QUELQUES INDICATIONS POUR LA FICHE D'EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
INTÉGRATION ET INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Notations et définitions

— $\mathbf{1}_A$ indique que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon avec A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

— Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a,b[$. On note $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. On dit que $\int_a^b f(x)dx$ existe si $\lim\limits_{x\to b} F(x)$ existe et on a $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{x\to b} F(x) - F(a)$.

Intégration : intégration par parties et changement de variables

Exercice 1. Intégrations par partie

$$I_1 = 1 - 2e^{-1} \qquad I_2 = \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{7}{9} \qquad I_3 = \frac{\sin(3)}{3} + \frac{1}{9}(\cos(3) - 1)$$

$$I_4 = 2\sqrt{2}\ln(2) + 4 - 4\sqrt{2} \qquad I_5 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2} \qquad I_6 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

Exercice 2. Deux intégrations par parties

$$\int_0^1 e^x \cos(x)dx = \frac{e\cos(1) - 1 + e\sin(1)}{2}$$

Exercice 3. Changement de variables

$$I_1 = \frac{2}{9}(2^{3/2} - 1) \qquad I_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_3 = e - 1 - \ln(1+e) + \ln(2) \qquad I_4 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Exercice 4.

$$\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}dx = 0$$

Intégrales généralisées

Exercice 5.

Déterminer la nature des intégrales suivantes et lorsqu'elles convergent les calculer

$I_1 = -1$	$I_2 = 2$	I_3 diverge
I_4 diverge	I_5 diverge	I_6 diverge
$I_7 = 1$	I_8 diverge	$I_9 = 3\frac{\pi^2}{32}$
I_{10} diverge	I_{11} diverge	I_{12} diverge
I_{13} diverge	$I_{14} = 1$	

Exercice 6.

On montre qu'on a une intégrale convergente à l'aide d'une intégration par partie où on intègre f et on dérive $\frac{1}{t}$