COMPARAISON DES NERFS n-CATÉGORIQUES

par

Dimitri Ara & Georges Maltsiniotis

À Ondine, de l'automnal résultat bisimplicial à l'éternité. D.

Résumé. — Le but de cet article est de comparer trois foncteurs nerf pour les n-catégories strictes : le nerf de Street, le nerf cellulaire et le nerf multi-simplicial. Nous montrons que ces trois foncteurs sont équivalents en un sens adéquat. En particulier, les classes d'équivalences faibles n-catégoriques qu'ils définissent coïncident : ce sont les équivalences de Thomason. On donne deux applications de ce résultat : la première affirme qu'une équivalence de type Dwyer-Kan pour les équivalences de Thomason est une équivalence de Thomason ; la seconde, fondamentale, est la stabilité de la classe des équivalences de Thomason par les dualités de la catégorie des n-catégories strictes.

***Abstract* (Comparison of the n-categorical nerves).** — Our aim is to compare three nerve functors for strict n-categories: the Street nerve, the cellular nerve and the multi-simplicial nerve. We show that these three functors are equivalent in some appropriate sense. In particular, the classes of n-categorical weak equivalences that they define coincide: they are the Thomason equivalences. We give two applications of this result: the first one states that a Dwyer-Kan-type equivalence for Thomason equivalences is a Thomason equivalence; the second one, fundamental, is the stability of the class of Thomason equivalences under the dualities of the category of strict n-categories.

Introduction

Ce travail s'inscrit dans une série d'articles sur la théorie de l'homotopie des ∞-catégories strictes, série constituée actuellement de nos articles [**3**], [**1**], [**7**], [**5**], [**6**], [**2**],

***Classification mathématique par sujets* (2020).** — 18E35, 18N30, 18N40, 18N50, 55P10, 55P15, 55U35, 55U10.

Mots clefs. — ∞-catégories strictes, ensembles cellulaires, ensembles simpliciaux, équivalences de Thomason, foncteurs nerf, nerf cellulaire, nerf de Street, nerf multi-simplicial, produit tensoriel de Gray, transformations lax.

Key words and phrases. — strict ∞-categories, cellular sets, simplicial sets, Thomason equivalences, nerve functors, cellular nerve, Street nerve, multi-simplicial nerve, Gray tensor product, lax transformations.

[**4**] et de celui de Gagna [**16**]. Cette théorie de l'homotopie des ∞-catégories strictes est inspirée de la théorie de l'homotopie des petites catégories de Grothendieck, introduite dans [**17**] et développée dans [**21**] et [**14**], qui consiste en l'étude de $\mathcal{C}at$, la catégorie des petites catégories, munie de la classe des équivalences de Thomason, c'est-à-dire des foncteurs dont l'image par le foncteur nerf $N : \mathcal{C}at \to \widehat{\mathbf{\Delta}}$, à valeurs dans les ensembles simpliciaux, est une équivalence d'homotopie faible. Un résultat fondamental de Quillen, rédigé par Illusie dans sa thèse [**18**], affirme que le foncteur nerf induit une équivalence entre la localisée de $\mathcal{C}at$ par rapport aux équivalences de Thomason et la catégorie homotopique des ensembles simpliciaux, c'est-à-dire la catégorie des types d'homotopie. Ainsi, étudier les petites catégories munies des équivalences de Thomason, c'est étudier les types d'homotopie sous un jour nouveau.

Un des désavantages de ce modèle des petites catégories pour représenter les types d'homotopie est que les petites catégories représentant un type d'homotopie donné sont souvent peu naturelles et de nature peu géométrique. C'est pourquoi nous proposons dans le projet dont est issu cet article de remplacer les catégories, par nature 1-dimensionnelles, par les ∞-catégories strictes. Nous expliquons longuement nos motivations pour ce modèle dans l'introduction de [**5**].

Afin de généraliser la classe des équivalences de Thomason de $\mathcal{C}at$ à ∞-$\mathcal{C}at$, la catégorie des ∞-catégories strictes et des ∞-foncteurs stricts, on a *a priori* besoin de disposer d'un foncteur nerf de source ∞-$\mathcal{C}at$. Or, on dispose d'au moins deux foncteurs nerf naturels pour les ∞-catégories strictes :

(a) Le nerf de Street
$$N : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\mathbf{\Delta}},$$
foncteur nerf à valeurs dans les ensembles simpliciaux, introduit par Street dans [**24**], basé sur son objet cosimplicial $\mathcal{O} : \mathbf{\Delta} \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$ des orientaux, version ∞-catégorique des simplexes.

(b) Le nerf cellulaire
$$N_\Theta : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Theta},$$
à valeurs dans les ensembles cellulaires, c'est-à-dire les préfaisceaux sur la catégorie Θ de Joyal [**19**], qui est induit par l'inclusion canonique $\Theta \hookrightarrow \infty\text{-}\mathcal{C}at$ et est pleinement fidèle.

De plus, lorsque l'on se restreint, pour $n \geqslant 0$, à n-$\mathcal{C}at$, la sous-catégorie pleine de ∞-$\mathcal{C}at$ formée des n-catégories strictes, on dispose d'un troisième foncteur nerf naturel :

(c) Le nerf n-simplicial (ou multi-simplicial, si on ne veut pas préciser n)
$$N_{\mathbf{\Delta}^n} : n\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\mathbf{\Delta}^n},$$
à valeurs dans les ensembles n-simpliciaux, qui s'obtient par un usage itéré du nerf usuel.

Dans nos précédents travaux, nous avons privilégié le choix du nerf de Street en définissant les équivalences de Thomason ∞-catégoriques comme les ∞-foncteurs dont le nerf de Street est une équivalence d'homotopie faible simpliciale. Néanmoins, le nerf cellulaire permet également de définir une notion d'équivalence faible ∞-catégorique, et de même pour le nerf multi-simplicial, du moins lorsque l'on se restreint aux n-catégories pour n fini.

Le but du présent article est de montrer que les notions d'équivalences faibles définies par ces trois foncteurs nerf coïncident, en se restreignant aux n-catégories pour le troisième. Plus précisément, on établit que ces trois foncteurs nerf sont équivalents, toujours avec la même restriction pour le troisième, en un sens que l'on va maintenant préciser.

Si A est une petite catégorie, on notera $\widehat{A}$ la catégorie des préfaisceaux sur A et $i_A : \widehat{A} \to \mathcal{C}at$ le foncteur qui associe à un préfaisceau F sur A sa catégorie des éléments A/F. En composant par le foncteur nerf, suivi du foncteur canonique $p : \widehat{\mathbf{\Delta}} \to \mathsf{Hot}$ vers la catégorie homotopique des ensembles simpliciaux, on obtient un foncteur $k_A : \widehat{A} \to \mathsf{Hot}$ associant à tout préfaisceau sur A un type d'homotopie. Dans le cas $A = \mathbf{\Delta}$, en vertu d'un théorème de Quillen, le foncteur $k_{\mathbf{\Delta}}$ est canoniquement isomorphe au foncteur p.

On peut maintenant énoncer nos principaux résultats :

Théorème. — *Le nerf de Street et le nerf cellulaire sont équivalents au sens où les foncteurs composés*

$$\infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N} \widehat{\mathbf{\Delta}} \xrightarrow{k_{\mathbf{\Delta}}} \mathsf{Hot} \quad \textit{et} \quad \infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N_\Theta} \widehat{\Theta} \xrightarrow{k_\Theta} \mathsf{Hot}$$

sont isomorphes.

Corollaire. — *Le nerf de Street et le nerf cellulaire définissent les mêmes équivalences ∞-catégoriques au sens où, si $u : A \to B$ est un ∞-foncteur, alors $k_{\mathbf{\Delta}}Nu$ est un isomorphisme si et seulement si $k_\Theta N_\Theta u$ en est un.*

Les ∞-foncteurs u vérifiant les conditions équivalentes de ce corollaire sont les *équivalences de Thomason* ∞-catégoriques.

Théorème. — *Le nerf n-simplicial et le nerf de Street (et donc le nerf cellulaire) restreint aux n-catégories strictes sont équivalents au sens où les foncteurs composés*

$$n\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N_{\mathbf{\Delta}^n}} \widehat{\mathbf{\Delta}^n} \xrightarrow{k_{\mathbf{\Delta}^n}} \mathsf{Hot} \quad \textit{et} \quad n\text{-}\mathcal{C}at \hookrightarrow \infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N} \widehat{\mathbf{\Delta}} \xrightarrow{k_{\mathbf{\Delta}}} \mathsf{Hot}$$

sont isomorphes.

Corollaire. — *Pour tout $n \geqslant 0$, le nerf n-simplicial et le nerf de Street (et donc le nerf cellulaire) définissent les mêmes équivalences faibles n-catégoriques.*

Dans le cas $n = 2$, ce dernier théorème et son corollaire (sans l'addendum sur le nerf cellulaire) sont dus à Bullejos et Cegarra [**10**]. De plus, Cegarra a généralisé ces résultats aux bicatégories avec Carrasco et Garzón [**11**] et aux tricatégories avec Heredia [**12**].

