Année universitaire 2017/2018

Site : ☐ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet de : ☐ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☒ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h

Examen de : L2 Nom du diplôme : Licence MIASH

Code du module : SMH201 Libellé du module : Probabilités continues

Calculatrices autorisées : OUI Documents autorisés : OUI, une feuille A4 recto verso

---

Exercice 1.

Parmi les fonctions suivantes lesquelles sont des densités de probabilités ? Justifiez à chaque fois votre réponse.

1. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1-x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 11, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 2.

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Trouver la fonction de répartition de la variable $W = 2X$ et en déduire sa densité de probabilité.
2. Trouver la fonction de répartition de la variable $Y = e^X$ et en déduire sa densité de probabilité.

Exercice 3.

On considère un couple de variables aléatoires continues (X,Y) dont la densité jointe est donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, \text{ si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer les densités marginales de X et de Y.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elle indépendantes ?

   On pourra utiliser dans ce qui suit le fait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y}{(1+y)^2} dy = +\infty$
3. Calculer la covariance de X et de Y et montrer qu'elle n'a pas une valeur finie.

Exercice 4.

Soit (X,Y) un vecteur gaussien $\mathcal{N}_2(\mu,\Sigma)$ avec

$$\mu = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la loi de la variable $X + Y$.
2. Donner la loi jointe des variables $U = 3X + Y$ et $V = X - 3Y$. Sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.

Exercice 5.

Un étudiant subit trois contrôles dans une année scolaire. On suppose que pour $i = 1,2,3$ les variables aléatoires Y_i « note au i-ème contrôle » suivent une loi normale d'espérance m et de variance σ^2 et qu'elles sont indépendantes.

On suppose de plus que $\mathbb{P}(Y_i \geqslant 10) = 0.305$ et que $\mathbb{P}(Y_i \leqslant 16) = 0.994$.

1. Calculer m et σ.
2. Soit Z la variable aléatoire correspondant à la meilleure des 3 notes Y_1,Y_2,Y_3. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(Z \geqslant 10)$.