Université Aix-Marseille 2017-2018
Master Mathématiques et applications 1ère année

Analyse fonctionnelle

TD4 : théorème de Banach-Steinhaus, théorème de l'application ouverte, théorème du graphe fermé, théorème d'Ascoli.

1 Exercices de course rapide : le 100 m

Exercice 1.1

Soient E et F deux espaces de Banach.
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $x\in E$ fixé la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite qu'on note $T(x)$.

Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de E vers une limite ℓ alors $T_n(x_n)$ converge vers $T(\ell)$.

Exercice 1.2 (***EXERCICE A SUITE***)

Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et N une norme quelconque sur $C(K,\mathbb{R})$. On suppose que

- $(C(K,\mathbb{R}),N)$ est un espace complet.
- Pour toute suite $(f_n)_n$ qui converge dans $(C(K,\mathbb{R}),N)$ vers une limite f on a aussi que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi simplement vers f sur K.

Montrer qu'il existe $C>0$ telle que pour tout f dans $C(K,\mathbb{R})$ on a

$$\|f\|_\infty \le CN(f).$$

Exercice 1.3

Soit $E=\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ muni de la norme N telle que si $P(X)=\sum_{n=1}^{M} a_nX^n$ avec M le degré de P on a $N(P)=\sup_{1\le n\le M}|a_n|$.

On considère pour tout $k\in\mathbb{N}$, T_k l'application définie par $T_k(P)=P^{(k)}(0)$.

1. Montrer que pour $k\in\mathbb{N}$, T_k est une application linéaire continue sur E.
2. Montrer que pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$ $\sup_{k\in\mathbb{N}}|T_k(P)|<\infty$ mais $\sup_{k\in\mathbb{N}}\|T_k\|$ n'existe pas.
3. Que cela signifie-t-il sur l'espace E muni de N ?

Exercice 1.4

1. Soit E un espace vectoriel normé muni de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. On suppose que E est complet pour chacune des deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ et qu'il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout x dans E

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes.

On appelle parfois ce résultat le théorème d'isomorphisme de Banach. Vous voyez pourquoi ?

2. Application : on prend $X = L^2([0,1])$ muni de sa norme canonique $\|.\|_2 : f \mapsto \left(\int_0^1 |f(t)|^2\right)^{1/2}$. On note $\|.\|_\infty : f \mapsto \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ la norme sup sur $\mathcal{C}([0,1])$.

Soit H un sous-espace vectoriel de X fermé pour $\|.\|_2$. On suppose que $H \subset C([0,1])$.

Montrer qu'il existe C_1 et C_2 telles que pour tout $x \in H$

$$C_1\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_\infty.$$

Exercice 1.5 (*Examen janvier 2017*)

Considérons un espace de Banach $(E, \|\ \|)$ et soient F_1 et F_2 deux sous-espaces fermés non triviaux de E tels que $F_1 + F_2$ soit fermé dans E. On munit $F_1 \times F_2$ de la norme produit

$$\|(x_1, x_2)\|_{F_1\times F_2} := \max(\|x_1\|, \|x_2\|), \quad (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2.$$

1. Montrer que l'application linéaire $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ de $F_1 \times F_2$ sur $F_1 + F_2$ est continue et donner une majoration sa norme.
2. Montrer que l'application linéaire $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ de $F_1 \times F_2$ sur $F_1 + F_2$ est ouverte.
3. Établir qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in F_1 + F_2$, il existe $x_1 \in F_1$ vérifiant $x - x_1 \in F_2$ et $\|x_1\| \leq C\|x\|$.

Exercice 1.6 (*EXERCICE A SUITE*)

Soit E un espace de Banach et F et G deux espaces vectoriels supplémentaires c'est à dire tels que $F \oplus G = E$. On note p_F (respectivement p_G la projection sur F (respectivement sur G) parallèlement à G (resp à F) c'est à dire que pour tout $x \in F$ $p_F(x) = x$ et pour tout $y \in G$ $p_F(y) = 0$.

