Aix-Marseille Université
Année Universitaire 2018-2019

Géométrie 1
L2 mathématiques

Partiel du 23 octobre 2018
Durée 2h

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés. Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

Notation : $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle .,. \rangle$. La norme euclidienne associé au produit scalaire canonique est notée $\|.\|$.

Exercice 1. Vrai ou faux

Dire dans chaque cas si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en donnant toujours une justification à l'aide du cours, d'une démonstration, ou d'un contre-exemple.

1. Affirmation :« Deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si et seulement si $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. »
2. Affirmation : « Deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ ont même norme si et seulement si les vecteurs $u + v$ et $u - v$ sont orthogonaux. »
3. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit M_1 d'affixe z_1 et M_2 d'affixe z_2.

   Affirmation : « Les droites (OM_1) et (OM_2) sont orthogonales si et seulement si $z_1 z_2 = 0$. »
4. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   Affirmation : « L'application qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe $2 - iz$ est une homothétie de centre $\omega = 1 - i$. »

Exercice 2.

Soient f et g deux applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $f(z) = (1 + i)z - 1$ et $g(z) = (1 - i)z - i$.

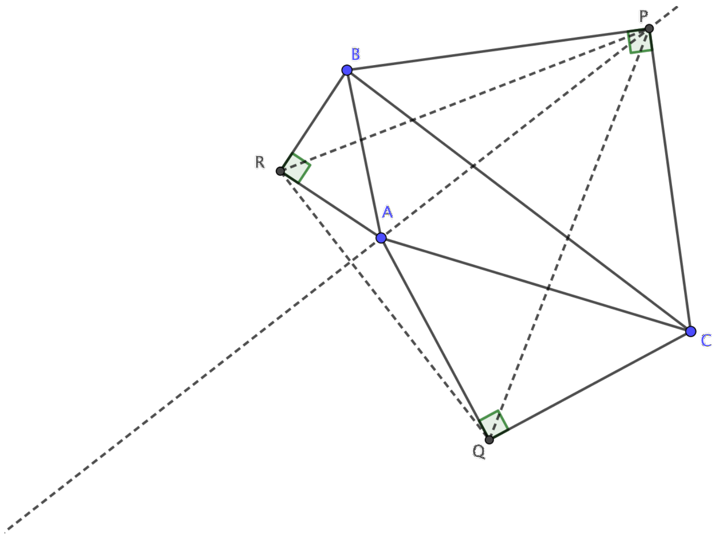
1. Donner la nature géométrique de f et préciser ses éléments caractéristiques.
2. Donner la nature géométrique de g et préciser ses éléments caractéristiques.
3. Donner la nature géométrique de $g \circ f$ et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 3.

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère trois points A,B,C d'affixes respectifs a,b,c.

On construit les triangles isocèles rectangles BCP, CAQ et ABR, extérieurs à ABC et d'hypothénuses respectives BC, AC et AB (voir figure ci-dessous).

Les affixes de P, Q et R sont notés respectivement p,q,r.



1. Calculer $\dfrac{c-p}{b-p}$.
2. Exprimer p, q et r en fonction de a, b, c.
3. Montrer que les droites (AP) et (QR) sont orthogonales et que les segments $[AP]$ et $[QR]$ ont même longeur.
4. En déduire que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

Exercice 4.

Soit $F = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$

1. Déterminer une base de F.
2. Déterminer une base orthonormée de F notée $\mathcal{B}$.
3. Compléter $\mathcal{B}$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathcal{B}'$.
4. Soit $x = (1,1,1)$. Donner les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 5.

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui conserve le produit scalaire, c'est à dire telle que pour tous u,v de $\mathbb{R}^n$ on a $\langle f(u),f(v)\rangle = \langle u,v\rangle$.
On se propose de montrer que f est linéaire et bijective.

1. Montrer que pour tous u et v dans $\mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a
$$\|f(u+\lambda v) - f(u) - \lambda f(v)\|^2 = 0$$
2. En déduire que f est une application linéaire. Montrer que f est bijective.
3. Soit une application g une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui préserve la norme, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $\|g(x)\| = \|x\|$. Montrer que g est bijective.