langle x, \phi^k \rangle \widetilde{\phi^k} \end{aligned}$$

Un dictionnaire D qui vérifie une propriété du type (1) est appelé repère ou encore trame. En anglais on dit « frame ».

Exercice 3 [Au choix avec l'exercice 2] Soit $\mathcal{B} = \{g^k, k = 0, \ldots, N-1\}$ une base orthonormée de $\mathbb{C}^N$ et $x \in \mathbb{C}^N$.

On ordonne les coefficients $(\langle x, g^k \rangle)_{k=0,\ldots N-1}$ par ordre décroissant, c'est à dire qu'on reindexe les coefficients en $\{k_0, \ldots, k_{N-1}\} = \{0, \ldots, N-1\}$ tels que pour tout $m = 0, \ldots, N-2$

$$|\langle x, g^{k_{m+1}} \rangle| \leq |\langle x, g^{k_m} \rangle|$$

1. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $\alpha > \frac{1}{2}$ telle que pour tout $m \neq 0$

$$|\langle x, g^{k_m} \rangle| \leq \frac{C}{m^\alpha}$$

On considère maintenant l'approximation de x comprenant les M plus gros coefficients non nuls

$$x_M = \sum_{m=0}^{M-1} \langle x, g^{k_m} \rangle g^{k_m}$$

Donner une majoration en fonction de α, de M et d'une constante A de $|x - x_M|_2$.

Remarque : On pourra utiliser sans démonstration le résultat du Td qui donne une majoration de $\sum_{k>K} \frac{1}{k^\alpha}$ en fonction de K et α.

Correction

On a $x = \sum_{m=0}^{N-1} \langle x, g^{k_m} \rangle g^{k_m}$ *vu que* $\mathcal{B}$ *forme une base orthonormée.*

Donc $x - x_M = \sum_{m=M}^{N-1} \langle x, g^{k_m} \rangle g^{k_m}$. *D'autre part vu que les vecteurs* $\{g^{k_m}, m = M, \dots N-1\}$ *forme un système orthonormé on a par Pythagore (cf Annexe si nécessaire)*

$$|x - x_M|_2^2 = \sum_{m=M}^{N-1} |\langle x, g^{k_m} \rangle|^2$$

On a ainsi d'après l'hypothèse

$$|x - x_M|_2^2 \leq \sum_{m=M}^{N-1} \frac{C}{m^{2\alpha}} \tag{2}$$

$2\alpha > 1$ *donc la série de Riemann* $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{2\alpha}}$ *converge et on sait (cf cours-TD 2) qu'il existe* $C' > 0$ *(en réalité* $C' = \frac{1}{2\alpha-1}$*) tel que pour tout* $M \geq 1$ $\sum_{m=M}^{+\infty} \frac{1}{m^{2\alpha}} \leq \frac{C'}{M^{2\alpha-1}}$.

Donc d'après (2) on a

$$|x - x_M|_2^2 \leq \frac{CC'}{M^{2\alpha-1}}$$

Ce qui donne avec $D = \sqrt{CC'}$

$$|x - x_M|_2 \leq \frac{D}{M^{\alpha-1/2}} \tag{3}$$

2. On considère l'agorithme du Matching-Pursuit le dictionnaire $\mathcal{D} = \mathcal{B}$. On rappelle que l'algorithme fonctionne de la façon suivante. Soit $x \in \mathbb{C}^N$.
   (a) Initialisation : $m := 0$, $R^0(x) = x$.
   (b) Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$
      i. Choix du meilleur vecteur $k_m = \arg\max_k |\langle R^m(x), g^k \rangle|$
      ii. Mise à jour du « résidu » $R^{m+1}(x) = R^m(x) - \langle R^m(x), g^{k_m} \rangle g^{k_m}$

   Montrer que l'algorithme de Matching-Pursuit converge en N itérations et indiquer quel est à chaque étape m le vecteur du dictionnaire choisi ainsi que la valeur du résidu.

Correction

Notre hypothèse de récurrence est qu'à l'étape $n \leq N-2$ *l'algorithme choisit le vecteur* g^{k_n} *et le résidu est alors* $R^{n+1}(x) = \sum_{m=n+1}^{N-1} \langle x, g^{k_m} \rangle g^{k_m}$.

Considérons le cas $n = 0$. *Le vecteur du dictionnaire qui est choisi est exacte-*

ment g^{k_0} puisque c'est celui qui donne le plus gros produit scalaire $|\langle x, g^{k_0}\rangle|$.
Le résidu est alors calculé comme $R^1(x) = x - \langle x, g^{k_0}\rangle g^{k_0} = \sum_{m=0}^{N-1}\langle x, g^{k_m}\rangle g^{k_m} - \langle x, g^{k_0}\rangle g^{k_0} = \sum_{m=1}^{N-1}\langle x, g^{k_m}\rangle g^{k_m}$.

Supposons qu'à l'étape n on ait $R^n(x) = \sum_{m=n}^{N-1}\langle x, g^{k_m}\rangle g^{k_m}$.

Alors $\langle R^n(x), g^{k_{m'}}\rangle = 0$ si m' n'est pas compris entre n et $N-1$.

