Université Aix-Marseille 2017-2018
Master Mathématiques et applications 1ère année

Traitement du signal

TD2 : Bases hilbertiennes et applications.

— La notation $\mathbb{1}_A$ indique que $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.
— Soit f une fonction de $L^2([0,T])$ c'est à dire telle que $\int_0^T |f(t)|^2 dt < +\infty$.

On note
$$\| f \|_2 = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

Dans tout ce qui suit
— pour $n \in \mathbb{Z}$ on pose $c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i2\pi n\frac{t}{T}}dt$. C'est ce qu'on appelle le coefficient de Fourier d'ordre n de f.
— pour $N \in \mathbb{N}$ on pose, $S_N(f) : t \mapsto S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{i2\pi n\frac{t}{T}}$. Il s'agit de la série de Fourier d'ordre N de f.
— on note pour g également dans $L^2([0,T])$: $< f, g >= \int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt$ et $< f, f >=\| f \|^2$.
— on note enfin pour $n \in \mathbb{Z}$, $e_n : t \mapsto e_n(t) = \frac{e^{i2\pi n\frac{t}{T}}}{\sqrt{T}}$.

1 Séries de Fourier

Exercice 1 (*Théorie L^2 des séries de Fourier*)

Soit f une fonction de $L^2([0,T])$.

1. Calculer $c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i2\pi n\frac{t}{T}}dt$ en fonction de $< f, e_n >$.
2. Montrer l'"égalité de Parseval"
$$\| f \|_2^2 = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 \tag{1}$$
et que
$$\| f - S_N(f) \|_2^2 = T \sum_{|n|\geq N} |c_n(f)|^2 \tag{2}$$
avec (rappel des notations ci-dessus) $S_N(f) : t \mapsto S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{i2\pi n\frac{t}{T}}$

Exercice 2 (*Application du théorème de Parseval*)

1. On suppose que f est une fonction continue T périodique. Montrer que f est une fonction de $L^2([0,T])$.
2. Montrer que si f est une fonction de $L^2([0,T])$, et $c_n(f) = 0$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$ alors $f = 0$.
3. En déduire que si f et g sont deux fonctions de $L^2([0,T])$ telles que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ alors $f = g$.

Exercice 3 (*Approximation par $S_N(f)$*)

Dans cet exercice on souhaite évaluer l'erreur qu'on commet quand on remplace une fonction par sa série de Fourier d'ordre N.

1. On considère le signal périodique f de période T défini sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ par

$$f(t) = 1 - 2\frac{|t|}{T}$$

   (a) Tracer f
   (b) Calculer ses coefficients de Fourier $c_n(f)$.
   (c) Montrer que $S_N(f)$ converge vers f dans $L^2_p([0,T])$ et majorer l'erreur d'approximation $\| f - S_N(f) \|_2$ en fonction de N.

2. On considère maintenant le signal périodique de période T telle que pour $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$

$$f(t) = \mathbb{1}_{[-T/4,T/4]}(t)$$

   (a) Tracer f
   (b) Calculer ses coefficients de Fourier $c_n(f)$.
   (c) Montrer que $S_N(f)$ converge vers f dans $L^2_p([0,T])$ et majorer l'erreur d'approximation $\| f - S_N(f) \|_2$ en fonction de N.
   (d) Comparer avec le résultat obtenu dans la question 1c. Auriez-vous une explication pour comprendre la différence de vitesse de convergence ? ?

2 Bases hilbertiennes

Exercice 4 (*Base de cosinus*)

Cet exercice est dédié à la décomposition de signaux à temps continu et de durée finie sur une famille de cosinus. Il sâagit d'un outil fondamental, dont la version temps discret introduite en 1974, est à la base de méthodes de compressions de donnéees (signaux, images, . . .) et en particulier de la norme JPEG.

On considère ici des signaux de $L^2([0,1])$. On pose

$$C_0(t) = 1,\ \forall t \in [0,1]$$

et pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t \in [0,1]$

$$C_n(t) = \sqrt{2}\cos(\pi n t)$$

1. Montrer que la famille $\{C_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthonormale de $L^2([0,1])$.
2. Soit $c > 0$ et $x : t \mapsto 1$ un signal constant. Calculer $\langle x, C_n\rangle$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $x : t \mapsto \cos(2\pi f_0 t)$ où f_0 est une constante donnée positive. Calculer $\langle x, C_n\rangle$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que l'égalité de Parseval est vérifiée pour $x \in L^2([0,1])$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, C_n\rangle|^2 = \int_0^1 |x(t)|^2 dt$$

5. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5 (*Base de cosinus : version discrète*)

On s'intéresse à la version discrète de la base précédente qui s'applique à des signaux numériques finis de longueur N. On parle de DCT pour Discrete Cosinus Transform. Plusieurs versions sont disponibles et c'est la DCT II (étudiée ci-dessous) qui est utilisée pour la compression d'images dans la norme JPEG.

