| | |
|---|---|
| Université Aix-Marseille | 2017-2018 |
| Master Mathématiques et applications | 1ère année |

**Traitement du signal**

Devoir à la maison.

- La notation $\mathbb{1}_A$ indique que $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.
- Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, c'est à dire $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < +\infty$ on note $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$ et $\hat{f}$ est sa transformée de Fourier au sens $L^2(\mathbb{R})$.
- Si deux fonctions $f$ et $g$ dans $L^2(\mathbb{R})$ on note

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt$$

- On rappelle l'identité de Plancherel pour toutes fonctions $f$ et $g$ dans $L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

- Enfin on rappelle que si on a une base hilbertienne $\{\phi, i \in \mathbb{Z}\}$ d'un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, \|.\|_2)$ (on note encore $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire sur $\mathcal{H}$) alors
  - pour tout $f \in \mathcal{H}$
  $$\|f\|_2^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_i \rangle|^2 \quad (1)$$
  - et donc pour tout $f \in \mathcal{H}$ et $g \in \mathcal{H}$
  $$\langle f, g \rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_i \rangle \overline{\langle g, \phi_i \rangle} \quad (2)$$

L'objectif de ce devoir est de montrer que

si on a une fonction $g$ de $L^2(\mathbb{R})$ telle que $\{g_{m,n} : x \mapsto g(x-n)e^{2i\pi mx}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ alors nécessairement

- soit $\int_{\mathbb{R}} t^2 |g(t)|^2 dt = \infty$
- soit $\int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega = \infty$.

Autrement dit la fonction $g$ ne peut pas être bien « localisée » à la fois en fréquence et en temps.

# 1 Base de fonctions de Hermite

On s'intéresse dans cette première partie à la famille de fonctions $\Psi = \{x \mapsto \psi_n(x) = c_n(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, n \in \mathbb{N}\}$ où $c_n$ est une constante positive qui dépend de $n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = P_n(x) e^{-x^2}$ avec $P_n$ un polynôme de degré $n$.
2. Montrer que $\Psi$ est une famille de fonctions orthogonales de $L^2(\mathbb{R})$ et calculer $\{c_n, n \in \mathbb{N}\}$ pour qu'elle soit orthonormale.
3. Montrer que $\psi_n$ vérifie l'équation différentielle
$$\psi_n' = x\psi_n(x) - \frac{c_n}{c_{n+1}} \psi_{n+1}(x) \quad (3)$$
pour tout $x$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer par récurrence que $\widehat{\psi_n}(\omega) = \sqrt{2\pi}(-i)^n \psi_n(\omega)$.

   *Autrement dit la famille $\Psi$ forme une famille de vecteurs propres orthonormés de $\mathcal{F}$ : $f \mapsto \hat{f}$.*

*On admet pour toute la suite et on pourra utiliser le théorème suivant.*

**Théorème 1**

*Avec les notations qui précèdent*

- *La famille $\Psi$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$*
- *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $F : x \mapsto xf$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ et telle que $\tilde{F} : \omega \mapsto \omega\hat{f}(\omega)$ est aussi dans $L^2(\mathbb{R})$.*

  *Alors avec $f_N = \sum_{k=0}^{N} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k$ on a*
- $\|xf_N - F\| \to 0$ *quand* $N \to +\infty$
- $\|\omega\widehat{f_N} - \tilde{F}\| \to 0$ *quand* $N \to +\infty$.

# 2 Principe de Heisenberg

Nous commencerons par démontrer l'inégalité qu'on appelle « principe de Heisenberg » et qui dit la chose suivante

**Théorème 2**

*Soit $f$ une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ avec $f \neq 0$ et à valeurs réelles.*
*On pose $\mu_f = \frac{1}{\|f\|_2^2}\int_{\mathbb{R}} t|f(t)|^2 dt$ et $\mu_{\hat{f}} = \frac{1}{\|\hat{f}\|_2^2}\int_{\mathbb{R}} \omega|\hat{f}(\omega)|^2 dt$.*

*On pose aussi $\sigma_f^2 = \frac{1}{\|f\|_2^2}\int_{\mathbb{R}}(t-\mu_f)^2|f(t)|^2 dt$ et $\sigma_{\hat{f}}^2 = \frac{1}{\|\hat{f}\|_2^2}\int_{\mathbb{R}}(\omega-\mu_{\hat{f}})^2|\hat{f}(\omega)|^2 dt$.*

*Alors*

$$\sigma_f \sigma_{\hat{f}} \geq \frac{1}{2} \tag{4}$$

*avec égalité si et seulement si $f(t) = ae^{ibt}e^{-(t-c)^2/(2d^2)}$*

Autrement dit un signal continu et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être simultanément bien localisés.