Disons à présent un mot sur la démonstration de ces résultats, qui est en partie inspirée de [**10**]. À une ∞-catégorie C, on associe un objet simplicial SC dans $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ dont la ∞-catégorie des p-simplexes est

$$S_pC = \coprod_{c_0,\dots,c_p\in\mathsf{Ob}(C)} \underline{\mathsf{Hom}}_C(c_0,c_1)\times\cdots\times\underline{\mathsf{Hom}}_C(c_{p-1},c_p).$$

En appliquant le nerf de Street argument par argument, on obtient un ensemble bisimplicial NSC. On montre, et c'est là le cœur de ce travail, que la diagonale de cet ensemble bisimplicial est faiblement équivalente au nerf de Street NC de C. Pour ce faire, on interprète les (p,q)-simplexes de NSC comme les ∞-foncteurs de $\mathcal{O}_q\oslash\varDelta_p$ vers C, où $\mathcal{O}_q$ est le q-ième oriental, $\varDelta_p$ la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0<\cdots<p\}$ et $\oslash$ est un quotient du produit de Gray $\otimes$, qu'on introduit dans cet article. Les ∞-foncteurs canoniques $\mathcal{O}_q\to\varDelta_0$ et $\mathcal{O}_p\to\varDelta_p$ induisent des applications

$$NSC_{p,q}\simeq\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_q\oslash\varDelta_p,C)\to\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_q\oslash\mathcal{O}_p,C)\leftarrow\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\varDelta_0\oslash\mathcal{O}_p,C).$$

Or, un isomorphisme canonique $\varDelta_0\oslash\mathcal{O}_p\simeq\mathcal{O}_p$ permet d'identifier l'ensemble de droite avec l'ensemble des p-simplexes de NC, et on obtient l'équivalence mentionnée, grâce à des résultats que nous établissons sur la construction $\oslash$, en utilisant le fait que les deux ∞-foncteurs canoniques en jeu sont des rétractions de rétracte par transformation, lax pour l'un et oplax pour l'autre.

Une application répétée de ce résultat permet alors d'obtenir la comparaison du nerf de Street n-catégorique et du nerf n-simplicial.

En ce qui concerne la comparaison du nerf de Street et du nerf cellulaire, on passe par l'intermédiaire d'une comparaison du nerf n-cellulaire et du nerf n-simplicial. Pour cela, on montre que le foncteur canonique $\mathbf{\Delta}^n\to\Theta_n$, la catégorie Θ_n étant la variante n-dimensionnelle de la catégorie Θ, est asphérique, au sens où il vérifie les hypothèses du théorème A de Quillen, ce qui, par un résultat de Grothendieck, entraîne cette comparaison intermédiaire. Par transitivité, on obtient donc une comparaison entre le nerf de Street n-catégorique et le nerf n-cellulaire. Le passage du cas n-catégorique au cas ∞-catégorique est ensuite essentiellement formel, grâce à un résultat général de comparaison de nerfs, basé sur la théorie des structures d'asphéricité de Grothendieck développée dans [**17**].

Pour finir, on présente deux applications de ces résultats de comparaison. La première, à propos des équivalences de type Dwyer-Kan pour les équivalences de

Thomason, se prouve en utilisant notre résultat sur l'objet simplicial en ∞-catégories strictes SC :

Théorème. — *Soit $u : C \to D$ un ∞-foncteur. On suppose que*
(a) *u induit une bijection $\mathsf{Ob}(C) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ob}(D)$;*
(b) *pour tous objets c et c' de C, le ∞-foncteur*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_C(c, c') \to \underline{\mathsf{Hom}}_D(u(c), u(c'))$$

induit par u est une équivalence de Thomason.
Alors u est une équivalence de Thomason.

La seconde est la stabilité des équivalences de Thomason par dualité, stabilité qui s'obtient facilement dans le cas du nerf cellulaire et qu'on peut donc transposer au nerf de Street :

Théorème. — *Soit J un sous-ensemble de $\mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ et notons $D_J : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$ le foncteur qui envoie une ∞-catégorie C sur la ∞-catégorie obtenue à partir de C en inversant l'orientation des j-cellules pour j dans J. Alors un ∞-foncteur u est une équivalence de Thomason si et seulement si $D_J(u)$ en est une.*

Cet énoncé, fondamental, montre que la classe des équivalences de Thomason est intrinsèque à la catégorie $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ au sens où elle est invariante par tous les automorphismes de $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ et ne dépend donc que de sa seule structure de catégorie.

On tire des conséquences de ce résultat qui avaient été annoncées dans des articles précédents. Dans [**5**] et [**6**], nous avons démontré un théorème A de Quillen ∞-catégorique pour les « tranches au-dessous ». On montre comment on peut en déduire, en utilisant le théorème précédent, un théorème A pour les « tranches au-dessus », théorème qui ne peut s'obtenir par simple dualisation de la preuve. De même, dans [**2**], le premier auteur a démontré un théorème B de Quillen ∞-catégorique pour les « tranches au-dessous » dont on peut déduire un théorème B pour les « tranches au-dessus ».

Organisation de l'article. — Dans la première section, on présente les trois foncteurs nerf que l'on comparera dans cet article : le nerf de Street N, le nerf cellulaire N_Θ et le nerf n-simplicial $N_{\mathbf{\Delta}^n}$. La catégorie Θ de Joyal [**19**], nécessaire à la définition du nerf cellulaire, est introduite en utilisant la description par produit en couronne due à Berger [**8**].

Dans la deuxième section, on associe à deux ∞-catégories strictes A et B une ∞-catégorie stricte $A \oslash B$, quotient du produit de Gray $A \otimes B$. On montre que cette opération admet des Hom internes $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}$ et $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}$, variantes des Hom internes du produit de Gray, qui joueront un rôle important dans la section suivante. On étudie les compatibilités de $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}$ et $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}$ avec les transformations oplax et lax.

Dans la troisième section, on compare le nerf de Street des n-catégories strictes et le nerf n-simplicial. On associe à toute ∞-catégorie C un objet simplicial SC en

∞-catégories strictes. On en déduit un ensemble bisimplicial NSC dont on montre que la diagonale est faiblement équivalente au nerf de Street NC. Pour ce faire, on interprète les (p, q)-simplexes de NSC en termes de l'opération $\oslash$ et on utilise les résultats de la section précédente, ainsi que l'existence de certains rétractes par transformation qu'on établira dans un appendice. En itérant ce résultat, on obtient la comparaison de nerfs recherchée.

La quatrième section est consacrée à des généralités sur des techniques de comparaison de nerfs basée sur la théorie des structures d'asphéricité de Grothendieck [**17**]. On commence par rappeler les bases de la théorie de l'homotopie de Grothendieck et préciser ce qu'on entend par comparer des foncteurs nerf généraux. On énonce deux résultats, le premier dû à Grothendieck et le second provenant de ses idées, donnant des conditions suffisantes pour comparer de tels foncteurs nerf.

Dans la cinquième section, on compare le nerf de Street et le nerf cellulaire. On commence par montrer que le foncteur canonique $\mathbf{\Delta}^n \to \Theta_n$, où Θ_n désigne la version n-dimensionnelle de la catégorie Θ de Joyal, est asphérique. On en déduit, par un résultat de Grothendieck, une comparaison du nerf n-simplicial et du nerf n-cellulaire, et donc, en vertu des résultats de la troisième section, du nerf de Street n-catégorique et du nerf n-simplicial. On obtient alors la comparaison dans le cas ∞-catégorique en utilisant un des résultats généraux exposés dans la section précédente.

La sixième section est consacrée aux applications. On définit les équivalences de Thomason ∞-catégoriques *via* le nerf de Street. En utilisant le résultat bisimplicial de la troisième section, on montre que les équivalences de type Dwyer-Kan pour les équivalences de Thomason sont des équivalences de Thomason. On montre par ailleurs, en utilisant la comparaison du nerf de Street et du nerf cellulaire, que les équivalences de Thomason sont stables par les dualités de la catégorie des ∞-catégories strictes. On en déduit que les théorèmes A et B de Quillen ∞-catégoriques pour les « tranches au-dessous » que nous avons établis dans de précédents travaux entraînent des résultats analogues pour les « tranches au-dessus ».

Enfin, on termine par un appendice dont le but est de montrer l'existence de deux rétractions de rétracte par transformation lax ou oplax, notion dont on rappelle la définition, qui sont au cœur de la preuve bisimpliciale de la troisième section. La première de ces rétractions, $\mathcal{O}_q \to \mathcal{O}_0$, a été introduite dans nos précédents travaux ; quant à la seconde, $\mathcal{O}_p \to \Delta_p$, on construit la transformation oplax qui lui est associée en utilisant le théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner [**23**].

Notations et terminologie. — On notera $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ la catégorie des ∞-catégories strictes et des ∞-foncteurs stricts entre celles-ci. Toutes les ∞-catégories et tous les ∞-foncteurs apparaissant dans ce texte seront stricts et on se permettra donc d'omettre cet adjectif. Pour tout $n \geqslant 0$, on notera D_n le n-disque, objet de $\infty\text{-}\mathcal{C}at$

représentant le foncteur associant à une ∞-catégorie l'ensemble de ses n-cellules.

$$\mathrm{D}_0 = \bullet \qquad \mathrm{D}_1 = \bullet \longrightarrow \bullet \qquad \mathrm{D}_2 = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \mathrm{D}_3 = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Rrightarrow \Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$$

Si C est une ∞-catégorie et c et c' sont deux objets de C, on notera $\underline{\mathsf{Hom}}_C(c, c')$ la ∞-catégorie des j-cellules de C, pour $j > 0$, de 0-source c et de 0-but c'. Plus généralement, pour $i \geqslant 0$, si x et y sont deux i-cellules parallèles de C, on notera $\underline{\mathsf{Hom}}_C(x, y)$ la ∞-catégorie des j-cellules de C, pour $j > i$, de i-source x et de i-but y. Pour $i \geqslant 0$, l'ensemble des i-cellules de C sera noté C_i. On notera parfois $\mathsf{Ob}(C)$ pour C_0.