On munit ici $\mathbb{R}^N$ du produit scalaire usuel. Si x et y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$ on a

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n$$

On définit N signaux C_n pour $n = 0, \dots, N-1$ de la manière suivante. On pose

$$C_0[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \ \forall k = 0, \dots, N-1$$

Les $N-1$ autres signaux sont définis pour $n = 1, \dots N-1$ par

$$C_n[k] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi n}{2N}\right) \ \forall k = 0, \dots, N-1$$

1. Montrer que la famille des C_n est orthonormale.
2. Est-ce une base de $\mathbb{R}^N$?

Exercice 6

1. Soit $g = \mathbb{1}_{[0,1[}$. Calculer la transformée de Fourier de $g_{m,n} : x \mapsto g(x-n)e^{2i\pi mx}$. Peut-on dire que cette fonction est bien localisée sur une bande de fréquence donnée ?
2. Montrer que le système $\{g_{m,n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
3. Calculer les coefficients $\langle f, g_{m,n}\rangle$ pour $f : t \mapsto \mathbb{1}_{[1/4,3/4]}(t)$.

Exercice 7 (*Ondelettes de Haar*)

La base suivante est la base la plus élémentaire de la famille des bases d'ondelettes. Ces bases orthonormées sont construites à l'aide d'une fonction dite « d'échelle » ϕ d'intégrale non nulle (appelée fonction d'échelle) et d'une fonction ψ (appelée ondelette) qu'on va dilater et translater. Elles permettent de calculer des coefficients $\langle f, \psi_{n,k}\rangle$ qui prennent en compte le comportement local d'un signal f et en particulier vont être petits quand le signal f est régulier.

On pose $\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq< 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
et $\psi_{n,k}(x) = 2^{\frac{n}{2}}\psi(2^n x - k)$ pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k < 2^n$.

1. Montrer que la fonction $\phi = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et les fonctions $\psi_{n,k}$ constituent un système orthonormal dans l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$.
2. Soit $f \in L^2([0,1])$ une fonction orthogonale aux précédentes. Montrer (par récurrence sur n) que
$$\int_{2^{-n}k}^{2^{-n}(k+1)} f(x)dx = 0$$
pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k < 2^n$.
3. On considère la fonction pour tout $x \in [0,1]$
$$F(x) = \int_0^x f(y)dy$$
Montrer que F est continue sur $[0,1]$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Puis montrer que $F = 0$ en utilisant 2 et en déduire que $F = 0$.
4. Conclure que la fonction ϕ et les fonctions $\psi_{n,k}$ forment une base hilbertienne de $L^2([0,1])$.
5. Calculer les coefficients $\langle f, \phi\rangle$ et $\langle f, \psi_{n,k}\rangle$, $n, k \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants et comparer leur décroissance en fonction de $n \to +\infty$

(a) $f : t \mapsto 1$.

(b) $f : t \mapsto \mathbb{1}_{[1/4,3/4]}(t)$. Comparer dans ce cas avec la question 3 de l'exercice 6.

(c) $f : t \mapsto |x - \frac{1}{2}|^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ fixé.

ϕ est appelée fonction d'échelle et ψ ondelette.

3 Théorème d'échantillonnage

Exercice 8

Soit f le signal défini par $f(t) = e^{-|t|}$ pour $t \in \mathbb{R}$. On suppose que le temps est mesuré en secondes.

1. Calculer $\hat{f}$, en déduire que $\hat{f}$ n'est pas à support compact.
2. Montrer que $\|f\|_2 = 1$.
3. On se propose de déterminer la fréquence λ_c maximale telle que l'énergie de la transformée de Fourier de f sur l'intervalle $[-\lambda_c, \lambda_c]$ soit égale à 99% de l'énergie initiale c'est à dire
$$\int_{\pi\lambda_c}^{\pi\lambda_c} |\hat{f}(\pi\omega)|^2 d\omega = 0.99$$
Calculer la valeur λ_c souhaitée.
Soit g la fonction telle que $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)$ pour $\omega \in [-\pi\lambda_c, \pi\lambda_c]$ et 0 sinon.

   Quelle est la valeur de la fréquence d'échantillonnage admissible pour g (dite « fréquence de Nyquist ») ?
4. Soit $E(a)$ l'« énergie d'échantillonnage » de g définie par
$$E(a) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(na)|^2$$
Calculer $E\left(\frac{1}{\lambda_c}\right)$
5. Si on fixe $\lambda_c = 5$ combien valent $\int_{-\pi\lambda_c}^{\pi\lambda_c} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$ et $E\left(\frac{1}{\lambda_c}\right)$?
6. Quelle doit être la durée du signal T_c dans le domaine temporel pour que l'énergie du signal « tronqué » soit égale à 99% de l'énergie du signal de départ ?
$$\int_{-T_c/2}^{Tc/2} |e^{-|t|}|^2 dt = 0.99$$