Montrer que p_F et p_G sont continues si et seulement si F et G sont fermés.

Exercice 1.7

Soit H un espace de Hilbert, c'est à dire un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ qui est complet pour la norme $\|.\|_2 : f \mapsto \sqrt{\langle f, f \rangle^2}$.

On considère $T : H \to H$ un endomorphisme symétrique tel que

$$\forall x, y \in H, \quad \langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle.$$

Montrer que T est continu.

Exercice 1.8 (*inspiré du partiel 2016*)

Soit $T : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ l'opérateur de dérivation tel que $T(f) = f'$. On considère les deux espaces $C^1([0,1])$ et $C([0,1])$ munis de la norme $\|.\|_\infty$

1. Montrer que le graphe de T est fermé.
2. Montrer que T n'est pas continu et en tirer une remarque sur les hypothèses du graphe fermé.

On regardera le cas échéant dans son cours de licence les théorèmes qui parlent de convergence uniforme d'une suite de dérivées.

Exercice 1.9

Soit $k > 0$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions différentiables de $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $|f'(t)| \leq k$ pour tout $t \in]0,1[$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille équicontinue.

Exercice 1.10

Montrer qu'une famille équicontinue de fonctions définies sur un espace métrique compact est uniformément équicontinue.

Exercice 1.11 (*EXERCICE A SUITE*)

On fixe $C > 0$. Soit $Lip(C)$ le sous-ensemble de $C([0,1])$ tel que pour toute $f \in Lip(C)$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \quad \forall x, y \in [0,1]$$

1. Montrer que $Lip(C)$ est une famille de fonctions équicontinue, et même uniformément équicontinue.
2. Montrer que $Lip(C)$ est fermé dans $C([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$: $f \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$.
3. Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $Lip(C)$ qui converge simplement vers une fonction f, alors f est une fonction de $Lip(C)$ et f_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 1.12 (*EXERCICE A SUITE*)

Soit $E = C([0,1])$ muni de $\|.\|_\infty$.
On suppose que F est un sous-espace fermé de $E = C([0,1]$ tel que toute

fonction f de F est dérivable et de dérivée continue.
L'objet de cet exercice est de montrer que F est de dimension finie.

1. On considère sur $C^1([0,1]$ l'application $N : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que F vu comme sous-espace de $C^1([0,1])$ muni de cette norme est fermé et même complet.
2. Montrer que N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes sur F.
3. Soit $B_F = \mathbb{B}_F(0,1)$ la boule unité fermée de F. Montrer que B_F est équicontinue, puis que B_F est compacte. Conclure.

2 Exercices d'endurance : le 1000 mètres.

Exercice 2.1

Cet exercice est la version longue de l'exercice 1.2.
Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et N une norme quelconque sur $C(K,\mathbb{R})$. On suppose que

— $(C(K,\mathbb{R}), N)$ est un espace complet.
— Pour toute suite $(f_n)_n$ qui converge dans $(C(K,\mathbb{R}), N)$ vers une limite f on a aussi que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi simplement vers f sur K.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout f dans $C(K,\mathbb{R})$ on a $\|f\|_\infty \leq CN(f)$.
2. Montrer qu'en fait N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes sur $C(K,\mathbb{R})$.

Exercice 2.2

Cet exercice est la version longue de 1.6.

Soit M un sous-espace fermé d'un espace vectoriel normé E. On dit que M admet *un supplémentaire topologique* si il existe un sous-espace fermé N de E tel que $M + N = E$ et $M \bigcap N = \{0\}$. On utilise dans ce cas la notation $E = M \oplus N$.

1. Soit P une projection sur E c'est à dire une application linéaire $P : E \to E$ telle que $P \circ P = P$. Montrer alors que $E = Im(P) \oplus Ker(P)$.
2. On suppose qu'ici E est un espace de Banach et F et G deux espaces vectoriels supplémentaires c'est à dire tels que $F \oplus G = E$. On note p_F (respectivement p_G la projection sur F (respectivement sur G) parallèlement à G (resp à F) c'est à dire que pour tout $x \in F$ $p_F(x) = x$ et pour tout $y \in G$ $p_F(y) = 0$.