La catégorie des ensembles sera notée $\mathcal{E}ns$ et celle des petites catégories $\mathcal{C}at$. Pour $n \geqslant 0$, on notera n-$\mathcal{C}at$ la catégorie des n-catégories (strictes). On considérera souvent ces catégories comme des sous-catégories pleines de ∞-$\mathcal{C}at$. Le foncteur d'inclusion $\mathcal{E}ns \hookrightarrow \infty$-$\mathcal{C}at$ admet pour adjoint à droite le foncteur $\mathsf{Ob} : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{E}ns$ qui associe à une ∞-catégorie l'ensemble de ses objets, et admet un adjoint à gauche, qu'on notera $\pi_0 : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{E}ns$, qui associe à une ∞-catégorie l'ensemble de ses composantes connexes.

1. Trois foncteurs nerf

Dans cette section, nous allons rappeler les définitions de trois foncteurs nerf classiques pour les n-catégories : le nerf de Street, le nerf cellulaire et le nerf multi-simplicial.

1.1. Le nerf de Street. —

1.1.1. — On notera $\mathbf{\Delta}$ la catégorie des simplexes. Rappelons que ses objets sont les ensembles ordonnés

$$\varDelta_n = \{0 < 1 < \cdots < n\},$$

pour $n \geqslant 0$, et que ses morphismes sont les applications croissantes au sens large entre ceux-ci. On considérera parfois $\mathbf{\Delta}$ comme une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$, et donc de ∞-$\mathcal{C}at$.

La *catégorie des ensembles simpliciaux* est la catégorie $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ des préfaisceaux sur $\mathbf{\Delta}$.

1.1.2. — Dans [**24**], Street construit un foncteur $\mathcal{O} : \mathbf{\Delta} \to \infty$-$\mathcal{C}at$, appelé *objet cosimplicial des orientaux*. Pour $n \geqslant 0$, la ∞-catégorie $\mathcal{O}(\varDelta_n)$, qui se trouve être une n-catégorie, est appelée le *n-ième oriental* et est notée $\mathcal{O}_n$. On renvoie le lecteur à [**5**, paragraphe 3.11], par exemple, pour une définition de l'objet cosimplicial des orientaux utilisant la théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner [**23**]. Voici une représentation graphique des premiers orientaux :

$$\mathcal{O}_0 = \mathrm{D}_0 = \{0\}\ , \qquad \mathcal{O}_1 = \mathrm{D}_1 = 0 \longrightarrow 1\ , \qquad \mathcal{O}_2 = \begin{tikzcd} & 2 \\ 0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, shift right=2, "\Searrow"] & 1 \arrow[u] \end{tikzcd}\ ,$$

$$\mathcal{O}_3 = \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\Downarrow"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\Swarrow"] & 3 \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[u] \end{tikzcd} \Rrightarrow \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow"] & 3 \\ 1 \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\Searrow"] & 2 \arrow[u] \end{tikzcd}\ .$$

1.1.3. — Le nerf de Street est le foncteur nerf

$$N : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\boldsymbol{\Delta}}$$

associé à l'objet cosimplicial des orientaux. Explicitement, si C est une ∞-catégorie, on a, pour tout $n \geqslant 0$,

$$N(C)_n = \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_n, C).$$

1.2. Le nerf cellulaire. —

Nous allons commencer par introduire la catégorie Θ de Joyal en utilisant la définition par produit en couronne introduite par Berger dans [**8**].

1.2.1. — Soit C une catégorie. On définit une catégorie $\boldsymbol{\Delta} \wr C$ de la manière suivante.

- Les objets de $\boldsymbol{\Delta} \wr C$ sont les $(\Delta_n; c_1, \dots, c_n)$, où $n \geqslant 0$ et $c_1, \dots, c_n$ sont n objets de C.
- Si $(\Delta_n; c_1, \dots, c_n)$ et $(\Delta_{n'}; c'_1, \dots, c'_{n'})$ sont deux objets de $\boldsymbol{\Delta} \wr C$, les morphismes du premier vers le second sont les $(\varphi; (f_{i',i}))$, où $\varphi : \Delta_n \to \Delta_{n'}$ est un morphisme de $\boldsymbol{\Delta}$ et les $f_{i',i} : c_i \to c'_{i'}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\varphi(i-1) < i' \leqslant \varphi(i)$, sont des morphismes de C.
- Si

  $$(\Delta_n; c_1, \dots, c_n) \xrightarrow{(\varphi; (f_{i',i}))} (\Delta_{n'}; c'_1, \dots, c'_{n'}) \xrightarrow{(\varphi'; (f'_{i'',i'}))} (\Delta_{n''}; c''_1, \dots, c''_{n''})$$

  sont deux morphismes composables, leur composé est le morphisme

  $$(\Delta_n; c_1, \dots, c_n) \xrightarrow{(\varphi''; (f''_{i'',i}))} (\Delta_{n''}; c''_1, \dots, c''_{n''})$$

  où

  $$\varphi'' = \varphi'\varphi \quad \text{et} \quad f''_{i'',i} = f'_{i'',i'} f_{i',i},$$

  i' étant l'unique entier tel que $\varphi(i-1) < i' \leqslant \varphi(i)$ et $\varphi'(i'-1) < i'' \leqslant \varphi'(i')$.
- Si $(\Delta_n; c_1, \dots, c_n)$ est un objet de $\boldsymbol{\Delta} \wr C$, l'identité de cet objet est le morphisme $(1_{\Delta_n}; (1_{c_i})_{1 \leqslant i = i' \leqslant n})$.

On vérifie qu'on obtient bien ainsi une catégorie. Notons que si e désigne la catégorie ponctuelle, la catégorie $\mathbf{\Delta} \wr e$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{\Delta}$.

La construction $C \mapsto \mathbf{\Delta} \wr C$ s'étend en un foncteur de manière évidente : en particulier, si $u : C \to D$ est un foncteur, on obtient un foncteur $\mathbf{\Delta} \wr u : \mathbf{\Delta} \wr C \to \mathbf{\Delta} \wr D$.

1.2.2. — Si C est une catégorie, on dispose de foncteurs

$$\Sigma : C \to \mathbf{\Delta} \wr C \quad \text{et} \quad \pi : \mathbf{\Delta} \wr C \to \mathbf{\Delta}.$$

Le premier de ces foncteurs est défini, sur les objets et les morphismes, par

$$\begin{aligned} c &\mapsto (\Delta_1; c) \\ f &\mapsto (1_{\Delta_1}; (f)_{i'=i=1}) \end{aligned}$$

et le second par

$$\begin{aligned} (\Delta_n; c_1, \dots, c_n) &\mapsto \Delta_n \\ (\varphi, (f_{i',i})) &\mapsto \varphi \quad . \end{aligned}$$

Notons que ce second foncteur n'est autre que le foncteur $\mathbf{\Delta} \wr p : \mathbf{\Delta} \wr C \to \mathbf{\Delta}$, où $p : C \to e$ désigne l'unique foncteur de C vers la catégorie ponctuelle e et où on a identifié $\mathbf{\Delta} \wr e$ et $\mathbf{\Delta}$.

1.2.3. — Pour $n \geqslant 0$, on définit la catégorie Θ_n de Joyal par récurrence de la manière suivante :

- Θ_0 est la catégorie ponctuelle e ;
- $\Theta_{n+1} = \mathbf{\Delta} \wr \Theta_n$.

En particulier, Θ_1 est la catégorie $\mathbf{\Delta} \wr e$ qu'on identifiera toujours à la catégorie $\mathbf{\Delta}$. On a donc $\Theta_1 = \mathbf{\Delta}$.

On définit, toujours par récurrence sur n, un foncteur $i_n : \Theta_n \to \Theta_{n+1}$:

- le foncteur $i_0 : \Theta_0 = e \to \Theta_1 = \mathbf{\Delta}$ correspond à l'objet Δ_0 de $\mathbf{\Delta}$;
- $i_{n+1} = \mathbf{\Delta} \wr i_n$.

On vérifie facilement que le foncteur $i_n : \Theta_n \to \Theta_{n+1}$ est pleinement fidèle, et on le considérera comme un foncteur d'inclusion.

La catégorie Θ de Joyal est définie par

$$\Theta = \varinjlim \Theta_n.$$

On dispose de foncteurs d'inclusion $\Theta_n \hookrightarrow \Theta$.

Un *ensemble cellulaire* est un préfaisceau sur Θ et un *ensemble n-cellulaire* un préfaisceau sur Θ_n.

1.2.4. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant des produits finis et un objet initial. On définit un foncteur $W_{\mathcal{C}} : \mathbf{\Delta} \wr \mathcal{C} \to \mathcal{C}\text{-}\mathcal{C}at$, où $\mathcal{C}\text{-}\mathcal{C}at$ désigne la catégorie des catégories enrichies dans $\mathcal{C}$, de la manière suivante. Soit $S = (\Delta_n; C_1, \dots, C_n)$ un objet de $\mathbf{\Delta} \wr \mathcal{C}$. On commence par définir un graphe G_S enrichi dans $\mathcal{C}$:

- les objets de G_S sont les entiers $0, \dots, n$;

– si i et j sont deux objets, l'objet des flèches de i vers j est C_j si $j = i+1$ et l'objet initial $\emptyset$ de $\mathcal{C}$ sinon.

Par définition, $W_{\mathcal{C}}(S)$ est la catégorie enrichie dans $\mathcal{C}$ librement engendrée par ce graphe G_S enrichi dans $\mathcal{C}$. Explicitement, si i et j sont deux objets, on a

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{W_{\mathcal{C}}(S)}(i,j) = \begin{cases} \prod_{i<k\leqslant j} C_k & \text{si } i \leqslant j, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que le foncteur $W_{\mathcal{C}} : \mathbf{\Delta} \wr \mathcal{C} \to \mathcal{C}\text{-}\mathcal{C}at$ est pleinement fidèle (voir [**8**, proposition 3.5]).