Étant donné les hypothèses du théorème nous travaillerons avec des fonctions $f$ à valeurs réelles.

Nous allons d'abord supposer que la fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est en fait $C^\infty$, que toutes ses dérivées et elle-même vérifient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $C_{n,k} > 0$ telle que $|f^{(k)}(x)| \leq \frac{C_{n,k}}{(1+|x|)^n}$. On dit que $f$ est une fonction $C^\infty$ à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées, et elle appartient en fait à l'espace de Schwartz noté $\mathcal{S}$. Nous généraliserons ensuite le résultat.

*L'espace fonctionnel $\mathcal{S}$ est l'espace des fonctions $f$ telles que*

- *$f$ est $C^\infty$.*
- *toutes ses dérivées et $f$ vérifient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $C_{n,k} > 0$ telle que $|f^{(k)}(x)| \leq \frac{C_{n,k}}{(1+|x|)^n}$.*

1. Donner un exemple d'une fonction de l'espace $\mathcal{S}$.
2. Montrer que toute fonction $f$ de l'espace $\mathcal{S}$ vérifie que sa dérivée est dans $L^2(\mathbb{R})$ et que $F : x \mapsto xf(x)$ est aussi dans $L^2(\mathbb{R})$.
3. Montrer que toute fonction de $\mathcal{S}$ vérifie l'égalité

$$\langle F, (-if') \rangle = -i\langle f, f \rangle + \langle (-if'), F \rangle \tag{5}$$

   *On note $\tilde{F} : \omega \mapsto \omega\hat{f}(\omega)$*

4. Montrer que si $f$ est dans $\mathcal{S}$ alors $\tilde{F} \in L^2(\mathbb{R})$.
5. En utilisant (5) montrer que pour tout $f \in \mathcal{S}$ on a

$$\|F\|_2\|\tilde{F}\|_2 \geq \frac{1}{2}\|f\|_2\|\hat{f}\|_2$$

6. En utilisant éventuellement $g(t) = e^{-i\phi t} f(t + t_0)$, montrer que $f$ vérifie (4).
7. On prend maintenant $f(t) = ae^{ibt} e^{-(t-c)^2/(2d^2)}$. Montrer que (4) est une égalité.
8. On revient au cas général où $f$ est dans $L^2(\mathbb{R})$. Montrer le théorème 2.

## 3 Théorème de Baylan-Low

L'objectif est maintenant de démontrer le théorème de Baylan-Low qui dit la chose suivante.

**Théorème 3**

*Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\{g_{m,n} : x \mapsto g(x-n)e^{2i\pi mx}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.*
*Alors soit $\int_{\mathbb{R}} t^2 |g(t)|^2 dt = +\infty$ soit $\int_{\mathbb{R}} \omega^2 |g(\omega)|^2 d\omega = +\infty$*

1. Donner une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\{g_{m,n} : x \mapsto g(x-n)e^{2i\pi mx}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Calculer $\int_{\mathbb{R}} t^2 |g(t)|^2 dt$ et $\int_{\mathbb{R}} \omega^2 |g(\omega)|^2 d\omega$.

   *Commençons à partir de maintenant la démonstration du théorème. Soit $g$ une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ telle que $\{g_{m,n} : x \mapsto g(x-n)e^{2i\pi mx}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.*

   Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $G : x \mapsto xg(x)$ et $\tilde{G} : \omega \mapsto \omega\hat{g}(\omega)$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$, et allons d'abord regarder le cas où $g$ est dans l'espace de Schwartz.

2. On suppose dans ce qui suit que $g$ est dans l'espace de Schwartz.
   (a) Calculer la transformée de Fourier de $g_{m,n}$ à $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$ fixés.
   (b) Montrer que $\langle G, g_{m,n} \rangle = \langle g_{-m,-n}, G \rangle$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.
   (c) Montrer que $\langle -ig', g_{m,n} \rangle = \langle g_{-m,-n}, -ig' \rangle$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.
   (d) En déduire que $\langle -ig', G \rangle = \langle G, -ig' \rangle$.

   *On pourra penser à utiliser (2).*

   (e) Montrer qu'on a une contradiction à l'aide de l'équation (5).
   (f) On revient au cas général et on raisonne par l'absurde en supposant que $x \mapsto xf(x)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ ainsi que $\omega \mapsto \omega\hat{f}(\omega)$. En utilisant la base de Hermite $\Psi$ montrer que (5) conduit encore à une contradiction.