   Montrer que p_F et p_G sont continues si et seulement si F et G sont fermés.
3. En déduire qu'un sous-espace fermé d'un espace de Banach admet un supplémentaire topologique si et seulement si il est l'image d'une projection continue sur E.

Exercice 2.3

Cet exercice est la version longue de l'exercice 1.11.
On fixe $C > 0$. Soit $Lip(C)$ le sous-ensemble de $C([0,1])$ tel que pour toute $f \in Lip(C)$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \quad \forall x, y \in [0,1]$$

et on note Lip l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$

1. Montrer que $Lip(C)$ est une famille de fonctions équicontinue, et même uniformément équicontinue.
2. Montrer que $Lip(C)$ est fermé dans $C([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$: $f \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
3. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $Lip(C)$ qui converge simplement vers une fonction f, alors f est une fonction de $Lip(C)$ et f_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
4. Montrer que Lip est d'intérieur vide dans $C([0,1])$ muni de $\|.\|_\infty$.

Exercice 2.4

Cet exercice est la version longue de l'exercice 1.12.

Dans cet exercice on va montrer d'abord à l'aide d'une première démonstration qu'un sous-espace fermé de $C([0,1], \|.\|_\infty)$ constitué de fonctions dérivables et dont la dérivée est continue est nécessairement de dimension finie.

Ensuite on va montrer qu'un sous-espace fermé de $C([0,1], \|.\|_\infty)$ constitué de fonctions dérivables est nécessairement de dimension finie.

1. Première situation : on suppose que F est un sous-espace fermé de $E = C([0,1]$ muni de $\|.\|_\infty$, qui est constitué de fonctions dérivables et dont la dérivée est continue.

   L'objet de cette partie est de montrer que F est de dimension finie.

   (a) On considère sur $C^1([0,1]$ l'application $N : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que F vu comme sous-espace de $C^1([0,1])$ muni de cette norme est fermé et même complet.

   (b) Montrer que N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes sur F.

   (c) Soit $B_F = \mathbb{B}_F(0,1)$ la boule unité fermée de F. Montrer que B_F est équicontinue, puis que B_F est compacte. Conclure.

2. Deuxième situation : soit $E = C([0,1])$ muni de $\|.\|_\infty$. Soit F un sous espace vectoriel fermé de E tel que pour tout $f \in F$ f est dérivable. L'objet de cet exercice est de montrer que F est de dimension finie.

   (a) Soit $x_0 \in [0,1]$ fixé. Pour $y \neq x_0$ on définit l'opérateur $\Lambda_y : f \mapsto \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$. Montrer que Λ_y est une forme linéaire sur E c'est à dire un élément de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $f \in F$ et tout $y \neq x_0$

$$|\Lambda_y(f)| \leq M\|f\|_\infty$$

(b) Soit $B_F = \mathbb{B}_F(0,1)$ la boule unité fermée de F. Montrer que B_F est équicontinue, puis que B_F est compacte. Conclure.

3 Exercices « Course dans les calanques »

Exercice 3.1

Soit E un espace de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E à valeur dans $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. On note $T(y)(x) =< T(y), x >\in \mathbb{R}$ pour y dans E et x dans E.

On suppose que T vérifie : pour tout x dans E $< T(x), x > \geq 0$.

1. Montrer que si $\|x_n\| \to 0$ alors $< T(x_n), y > \to 0$ pour tout y dans H.
2. Montrer que si $(x_n)_n$ est une suite qui converge vers 0 et $T(x_n)$ converge vers b alors $b = 0$.
3. En déduire que T est continu de E sur $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.

Exercice 3.2

Soit $L > 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application L-lipschitzienne avec $|f_n(0)| = \sqrt{2}$. Montrer que l'on peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge simplement vers une fonction f.