1.2.5. — Dans le cas où $\mathcal{C} = \infty\text{-}\mathcal{C}at$, la construction du paragraphe précédent fournit un foncteur $W : \mathbf{\Delta} \wr \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$, la catégorie $(\infty\text{-}\mathcal{C}at)\text{-}\mathcal{C}at$ s'identifiant à $\infty\text{-}\mathcal{C}at$.

Si $n \geqslant 0$ est un entier et $C_1, \dots, C_n$ sont des ∞-catégories, on notera parfois $\Delta_n \wr (C_1, \dots, C_n)$ la ∞-catégorie $W((\Delta_n; C_1, \dots, C_n))$. Dans le cas où tous les C_i sont égaux à une même ∞-catégorie C, on notera plus simplement $\Delta_n \wr C$ cette même ∞-catégorie.

On vérifie facilement que la ∞-catégorie $\Delta_n \wr (C_1, \dots, C_n)$ est la limite inductive du diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \Sigma' C_n & & \Sigma' C_{n-1} & & \cdots & & \Sigma' C_1 \\ & \mathrm{D}_0 \arrow[ul, "0"] \arrow[ur, "1"'] & & \mathrm{D}_0 \arrow[ul, "0"] & \cdots & \mathrm{D}_0 \arrow[ur, "1"'] & , \end{tikzcd}$$

où, si D est une ∞-catégorie, $\Sigma' D$ désigne la ∞-catégorie dont les objets sont 0 et 1, et telle que

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\Sigma' D}(\varepsilon, \varepsilon') = \begin{cases} D & \text{si } \varepsilon = 0 \text{ et } \varepsilon' = 1, \\ \mathrm{D}_0 & \text{si } \varepsilon = \varepsilon', \\ \emptyset & \text{si } \varepsilon = 1 \text{ et } \varepsilon' = 0, \end{cases}$$

la composition étant définie de la manière évidente.

Il est par ailleurs immédiat que le foncteur W se restreint pour tout $n \geqslant 0$ en un foncteur $W_n : \mathbf{\Delta} \wr n\text{-}\mathcal{C}at \to (n+1)\text{-}\mathcal{C}at$, qui n'est autre que le foncteur $W_{n\text{-}\mathcal{C}at}$ du paragraphe précédent.

1.2.6. — On définit un foncteur $R_n : \Theta_n \to n\text{-}\mathcal{C}at$ par récurrence sur $n \geqslant 0$:

– le foncteur $R_0 : \Theta_0 = e \to 0\text{-}\mathcal{C}at = \mathcal{E}ns$ correspond au singleton ;

– le foncteur R_{n+1} est le composé

$$\Theta_{n+1} = \mathbf{\Delta} \wr \Theta_n \xrightarrow{\mathbf{\Delta} \wr R_n} \mathbf{\Delta} \wr n\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{W_n} (n+1)\text{-}\mathcal{C}at \ .$$

On obtient un foncteur $R : \Theta \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$ en passant à la limite inductive.

Par exemple, si on considère l'objet $S = (\mathit{\Delta}_3; \mathit{\Delta}_3, \mathit{\Delta}_0, \mathit{\Delta}_2)$ de Θ_2, on a

$$R_2(S) = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=70] \arrow[r, bend left=20] \arrow[r, bend right=20] \arrow[r, bend right=70] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow"] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd} .$$

Il résulte de la pleine fidélité du foncteur W_n que le foncteur $R : \Theta \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$ est également pleinement fidèle. Ainsi, on considérera souvent Θ comme une sous-catégorie pleine de $\infty\text{-}\mathcal{C}at$.

1.2.7. — Le *nerf cellulaire*

$$N_\Theta : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Theta}$$

est le foncteur nerf associé au foncteur $R : \Theta \hookrightarrow \infty\text{-}\mathcal{C}at$ du paragraphe précédent. Explicitement, si C est une ∞-catégorie et T est un objet de Θ, on a

$$N_\Theta(C)_T = \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(R(T), C).$$

De même, pour tout $n \geqslant 0$, le foncteur $R_n : \Theta_n \hookrightarrow n\text{-}\mathcal{C}at$ induit un foncteur *nerf n-cellulaire*

$$N_{\Theta_n} : n\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Theta_n}.$$

Notons que ce foncteur n'est autre que le composé

$$n\text{-}\mathcal{C}at \hookrightarrow \infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N_\Theta} \widehat{\Theta} \xrightarrow{i_n^*} \widehat{\Theta_n} ,$$

où i_n^* désigne le foncteur de restriction le long de l'inclusion $i_n : \Theta_n \hookrightarrow \Theta$.

1.3. Le nerf n-simplicial. —

1.3.1. — Si C est une catégorie, on définit un foncteur $\mu : \mathbf{\Delta} \times C \to \mathbf{\Delta} \wr C$, sur les objets et les morphismes, par

$$\begin{aligned} (\mathit{\Delta}_n, c) &\mapsto (\mathit{\Delta}_n; c, \dots, c) \\ (\varphi, f) &\mapsto (\varphi; (f)_{i',i}) \quad . \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence sur $n \geqslant 0$ un foncteur $m_n : \mathbf{\Delta}^n \to \Theta_n$:

- m_0 est l'identité de $\mathbf{\Delta}^0 = e = \Theta_0$;
- m_{n+1} est le composé

$$\mathbf{\Delta}^{n+1} = \mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}^n \xrightarrow{\mathbf{\Delta} \times m_n} \mathbf{\Delta} \times \Theta_n \xrightarrow{\mu} \mathbf{\Delta} \wr \Theta_n = \Theta_{n+1} .$$

Pour $n \geqslant 0$, on obtient ainsi un foncteur $M_n : \mathbf{\Delta}^n \to n\text{-}\mathcal{C}at$ en composant

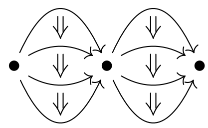
$$\mathbf{\Delta}^n \xrightarrow{m_n} \Theta_n \hookrightarrow n\text{-}\mathcal{C}at .$$

Explicitement, avec les notations du paragraphe 1.2.5, on a

$$M_n(\mathit{\Delta}_{i_1}, \dots, \mathit{\Delta}_{i_n}) = \mathit{\Delta}_{i_1} \wr \cdots \wr \mathit{\Delta}_{i_n},$$

où l'opération $\wr$ est implicitement parenthésée à droite.

Par exemple, on a

$$m_2(\mathit{\Delta}_2, \mathit{\Delta}_3) = (\mathit{\Delta}_2; \mathit{\Delta}_3, \mathit{\Delta}_3) \quad \text{et} \quad M_2(\mathit{\Delta}_2, \mathit{\Delta}_3) =$$  .

1.3.2. — Soit $n \geqslant 0$. Le *nerf n-simplicial*

$$N_{\mathbf{\Delta}^n} : n\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\mathbf{\Delta}^n}$$

est le foncteur nerf associé au foncteur $M_n : \mathbf{\Delta}^n \to n\text{-}\mathcal{C}at$ du paragraphe précédent. Explicitement, si C est une n-catégorie et $i_1, \dots, i_n$ sont des entiers, on a

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{\Delta}^n}(C)_{i_1,\dots,i_n} &= \mathsf{Hom}_{n\text{-}\mathcal{C}at}(M_n(\mathit{\Delta}_{i_1}, \dots, \mathit{\Delta}_{i_n}), C) \\ &= \mathsf{Hom}_{n\text{-}\mathcal{C}at}(\mathit{\Delta}_{i_1} \wr \cdots \wr \mathit{\Delta}_{i_n}, C). \end{aligned}$$

2. Un quotient du produit de Gray

2.1. — Si A et B sont deux ∞-catégories, on notera $A \otimes B$ leur produit de Gray. On renvoie le lecteur à l'appendice A de [**7**] pour une étude systématique du produit de Gray, utilisant une définition basée sur une idée de Steiner [**23**].

On rappelle que le produit de Gray définit sur $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ une structure de catégorie monoïdale (non symétrique) bifermée, d'unité la ∞-catégorie finale D_0. Le fait que le produit de Gray soit bifermé signifie qu'on dispose de foncteurs

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{oplax}}, \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{lax}} : \infty\text{-}\mathcal{C}at^{\circ} \times \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$$

et de bijections

$$\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(A, \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(B, C)) \simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(A \otimes B, C) \simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(B, \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{lax}}(A, C)),$$

naturelles en A, B et C dans $\infty\text{-}\mathcal{C}at$. En particulier, le produit de Gray commute aux limites inductives en chacun de ses arguments.

2.2. — Soient A et B deux ∞-catégories. Par adjonction, les 0-cellules de la ∞-catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(A, B)$ correspondent aux ∞-foncteurs de A vers B. Si $u, v : A \to B$ sont deux ∞-foncteurs, une *transformation oplax* de u vers v est une 1-cellule de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(A, B)$ de source u et de but v. Par adjonction, une telle transformation correspond à un ∞-foncteur $h : \mathrm{D}_1 \otimes A \to B$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "0 \otimes A"'] \arrow[dr, "u"] & \\ \mathrm{D}_1 \otimes A \arrow[r, "h"] & D \\ A \arrow[u, "1 \otimes A"] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

,

où $D_1 = 0 \to 1$ et où on a identifié A avec $D_0 \otimes A$. Si x est une n-cellule de A, on peut lui associer par une telle transformation une $(n+1)$-cellule h_x en composant

$$D_{n+1} \to D_1 \otimes D_n \xrightarrow{D_1 \otimes x} D_1 \otimes A \xrightarrow{h} B \ ,$$

où la première flèche correspond à l'unique $(n+1)$-cellule non triviale (c'est-à-dire qui n'est pas une identité) de $D_1 \otimes D_n$. On montre que les h_x, où x varie parmi les cellules de A, déterminent complètement h. (On renvoie, par exemple, à l'appendice B de [**7**] pour une étude systématique des transformations oplax.)