Sinon vu l'orthogonalité de la base $\mathcal{B}$ on a

$$\begin{aligned}
\langle R^n(x), g^{k_{m'}}\rangle &= \left\langle \sum_{m=n}^{N-1}\langle x, g^{k_m}\rangle g^{k_m}, g^{k_{m'}}\right\rangle \\
&= \sum_{m=n}^{N-1}\langle x, g^{k_m}\rangle\langle g^{k_m}, g^{k_{m'}}\rangle \\
&= \langle x, g^{k_{m'}}\rangle
\end{aligned}$$

vu que $\langle g^{k_m}, g^{k_{m'}}\rangle = 0$ si $m \neq m'$ et 1 sinon.

Or le vecteur de la base qui donne le plus gros produit scalaire est g^{k_n} et on a donc

$$\begin{aligned}
R^{n+1}(x) &= R^n(x) - \langle R^n(x), g^{k_n}\rangle g^{k_n} \\
&= R^n(x) - \langle x, g^{k_n}\rangle g^{k_n} = \sum_{m=n}^{N-1}\langle x, g^{k_m}\rangle g^{k_m} - \langle x, g^{k_n}\rangle g^{k_n} \\
&= \sum_{m=n+1}^{N-1}\langle x, g^{k_m}\rangle g^{k_m}
\end{aligned}$$

C'est ce qu'on voulait démontrer. On voit alors qu'à la dernière étape on va choisir le vecteur $g^{k_{N-1}}$ et le résidu $R^N(x)$ vaut alors 0. L'algorithme a donc convergé en N itérations.

3 Annexe

1. **Démonstration du fait que $r = e^{\frac{2i\pi(\ell-k)}{KN}}$ et $k \neq \ell$ avec $0 \leq k \leq KN-1$ et $0 \leq \ell \leq KN-1$ alors $r \neq 1$.**

   En effet

$$\begin{aligned}
-KN+1 &\leq \ell - k \leq KN-1 \\
\frac{-2\pi(KN-1)}{KN} &\leq \frac{2\pi(\ell-k)}{KN} \leq \frac{2\pi(KN-1)}{KN} \\
-2\pi < \frac{-2\pi(KN-1)}{KN} &\leq \frac{2\pi(\ell-k)}{KN} \leq \frac{2\pi(KN-1)}{KN} < 2\pi
\end{aligned}$$

La seule possibilité pour avoir $r = 1$ est donc pour $\ell = k$ ce qui donne $r = e^0 = 1$.

Donc comme $\ell \neq k$ on a nécessairement $r \neq 1$

2. **Démonstration du fait que si $\mathcal{B} = \{b_0, \dots b_{M-1}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^M$ alors pour tout $y \in \mathbb{C}^M$ $y = \sum_{j=0}^{M-1} \langle y, b_j \rangle b_j$.**

   En effet vu que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^M$ on peut écrire en particulier pour tout $y \in \mathbb{C}^M$

   $$y = \sum_{j=0}^{M-1} \alpha_j b_j \tag{4}$$

   où $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

   Montrons que $\alpha_i = \langle y, b_i \rangle$ pour tout $i = 0, \dots M-1$. En effet

   $$\begin{aligned} \langle y, b_i \rangle &= \langle \sum_{j=0}^{M-1} \alpha_j b_j, b_i \rangle \\ &= \sum_{j=0}^{M-1} \alpha_j \langle b_j, b_i \rangle \end{aligned}$$

   Or vu que $\mathcal{B}$ est orthonormée on a $\langle b_j, b_i \rangle = 0$ si $i \neq j$ et 1 sinon. Donc dans toute la somme du membre de droite seul le terme $\alpha_i \langle b_i, b_i \rangle = \alpha_i$ est éventuellement non nul. Ce qui donne donc

   $$\langle y, b_i \rangle = \alpha_i$$

   Et donc on a d'après (4)

   $$y = \sum_{j=0}^{M-1} \langle y, b_j \rangle b_j \tag{5}$$

3. **Démonstration du fait que si $\mathcal{B} = \{b_0, \dots b_{M-1}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^M$ alors pour tout $y \in \mathbb{C}^M$ $|y|_2^2 = \sum_{j=0}^{M-1} |\langle y, b_j \rangle|^2$.**

   D'après (5) on a

   $$\begin{aligned} |y|_2^2 &= \langle y, y \rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{M-1} \langle y, b_j \rangle b_j, \sum_{k=0}^{M-1} \langle y, b_k \rangle b_k \right\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{M-1} \langle y, b_j \rangle \left\langle b_j, \sum_{k=0}^{M-1} \langle y, b_k \rangle b_k \right\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} \langle y, b_j \rangle \overline{\langle y, b_k \rangle} \langle b_j, b_k \rangle \end{aligned}$$

Or vu que $\mathcal{B}$ est orthonormée on a $\langle b_j, b_k\rangle = 0$ si $k \neq j$ et 1 sinon. Donc dans la double somme du membre de droite seuls les termes pour $k = j$ sont éventuellement non nuls

$$|y|_2^2 = \sum_{j=0}^{M-1} \langle y, b_j\rangle \overline{\langle y, b_j\rangle} \langle b_j, b_j\rangle = \sum_{j=0}^{M-1} |\langle y, b_j\rangle|^2$$

C'est ce qu'on appelle souvent la relation de Pythagore.