TD 5 : Séries de Fourier

- Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T, intégrable sur tout intervalle borné. On note pour $n \in \mathbb{Z}$ $c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-int\frac{2\pi}{T}}dt$.
- On note pour $n \geq 1$ $a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(nt\frac{2\pi}{T})dt$, $b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(nt\frac{2\pi}{T})dt$ et $a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$.
- On a toujours
  - pour $n \geq 1$ entier $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$,
  - pour $n \geq 1$ entier $c_n(f) = \frac{a_n(f)-ib_n(f)}{2}$ et $c_{-n}(f) = \frac{a_n(f)+ib_n(f)}{2}$
  - $a_0(f) = c_0(f)$

Exercice 1.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $-1 + e^{2i\theta} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}(e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} + e^{-i(\theta-\frac{\pi}{2})})$. En déduire que l'on peut écrire $-1 + e^{2i\theta}$ sous forme ue^{iv} où u et v sont des nombres réels.
2. De même mettre $1 + e^{i\theta}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{2i\theta}$ sous forme ue^{iv} où u et v sont des nombres réels.
3. Soient α et β deux nombres réels. Mettre $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ sous la forme ue^{iv} où u et v sont des nombres réels.

Exercice 2. Série de Fourier de fonctions triangles

On considère le signal périodique f de période $T = 2\pi$ défini sur $[-\pi,\pi]$ par

$$f(t) = 1 - \frac{|t|}{\pi}$$

1. Tracer le signal f en fonction de t.
2. f est-il d'énergie finie (c'est à dire a-t-on $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$) ?
3. Déterminer les coefficients de Fourier de ce signal.
4. Écrire la série de Fourier d'ordre N $S_N(f)(t)$ associée.
5. La série de Fourier converge-t-elle ? Vers quelle limite ? A quels instants t cette limite est-elle égale au signal ?
6. Montrer que $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Exercice 3. Calcul et convergence d'une série de Fourier

On prend ici $T = 2\pi$.

Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^x$ si $x \in [-\pi,\pi[$.

1. Donner l'allure de la fonction f sur $[-2\pi,2\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de f.
3. Indiquer si elle converge et vers quelle limite.
4. En déduire la valeur des sommes suivantes : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Exercice 4. Série de Fourier et redresseur

On travaille sur un système de redressement $\mathcal{R}$ qui fournit en sortie un signal $s(t) = |e(t)|$ lorsqu'on lui met en entrée un signal $e(t)$. On l'attaque dans cet exercice avec un signal sinusoïdal $e(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 > 0$.

1. Donner la période du signal de sortie
2. Calculer les coefficients de Fourier du signal de sortie et donner sa série de Fourier d'ordre N. Converge-t-elle et vers quelle limite ?

Exercice 5. Examen mai 2017

On considère la fonction 2π périodique f telle que $f(x) = x^2$ sur $[-\pi,\pi]$.

1. Donner l'allure de la fonction f sur $[-2\pi,2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Indiquer si à t fixé la série de Fourier de f $S_N(f)(t)$ converge pour $N \to +\infty$ et vers quelle limite.
4. En déduire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
5. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{\pi \ln(2)}{2n^2}$.

Exercice 6.

On considère les deux fonctions suivantes 2π-périodiques (étudiées numériquement dans le TP 3.)

— $f_3(t) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{|\sin(t)|}}$ pour $t \in]-\pi,0[$ et $t \in]0,\pi[$ et $f_3(t) = 0$ pour $t = 0$, et $t = -\pi$.

— $f_4(t) = \dfrac{1}{|\sin(t)|}$ pour $t \in]-\pi,0[$ et $t \in]0,\pi[$ et $f_4(t) = 0$ pour $t = 0$, $t = -\pi$.

Sans aucun calcul de coefficients de Fourier indiquer si l'égalité de Parseval est vérifiée pour ces fonctions.

La série de Fourier de f_4 existe-t-elle ?