On définit de même la notion de *transformation lax* en remplaçant l'usage de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\text{oplax}}(A, B)$ par celui de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\text{lax}}(A, B)$. Ainsi, une transformation lax entre ∞-foncteurs de A vers B est donnée par un ∞-foncteur $A \otimes D_1 \to B$.

2.3. — Soient A et B deux ∞-catégories. On définit une ∞-catégorie $A \oslash B$ par le carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} A \otimes \mathsf{Ob}(B) \arrow[r, "p \otimes \mathsf{Ob}(B)"] \arrow[d, "A \otimes i"'] & \pi_0(A) \otimes \mathsf{Ob}(B) \arrow[d] \\ A \otimes B \arrow[r] & A \oslash B \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd} \quad ,$$

où $\mathsf{Ob}(B)$ désigne l'ensemble des objets de B vu comme une ∞-catégorie discrète, $i : \mathsf{Ob}(B) \hookrightarrow B$ l'inclusion canonique, $\pi_0(A)$ l'ensemble des composantes connexes de A vu comme une ∞-catégorie discrète et $p : A \to \pi_0(A)$ la projection canonique. (Notons que le produit de Gray de deux ensembles n'est autre que leur produit cartésien.) La ∞-catégorie $A \oslash B$ est ainsi munie d'un ∞-foncteur canonique $A \otimes B \to A \oslash B$, qui est un épimorphisme car image directe d'un épimorphisme.

Cette construction est clairement fonctorielle en A et B, et on obtient donc un foncteur

$$\oslash : \infty\text{-}\mathcal{C}at \times \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \infty\text{-}\mathcal{C}at,$$

ainsi qu'une transformation naturelle canonique $A \otimes B \to A \oslash B$. On se gardera de croire que $\oslash$ définit une produit monoïdal sur $\infty\text{-}\mathcal{C}at$. (On peut par exemple montrer que $(D_1 \oslash D_1) \oslash D_1$ n'est pas isomorphe à $D_1 \oslash (D_1 \oslash D_1)$.)

On vérifie immédiatement qu'on a des isomorphismes canoniques

$$D_0 \oslash A \simeq A \quad \text{et} \quad A \oslash D_0 \simeq \pi_0(A),$$

naturels en A dans $\infty\text{-}\mathcal{C}at$.

Proposition 2.4. — *Soient A et B deux ∞-catégories. On a des bijections canoniques*

$$\mathsf{Ob}(A \oslash B) \simeq \pi_0(A) \times \mathsf{Ob}(B) \quad \textit{et} \quad \pi_0(A \oslash B) \simeq \pi_0(A) \times \pi_0(B),$$

naturelles en A et B.

Démonstration. — Considérons le carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} A \otimes \mathsf{Ob}(B) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_0(A) \otimes \mathsf{Ob}(B) \arrow[d] \\ A \otimes B \arrow[r] & A \oslash B \end{tikzcd} \quad .$$

En appliquant à ce carré le foncteur $\mathsf{Ob} : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{E}ns$, qui commute aux limites inductives, on obtient un nouveau carré cocartésien. Il résulte de l'isomorphisme naturel $\mathsf{Ob}(C \otimes D) \simeq \mathsf{Ob}(C) \times \mathsf{Ob}(D)$ que la flèche verticale de gauche de ce second carré est un isomorphisme. On en déduit qu'il en est de même de celle de droite et on a donc

$$\mathsf{Ob}(A \oslash B) \simeq \mathsf{Ob}(\pi_0(A) \otimes \mathsf{Ob}(B)) \simeq \pi_0(A) \times \mathsf{Ob}(B).$$

Appliquons maintenant au carré cocartésien considéré au début de cette preuve le foncteur $\pi_0 : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{E}ns$, qui commute également aux limites inductives. Il résulte de l'isomorphisme naturel $\pi_0(C \otimes D) \simeq \pi_0(C) \times \pi_0(D)$ (voir par exemple le cas $n = 0$ de [**7**, Proposition A.27]) que la flèche horizontale du haut du carré ainsi obtenu est un isomorphisme. Il en est donc de même de la flèche du bas et on a donc

$$\pi_0(A \oslash B) \simeq \pi_0(A \otimes B) \simeq \pi_0(A) \times \pi_0(B),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 2.5. — *Soient A, B et C trois ∞-catégories. On a un isomorphisme canonique*

$$A \oslash (B \oslash C) \simeq (A \otimes B) \oslash C,$$

naturel en A, B et C.

Démonstration. — En utilisant le fait que le foncteur $A \otimes -$ commute aux limites inductives et la proposition précédente, on obtient

$$\begin{aligned} A \oslash (B \oslash C) &= \big(A \otimes (B \oslash C)\big) \amalg_{A \otimes \mathsf{Ob}(B \oslash C)} \big(\pi_0(A) \otimes \mathsf{Ob}(B \oslash C)\big) \\ &\simeq \big((A \otimes B \otimes C) \amalg_{A \otimes B \otimes \mathsf{Ob}(C)} (A \otimes \pi_0(B) \otimes \mathsf{Ob}(C))\big) \\ &\qquad\qquad \amalg_{A \otimes \pi_0(B) \otimes \mathsf{Ob}(C)} \big(\pi_0(A) \otimes \pi_0(B) \otimes \mathsf{Ob}(C)\big) \\ &\simeq (A \otimes B \otimes C) \amalg_{A \otimes B \otimes \mathsf{Ob}(C)} (\pi_0(A) \otimes \pi_0(B) \otimes \mathsf{Ob}(C)) \\ &\simeq \big((A \otimes B) \otimes C\big) \amalg_{(A \otimes B) \otimes \mathsf{Ob}(C)} (\pi_0(A \otimes B) \otimes \mathsf{Ob}(C)) \\ &= (A \otimes B) \oslash C, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Remarque 2.6. — Ainsi, on dispose d'un ∞-foncteur canonique

$$A \oslash (B \oslash C) \simeq (A \otimes B) \oslash C \to (A \oslash B) \oslash C \ ,$$

et on peut montrer que le produit $\oslash$ munit $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ d'une structure de catégorie monoïdale lax en un sens adéquat.

Proposition 2.7. — *Le foncteur* $\oslash : \infty\text{-}\mathcal{C}at \times \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$ *commute aux limites inductives en chacune de ses variables.*

Démonstration. — Cela résulte du fait que le foncteur $\otimes$ a cette propriété, que les foncteurs $A \mapsto \pi_0(A)$ et $B \mapsto \mathsf{Ob}(B)$ commutent tous les deux aux limites inductives et que, enfin, les limites inductives commutent aux sommes amalgamées. $\square$

Proposition 2.8. — *Il existe des foncteurs*

$$\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}} : \infty\text{-}\mathcal{C}at^{\circ} \times \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$$

et des bijections

$$\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(A, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(B, C)) \simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(A \oslash B, C) \simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(B, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(A, C))$$

naturelles en A, B et C dans $\infty\text{-}\mathcal{C}at$.

Démonstration. — La catégorie $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ étant localement présentable, cela résulte formellement du fait que le foncteur $\oslash$ commute aux limites inductives en chacune de ses variables. $\square$

2.9. — Par adjonction, le ∞-foncteur canonique $C \otimes D \to C \oslash D$ induit des ∞-foncteurs

$$\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(A, B) \to \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(A, B) \quad \text{et} \quad \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(A, B) \to \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{lax}}(A, B).$$

Il résulte du fait que $A \otimes B \to A \oslash B$ est un épimorphisme que ces ∞-foncteurs sont des monomorphismes, et on considérera souvent ces ∞-foncteurs comme des inclusions.

Explicitement, cela revient à identifier une i-cellule de $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(A, B)$ avec un ∞-foncteur $\mathrm{D}_i \otimes A \to B$ qui se factorise par l'épimorphisme $\mathrm{D}_i \otimes A \to \mathrm{D}_i \oslash A$, et une i-cellule de $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(A, B)$ avec un ∞-foncteur de $A \otimes \mathrm{D}_i \to B$ qui se factorise par l'épimorphisme $A \otimes \mathrm{D}_i \to A \oslash \mathrm{D}_i$.

Puisque le ∞-foncteur canonique $\mathrm{D}_0 \otimes A \to \mathrm{D}_0 \oslash A$ est un isomorphisme, on a

$$\mathsf{Ob}(\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(A, B)) = \mathsf{Ob}(\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(A, B)) = \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(A, B).$$

Si $i \geqslant 1$, en revenant à la définition de $\mathrm{D}_i \oslash A$, on obtient qu'une i-cellule $h : \mathrm{D}_i \otimes A \to B$ de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(A, B)$ appartient à $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(A, B)$ si et seulement si, pour tout objet a de A, le composé

$$\mathrm{D}_i \otimes \mathrm{D}_0 \xrightarrow{\mathrm{D}_i \otimes a} \mathrm{D}_i \otimes A \xrightarrow{h} B$$

se factorise par $\pi_0(\mathrm{D}_i) \simeq \mathrm{D}_0$. Lorsque $i = 1$, cette condition signifie exactement que, pour tout objet a de A, la 1-flèche h_a de B est une identité. On dira qu'une transformation oplax h qui vérifie cette condition est *triviale sur les objets*.

De même, par définition, un objet de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{lax}}(A, B)$, ∞-foncteur de A vers B, est dans $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(A, B)$ s'il se factorise par $\pi_0(A)$, c'est-à-dire s'il est localement constant.

