TD 1
Premiers exercices sur les groupes

Exercice 1 (**Groupes de cardinal premier).** Soit p un nombre premier. Démontrer qu'il existe (à isomorphisme près) un unique groupe de cardinal p.

Exercice 2 (**Groupes d'exposant 2).** On dit qu'un groupe G est d'*exposant* 2 s'il est non trivial et si pour tout g dans G, on a $g^2 = 1$.

1. Montrer que tout groupe d'exposant 2 est abélien.
2. Montrer que tout groupe d'exposant 2 est un espace vectoriel sur le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$.
3. En déduire une classification des groupes d'exposant 2.

Exercice 3 (**Décomposition en produit).** Soit G un groupe admettant deux sous-groupes H et K tels que :

1. $G = HK$;
2. $H \cap K = \{1\}$;
3. les éléments de H commutent à ceux de K, *i.e.* pour tout h dans H et tout k dans K, on a $hk = kh$.

Montrer que G est isomorphe au produit $H \times K$.

Exercice 4 (**Groupes d'ordre 6).** Déterminer tous les groupes d'ordre 6.

Exercice 5 (**Sous-groupes des groupes monogènes).**

1. Déterminer les sous-groupes du groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
2. Soit $n \geq 2$. Déterminer les sous-groupes du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des entiers modulo n.

Exercice 6 (**Représentations fidèles).** Soit G un groupe fini.

1. **(Théorème de Cayley)** Démontrer qu'il existe un ensemble fini E tel que G se plonge dans le groupe des permutations de E, *i.e.* qu'il existe un morphisme injectif de G vers S_E.
2. Soit k un corps (par exemple le corps des nombres complexes). Démontrer qu'il existe un espace vectoriel de dimension fini V tel que G se plonge dans le groupe des automorphismes linéaires de V.

Exercice 7 (**Produit de sous-groupes).** Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 8 (Générateurs des groupes cycliques). Soient $n \geq 2$ et $k \geq 1$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. k est un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
2. k est inversible (pour la multiplication) dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
3. n et k sont premiers entre eux.

Exercice 9 (Somme d'indicatrices d'Euler). Pour $d \geq 1$, on note $\varphi(d)$ le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ (φ est la fonction indicatrice d'Euler). Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Exercice 10 (Générateurs du groupe symétrique). Fixons un entier positif et considérons le groupe symétrique S_n. Notons $[n]$ l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Si $i_1, \ldots, i_k$ sont des éléments distincts de $[n]$, on note $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$ la permutation σ telle que

$$\sigma(i_1) = i_2, \quad \sigma(i_2) = i_3, \quad \ldots, \quad \sigma(i_{k-1}) = i_k, \quad \sigma(i_k) = i_1,$$

et qui fixe les autres éléments de $[n]$. On appelle une telle permutation un k-cycle.

1. Montrer que S_n est engendré par les cycles.
2. Montrer que S_n est engendré par les transpositions (*i.e.* les 2-cycles) suivantes : $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, $\ldots$, $(n-1\ n)$ et $(n\ 1)$.
3. Montrer que S_n est engendré par le cycle $(1\ 2\ \ldots\ n)$ et la transposition $(1\ 2)$.

Exercice 11 (Un groupe abélien sans torsion non libre). On dit qu'un groupe abélien A est *libre* s'il existe un ensemble I tel que A soit isomorphe au groupe $\mathbb{Z}^{(I)}$ des fonctions de I dans $\mathbb{Z}$ à support fini.

Montrer que le groupe des nombres rationnels n'est pas libre.

Exercice 12 (Produit semi-direct). Soient N et H deux groupes et $\varphi : H \to \mathsf{Aut}(N)$ un morphisme de H dans les automorphismes *de groupes* de N. Pour h dans H et n dans N, on notera $h.n = \varphi(h)(n)$. On définit une loi interne sur le produit cartésien $N \times H$ de la manière suivante :

$$(n, h)(n', h') = (n(h.n'), hh').$$

1. Montrer que cette loi définit une structure de groupes. On note $N \rtimes_\varphi H$ le groupe résultant. Ce groupe s'appelle le *produit semi-direct* de N par H relativement à φ.
2. À quelle condition ce produit est-il direct ?
3. En utilisant le produit semi-direct, construire un groupe non abélien de cardinal 8.
4. Fixons un corps k et A un espace affine de dimension finie. Considérons le groupe $\mathrm{GA}(A)$ des transformations affines de A. Décomposer $\mathrm{GA}(A)$ en un produit semi-direct.