Si $i \geqslant 1$, une i-cellule $k : A \otimes \mathrm{D}_i \to B$ de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{lax}}(A, B)$ est dans $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(A, B)$ si, pour $\varepsilon = 0, 1$, le composé

$$A \otimes \mathrm{D}_0 \xrightarrow{A \otimes \varepsilon} A \otimes \mathrm{D}_i \xrightarrow{k} B$$

se factorise par $\pi_0(A)$. Or, ce composé n'est autre que la source ou le but, suivant que ε vaille 0 ou 1, de la i-cellule k de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{lax}}(A, B)$. Ainsi, $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(A, B)$ est la sous-∞-catégorie pleine de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{lax}}(A, B)$ dont les objets sont les ∞-foncteurs localement constants de A vers B.

Remarque 2.10. — Dans le cadre 2-catégorique, les transformations oplax triviales sur les objets sont parfois appelées *icons* pour « Identity Component Oplax Natural transformations » [**20**].

Proposition 2.11. — *Soient A, B et C des ∞-catégories. On a des isomorphismes canoniques*

$$\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(A \oslash B, C) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(A, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(B, C))$$

et

$$\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(A \otimes B, C) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(B, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(A, C)),$$

naturels en A, B et C.

Démonstration. — Soit T une ∞-catégorie. Par adjonction, on a

$$\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(T, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(A \oslash B, C)) \simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(T \oslash (A \oslash B), C)$$

et

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(T, \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(A, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(B, C))) &\simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(T \otimes A, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(B, C)) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}((T \otimes A) \oslash B, C)\end{aligned}$$

et on obtient le premier isomorphisme en vertu du lemme de Yoneda et de l'isomorphisme

$$T \oslash (A \oslash B) \simeq (T \otimes A) \oslash B$$

de la proposition 2.5. Le deuxième isomorphisme s'obtient de manière similaire en observant que

$$\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(T, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(A \otimes B, C)) \simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}((A \otimes B) \oslash T, C)$$

et

$$\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(T, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(B, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(A, C))) \simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(A \oslash (B \oslash T), C). \qquad \square$$

2.12. — Soient A et B deux ∞-catégories. Pour toute ∞-catégorie S, tout ∞-foncteur $h : S \oslash A \to B$ et toute ∞-catégorie C, le composé

$$\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(B, C) \to \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(S \oslash A, C) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(S, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(A, C)) ,$$

où la première flèche est induite par h et la seconde est un des isomorphismes de la proposition précédente, fournit par adjonction un ∞-foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(B, C) \otimes S \to \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(A, C),$$

naturel en A, B, S, h et C.

De même, pour toute ∞-catégorie S, tout ∞-foncteur $k : A \otimes S \to B$ et toute ∞-catégorie C, le composé

$$\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(B, C) \to \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(A \otimes S, C) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(S, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(A, C)) \ ,$$

où la première flèche est induite par k, fournit par adjonction un ∞-foncteur

$$S \oslash \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(B, C) \to \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(A, C),$$

naturel en A, B, S, k et C.

Proposition 2.13. — *Soient $u, v : A \to B$ deux ∞-foncteurs et soit C une ∞-catégorie.*

(a) *Une transformation oplax de u vers v triviale sur les objets induit une transformation lax de $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(u, C)$ vers $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(v, C)$.*

(b) *Une transformation lax de u vers v induit une transformation oplax triviale sur les objets de $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(u, C)$ vers $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(v, C)$.*

Démonstration. — Cela résulte du paragraphe précédent pour $S = \mathrm{D}_1$, ainsi que de la description des ∞-foncteurs $\mathrm{D}_1 \oslash C \to D$ donnée au paragraphe 2.9. □

3. Comparaison du nerf de Street et du nerf n-simplicial

Dans toute cette section, on fixe un entier $n \geqslant 1$.

3.1. — On notera $\delta : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{\Delta}^n$ le foncteur diagonal et $\delta^* : \widehat{\mathbf{\Delta}^n} \to \widehat{\mathbf{\Delta}}$ le foncteur qui s'en déduit par précomposition. Ainsi, si X est un ensemble n-simplicial, alors $\delta^* X$ est l'ensemble simplicial défini par $(\delta^* X)_p = X_{p,\dots,p}$. On appellera *équivalences faibles n-simpliciales diagonales* les morphismes d'ensembles n-simpliciaux f tels que $\delta^* f$ soit une équivalence d'homotopie faible simpliciale.

On rappelle le résultat classique suivant :

3.2. Lemme bisimplicial. — *Soit f un morphisme d'ensembles bisimpliciaux. Si pour tout $p \geqslant 0$ le morphisme d'ensembles simpliciaux $f_{p,\bullet}$* (resp. *$f_{\bullet,p}$*), *obtenu en fixant la première variable* (resp. *la deuxième variable*) *est une équivalence faible, alors f est une équivalence faible diagonale.*

Démonstration. — Voir par exemple [**9**, Chapitre XII, paragraphe 4.3], ou [**13**, proposition 2.1.7] pour une preuve plus moderne. □

Plus généralement :

3.3. Lemme multi-simplicial. — *Soit f un morphisme d'ensembles n-simpliciaux. S'il existe un sous-ensemble I de $\{1, \dots, n\}$, de cardinal $k < n$, tel que, pour toute famille d'entiers positifs $(p_i)_{i \in I}$, le morphisme d'ensembles $(n-k)$-simpliciaux obtenu* *à partir de f en fixant, pour tout i dans I, la i-ième variable à la valeur p_i est une équivalence faible diagonale, alors f est une équivalence faible diagonale.*

Démonstration. — Cela résulte du lemme bisimplicial par récurrence. □

Le but de cette section est de produire, pour C une n-catégorie, un zigzag d'équivalences faibles simpliciales entre la diagonale du nerf n-simplicial $\delta^* N_{\mathbf{\Delta}^n} C$ de C et le nerf de Street NC de C. Pour ce faire, on va introduire une construction intermédiaire SC permettant de décomposer le nerf n-simplicial en n étapes au sens où on aura $N_{\mathbf{\Delta}^n} C \simeq S^n C$.

3.4. — Si C est une ∞-catégorie, on notera SC l'objet simplicial dans $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ défini par

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta}^\circ &\to \infty\text{-}\mathcal{C}at \\ \Delta_p &\mapsto S_p C = \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(\Delta_p, C). \end{aligned}$$

Proposition 3.5. — *Soient C une ∞-catégorie quelconque, T une ∞-catégorie connexe et $p \geqslant 0$. On a une bijection canonique*

$$\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(T, S_p C) \simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\Delta_p \wr T, C)$$

(voir le paragraphe 1.2.5 pour la définition de $\Delta_p \wr T$) définissant un isomorphisme d'ensembles simpliciaux naturel en C et T.

Démonstration. — Par adjonction, on a

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(T, S_p C) &= \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(T, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(\Delta_p, C)) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(T \oslash \Delta_p, C) \end{aligned}$$

et il s'agit en fait de montrer que $T \oslash \Delta_p$ est canoniquement isomorphe à $\Delta_p \wr T$. Puisque le foncteur $T \oslash -$ commute aux limites inductives, que $\Delta_p \simeq \mathrm{D}_1 \amalg_{\mathrm{D}_0} \cdots \amalg_{\mathrm{D}_0} \mathrm{D}_1$ et que $T \oslash \mathrm{D}_0 \simeq \mathrm{D}_0$ (car T est connexe, voir le paragraphe 2.3), on a

$$T \oslash \Delta_p \simeq T \oslash \mathrm{D}_1 \amalg_{\mathrm{D}_0} \cdots \amalg_{\mathrm{D}_0} T \oslash \mathrm{D}_1.$$

Par ailleurs, en vertu du paragraphe 1.2.5, et avec ses notations, on a

$$\Delta_p \wr T \simeq \Sigma' T \amalg_{\mathrm{D}_0} \cdots \amalg_{\mathrm{D}_0} \Sigma' T.$$

Le résultat découle donc du lemme suivant : □

Lemme 3.6. — *Soit T une ∞-catégorie connexe. On a un isomorphisme canonique*

$$T \oslash \mathrm{D}_1 \simeq \Sigma' T,$$

où $\Sigma' T$ désigne la ∞-catégorie introduite au paragraphe 1.2.5, naturel en T.

Démonstration. — Par définition (et connexité de T), le carré

$$\begin{tikzcd} T \amalg T \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{D}_0 \amalg \mathrm{D}_0 \arrow[d] \\ T \otimes \mathrm{D}_1 \arrow[r] & T \oslash \mathrm{D}_1 \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd}$$

est cocartésien ; autrement dit, on a

$$T \oslash \mathrm{D}_1 \simeq \mathrm{D}_0 \amalg_T (T \otimes \mathrm{D}_1) \amalg_T \mathrm{D}_0.$$

Le résultat découle donc de [**7**, corollaire B.6.6] qui affirme, à une dualité près, que cette somme amalgamée est isomorphe à $\Sigma' T$. $\square$

Corollaire 3.7. — *Soit C une ∞-catégorie. Pour tout $p \geqslant 0$, on a un isomorphisme canonique*

$$S_p C \simeq \coprod_{c_0,\dots,c_p \in \mathsf{Ob}(C)} \underline{\mathsf{Hom}}_C(c_0, c_1) \times \cdots \times \underline{\mathsf{Hom}}_C(c_{p-1}, c_p)$$

définissant un isomorphisme d'objets simpliciaux naturel en C. En particulier, si C est une n-catégorie, avec $n \geqslant 1$, alors $S_p C$ est une $(n-1)$-catégorie.

Démonstration. — Soit T une ∞-catégorie connexe. En utilisant la proposition 3.5, on obtient

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(T, S_p C) &\simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\Delta_p \wr T, C) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\Sigma' T \amalg_{\mathrm{D}_0} \cdots \amalg_{\mathrm{D}_0} \Sigma' T, C) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\Sigma' T, C) \times_{\mathsf{Ob}(C)} \cdots \times_{\mathsf{Ob}(C)} \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\Sigma' T, C). \end{aligned}$$

Or, essentiellement par définition, la donnée d'un ∞-foncteur $\Sigma' T \to C$ correspond exactement à celle de deux objets c et c' de C et d'un ∞-foncteur $T \to \underline{\mathsf{Hom}}_C(c, c')$, d'où le résultat, par densité de la sous-catégorie pleine de ∞-$\mathcal{C}at$ formée des ∞-catégories connexes. $\square$

3.8. — Si C est une ∞-catégorie, on notera $S^n C$ l'objet n-simplicial dans ∞-$\mathcal{C}at$ obtenu en itérant n fois S, c'est-à-dire donné par

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Delta}^n)^\circ &\to \infty\text{-}\mathcal{C}at \\ (\Delta_{p_1}, \dots, \Delta_{p_n}) &\mapsto S_{p_n} \cdots S_{p_1} C. \end{aligned}$$

En vertu du corollaire précédent, si C est une n-catégorie, alors $S_{p_n} \cdots S_{p_1} C$ est un ensemble et on obtient donc un foncteur

$$\begin{aligned} n\text{-}\mathcal{C}at &\to \widehat{\mathbf{\Delta}^n} \\ C &\mapsto S^n C. \end{aligned}$$

Notons que lorsque $n = 1$, il résulte du corollaire précédent que ce foncteur n'est autre que le nerf usuel.

Proposition 3.9. — *Si C est une n-catégorie, alors il existe un isomorphisme canonique d'ensembles n-simpliciaux*

$$S^n C \simeq N_{\mathbf{\Delta}^n} C,$$

naturel en C.

Démonstration. — Si $p_1, \dots, p_n$ sont n entiers, en utilisant la proposition 3.5, on obtient

$$\begin{aligned}(S^n C)_{p_1,\dots,p_n} &\simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathrm{D}_0, (S^n C)_{p_1,\dots,p_n}) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathrm{D}_0, S_{p_n} \cdots S_{p_1} C) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\Delta_{p_n} \wr \mathrm{D}_0, S_{p_{n-1}} \cdots S_{p_1} C) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\Delta_{p_n}, S_{p_{n-1}} \cdots S_{p_1} C) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\Delta_{p_{n-1}} \wr \Delta_{p_n}, S_{p_{n-2}} \cdots S_{p_1} C) \\ &\simeq \cdots \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\Delta_{p_1} \wr \cdots \wr \Delta_{p_n}, C) \\ &\simeq (N_{\mathbf{\Delta}^n} C)_{p_1,\dots,p_n},\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

On va maintenant produire un zigzag d'équivalences faibles simpliciales entre l'ensemble simplicial $\delta^* NSC$ et le nerf de Street NC.

3.10. — Soit C une ∞-catégorie. On va considérer son nerf de Street NC comme un ensemble bisimplicial constant en la deuxième variable :

$$N_{p,q} C = N_p C = \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_p, C).$$

Notons qu'on a

$$N_{p,q} C \simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathrm{D}_0 \oslash \mathcal{O}_p, C).$$

On va comparer cet ensemble bisimplicial avec l'ensemble bisimplicial NSC dont l'ensemble des (p,q)-simplexes est

$$(NS)_{p,q} C = N_q S_p C = \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_q, S_p C) = \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_q, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(\Delta_p, C)).$$

Par adjonction, on a

$$(NS)_{p,q} C \simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_q \oslash \Delta_p, C).$$

Afin de comparer ces deux ensembles bisimpliciaux, on introduit l'ensemble bisimplicial intermédiaire XC défini par

$$X_{p,q} C = \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_q \oslash \mathcal{O}_p, C).$$

3.11. — Pour $p \geqslant 0$, le 1-tronqué de $\mathcal{O}_p$, c'est-à-dire la 1-catégorie obtenue à partir de $\mathcal{O}_p$ en identifiant deux 1-cellules lorsqu'elles sont reliées par un zigzag de 2-cellules, est canoniquement isomorphe à Δ_p. Ainsi, on dispose d'un ∞-foncteur canonique $\mathcal{O}_p \to \Delta_p$. Par ailleurs, pour $q \geqslant 0$, on a un unique ∞-foncteur $\mathcal{O}_q \to \mathrm{D}_0$. Ces deux ∞-foncteurs induisent, pour toute ∞-catégorie C, des applications

$$\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathrm{D}_0 \oslash \mathcal{O}_p, C) \to \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_q \oslash \mathcal{O}_p, C) \leftarrow \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_q \oslash \Delta_p, C)$$

définissant des morphismes d'ensembles bisimpliciaux naturels en C. Ainsi, on dispose de morphismes d'ensembles bisimpliciaux

$$NC \to XC \leftarrow NSC$$

naturels en C.

Proposition 3.12. — *Pour toute ∞-catégorie C, les morphismes*

$$NC \to XC \leftarrow NSC$$

du paragraphe précédent sont des équivalences faibles diagonales.

Démonstration. — Commençons par montrer que le morphisme $NC \to XC$ est une équivalence faible diagonale. Fixons $q \geqslant 0$. En vertu du lemme bisimplicial, il suffit de montrer que le morphisme simplicial

$$\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathrm{D}_0 \oslash \mathcal{O}_\bullet, C) \to \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_q \oslash \mathcal{O}_\bullet, C)$$

est une équivalence faible. Ce morphisme s'identifie par adjonction au morphisme

$$\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_\bullet, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(\mathrm{D}_0, C)) \to \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_\bullet, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(\mathcal{O}_q, C)),$$

c'est-à-dire au nerf de Street du ∞-foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(\mathrm{D}_0, C) \to \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(\mathcal{O}_q, C)$$

induit par le ∞-foncteur $\mathcal{O}_q \to \mathrm{D}_0$. Or, d'après la proposition A.3, ce dernier ∞-foncteur est la rétraction d'un rétracte par transformation lax (voir le paragraphe A.1) et, en vertu de la proposition 2.13, on obtient un rétracte par transformation oplax en appliquant le foncteur $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(-, C)$. Ainsi, d'après le théorème A.2, le nerf de Street de ce ∞-foncteur est une équivalence faible, ce qui entraîne que $NC \to XC$ est bien une équivalence faible diagonale.

Montrons maintenant que le morphisme $NSC \to XC$ est une équivalence faible diagonale. Fixons cette fois $p \geqslant 0$. Toujours en vertu du lemme bisimplicial, il suffit de montrer que le morphisme simplicial

$$\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_\bullet \oslash \Delta_p, C) \to \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_\bullet \oslash \mathcal{O}_p, C)$$

est une équivalence faible. Par adjonction, ce morphisme s'identifie au morphisme

$$\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_\bullet, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(\Delta_p, C)) \to \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_\bullet, \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(\mathcal{O}_p, C)),$$

qui n'est autre que le nerf de Street du ∞-foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(\Delta_p, C) \to \underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{oplax}}(\mathcal{O}_p, C)$$

induit par le ∞-foncteur $\mathcal{O}_p \to \Delta_p$. Or, d'après la proposition A.4, ce dernier ∞-foncteur est la rétraction d'un rétracte par transformation oplax triviale sur les objets (voir le paragraphe A.1). Il résulte donc de la proposition 2.13 que le ∞-foncteur obtenu en lui appliquant le foncteur $\underline{\mathsf{Hom}}^{\oslash}_{\mathrm{lax}}(-, C)$ est un rétracte par transformation lax. Son nerf de Street est donc une équivalence faible, toujours d'après le théorème A.2, ce qui achève de montrer que $NSC \to XC$ est une équivalence faible diagonale. □

Proposition 3.13. — *Pour toute ∞-catégorie C, le nerf de Street NC est naturellement faiblement équivalent à l'ensemble simplicial $\delta^* NSC$. Plus précisément, le zigzag du paragraphe 3.11 induit un zigzag naturel d'équivalences faibles simpliciales entre NC et $\delta^* NSC$.*

Démonstration. — Puisque $\delta^* NC = NC$, cela résulte immédiatement de la proposition précédente. □

3.14. — Soit $0 < k < n$. Si C est une ∞-catégorie, en appliquant le zigzag $N \to X \leftarrow NS$, argument par argument, à la ∞-catégorie $(k-1)$-simpliciale $S^{k-1}C$, on obtient un zigzag d'ensembles $(k+1)$-simpliciaux

$$NS^{k-1}C \to XS^{k-1}C \leftarrow NS^kC \ .$$

L'ordre des indices simpliciaux est choisi de sorte que, en évaluant ce zigzag en $p_1, \dots, p_{k+1}$, on obtienne

$$N_{p_k}D \to X_{p_k, p_{k+1}}D \leftarrow N_{p_{k+1}}S_{p_k}D \ ,$$

où

$$D = S_{p_{k-1}} \cdots S_{p_1}C.$$

Considérons ces ensembles $(k+1)$-simpliciaux comme des ensembles n-simpliciaux constants en les $n-k-1$ dernières variables. On peut ainsi composer ces zigzags et on obtient un zigzag d'ensembles n-simpliciaux, de longueur $2n-2$,

$$NC \to \cdots \leftarrow NS^{n-1}C \ ,$$

où NC est considéré comme constant en les $n-1$ dernières variables, naturel en C.

Proposition 3.15. — *Pour toute ∞-catégorie C, les morphismes n-simpliciaux du zigzag*

$$NC \to \cdots \leftarrow NS^{n-1}C$$

du paragraphe précédent sont des équivalences faibles diagonales.

Démonstration. — Soit k tel que $0 < k < n$. Il suffit de voir que les morphismes $(k+1)$-simpliciaux

$$NS^{k-1}C \to XS^{k-1}C \leftarrow NS^kC$$

sont des équivalences faibles diagonales. Or, en évaluant ce zigzag en les $k-1$ premières variables en $p_1, \dots, p_{k-1}$, on obtient le zigzag bisimplicial

$$ND \to XD \leftarrow NSD\ ,$$

où

$$D = S_{p_{k-1}} \cdots S_{p_1} C.$$

D'après la proposition 3.12, les morphismes de ce dernier zigzag sont des équivalences faibles diagonales et on obtient donc le résultat en vertu du lemme multi-simplicial (lemme 3.3). □

Théorème 3.16. — *Le nerf de Street, restreint aux n-catégories, et le nerf n-simplicial sont naturellement faiblement équivalents. Plus précisément, si C est une n-catégorie, le zigzag du paragraphe 3.14 induit un zigzag naturel d'équivalences faibles simpliciales entre NC et $\delta^* N_{\mathbf{\Delta}^n} C$.*

Démonstration. — En vertu de la proposition précédente, le zigzag du paragraphe 3.14 induit un zigzag d'équivalences faibles simpliciales entre $\delta^*NC = NC$ et $\delta^*NS^{n-1}C$. Or, puisque C est une n-catégorie, il résulte du corollaire 3.7 que $S^{n-1}C$ est un objet $(n-1)$-simplicial en 1-catégories et on a donc $NS^{n-1}C = S^nC$ d'après le paragraphe 3.8. Ainsi, en vertu de la proposition 3.9, on a

$$\delta^*NS^{n-1}C \simeq \delta^*S^nC \simeq \delta^*N_{\mathbf{\Delta}^n}C,$$

d'où le résultat. □

4. Techniques de comparaison de nerfs

4.1. — Soient

$$i : A \to \infty\text{-}\mathcal{C}at \quad \text{et} \quad j : B \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$$

deux foncteurs de source des petites catégories. À ces données, on associe deux foncteurs « nerf »

$$\begin{aligned} N_i : \infty\text{-}\mathcal{C}at &\to \widehat{A} \\ X &\mapsto (a \mapsto \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(i(a), X)), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} N_j : \infty\text{-}\mathcal{C}at &\to \widehat{B} \\ X &\mapsto (b \mapsto \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(j(b), X)). \end{aligned}$$

Que signifie comparer ces deux foncteurs nerf ?

Notons Hot la catégorie homotopique des espaces, c'est-à-dire la localisée de la catégorie des ensembles simpliciaux par les équivalences d'homotopie faibles. Pour toute petite catégorie C, on dispose d'un foncteur canonique

$$k_C : \widehat{C} \to \mathsf{Hot}.$$

Ce foncteur est défini comme le composé

$$\widehat{C} \xrightarrow{i_C} \mathcal{C}at \xrightarrow{N} \widehat{\boldsymbol{\Delta}} \xrightarrow{p} \mathsf{Hot} \ ,$$

où i_C est le foncteur catégorie des éléments, dont nous rappellerons la définition plus loin, N est le nerf usuel et p est le foncteur canonique vers la localisée. Comparer les foncteurs nerf N_i et N_j, c'est montrer que les foncteurs composés

$$\infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N_i} \widehat{A} \xrightarrow{k_A} \mathsf{Hot} \quad \text{et} \quad \infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N_j} \widehat{B} \xrightarrow{k_B} \mathsf{Hot}$$

sont isomorphes.

Notons que si cette condition est satisfaite, alors les classes $\mathcal{W}_i$ et $\mathcal{W}_j$ des « équivalences faibles » de $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ définies par ces foncteurs nerf, c'est-à-dire des ∞-foncteurs envoyés sur un isomorphisme par $k_A N_i$ et $k_B N_j$ respectivement, coïncident.

Le but de cette section est de donner des critères de comparaison de foncteurs nerf basés sur la théorie de l'homotopie de Grothendieck, et en particulier sa théorie des structures d'asphéricité [**17**, chapitre IV, sections 72–78].

Commençons par introduire les notions de base de cette théorie.

4.2. — Soit $u : A \to B$ un foncteur et soit b un objet de B. On notera A/b la catégorie dont les objets sont les couples $(a, f : u(a) \to b)$, où a est un objet de A et $f : u(a) \to b$ un morphisme de B, et dont les morphismes de (a, f) vers (a', f') sont les morphismes $g : a \to a'$ de A rendant commutatif le triangle évident, autrement dit, vérifiant $f'u(g) = f$.

4.3. — Soit A une petite catégorie. Si F est un préfaisceau sur A, en appliquant la construction du paragraphe précédent au foncteur de Yoneda $A \hookrightarrow \widehat{A}$, qu'on considérera toujours comme une inclusion, on obtient une catégorie A/F. C'est la *catégorie des éléments de* F. On obtient ainsi un foncteur

$$\begin{aligned} i_A : \widehat{A} &\to \mathcal{C}at \\ F &\mapsto A/F. \end{aligned}$$

Explicitement, les objets de A/F sont les couples (a, f), où a est un objet de A et $f : a \to F$ est un morphisme de préfaisceaux sur A, qu'on peut identifier par le lemme de Yoneda à un élément de $F(a)$.

4.4. — On dit qu'un foncteur $u : A \to B$ entre petites catégories est une *équivalence de Thomason* si son nerf $Nu : NA \to NB$ est une équivalence d'homotopie faible simpliciale.

Une petite catégorie A est dite *asphérique* si le foncteur de A vers la catégorie ponctuelle est une équivalence de Thomason ou, ce qui revient au même, si son nerf est un ensemble simplicial faiblement contractile.

Un préfaisceau F sur une petite catégorie A est dit *asphérique* si sa catégorie des éléments A/F est asphérique.

Enfin, on dit qu'un morphisme de préfaisceaux $\varphi : F \to G$ sur une petite catégorie A est une *équivalence faible* si le foncteur $i_A(\varphi) : A/F \to A/G$ est une équivalence de Thomason.

Remarque 4.5. — La classe des équivalences d'homotopie faibles simpliciales étant fortement saturée (au sens où un morphisme est dans cette classe si et seulement si son image dans la localisée correspondante est inversible), il en est de même des classes des équivalences de Thomason et des équivalences faibles de préfaisceaux sur une petite catégorie A.

Remarque 4.6. — Les foncteurs entre petites catégories qui sont des adjoints, à gauche ou à droite, sont des équivalences de Thomason. Cela résulte immédiatement du fait qu'une transformation naturelle induit *via* le nerf une homotopie simpliciale. On en déduit qu'une catégorie admettant un objet initial ou final est asphérique et, par suite, que tout préfaisceau représentable est asphérique.

Remarque 4.7. — Si A est une petite catégorie *asphérique*, alors un préfaisceau F sur A est asphérique si et seulement si le morphisme $F \to e_{\widehat{A}}$, où $e_{\widehat{A}}$ désigne le préfaisceau final sur A, est une équivalence faible.

Remarque 4.8. — Un morphisme d'ensembles simpliciaux est une équivalence faible au sens du paragraphe 4.4 si et seulement si il est une équivalence d'homotopie faible simpliciale. Cela résulte du fait que, pour tout ensemble simplicial X, il existe un zigzag d'équivalences d'homotopie faibles entre $N(\mathbf{\Delta}/X)$ et X (voir [**18**, chapitre VI, théorème 3.3.(ii)]). En particulier, un ensemble simplicial est asphérique si et seulement si il est faiblement contractile au sens classique.

4.9. — Un foncteur $u : A \to B$ entre petites catégories est dit *asphérique* si, pour tout objet b de B, la catégorie A/b est asphérique. Le théorème A de Quillen affirme précisément qu'un foncteur asphérique est une équivalence de Thomason.

4.10. — Soit $u : A \to B$ un foncteur entre petites catégories. Notons $u^* : \widehat{B} \to \widehat{A}$ le foncteur d'image inverse par u, c'est-à-dire de précomposition par u. Pour tout préfaisceau F sur B, on dispose d'un foncteur

$$\begin{aligned} A/u^*(F) &\to B/F \\ (a, f) &\mapsto (u(a), f), \end{aligned}$$

où f est tantôt vu comme un morphisme $f : a \to u^*(F)$, tantôt comme un morphisme $f : u(a) \to F$, ces deux morphismes correspondant en vertu du lemme de Yoneda à un élément de $F(u(a))$. Ce foncteur est naturel en F et on dispose donc d'une transformation naturelle

$$\begin{tikzcd}
\widehat{B} \arrow[rr, "u^*"] \arrow[dr, "i_B"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda_u}{\Longleftarrow}"] & \widehat{A} \arrow[dl, "i_A"] \\
& \mathcal{C}at &
\end{tikzcd}.$$

Proposition 4.11 **(Grothendieck).** — *Un foncteur $u : A \to B$ entre petites catégories est asphérique si et seulement si la transformation naturelle λ_u est une équivalence de Thomason argument par argument.*

Démonstration. — C'est l'équivalence entre (a) et (c) de [**21**, proposition 1.2.9]. $\square$

Dans la suite de la section, on fixe une catégorie $\mathcal{M}$, que le lecteur peut penser être ∞-$\mathcal{C}at$ ou n-$\mathcal{C}at$. Si A est une petite catégorie et $i : A \to \mathcal{M}$ un foncteur, on notera $N_i : \mathcal{M} \to \widehat{A}$ le foncteur « nerf » associé, défini comme au paragraphe 4.1.

Proposition 4.12 **(Grothendieck).** — *Soit*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "i"'] & & B \arrow[dl, "j"] \\
& \mathcal{M} &
\end{tikzcd}$$

un triangle commutatif de foncteurs, où A et B sont des petites catégories. Si u est asphérique, alors les foncteurs composés

$$\mathcal{M} \xrightarrow{N_i} \widehat{A} \xrightarrow{k_A} \mathsf{Hot} \quad et \quad \mathcal{M} \xrightarrow{N_j} \widehat{B} \xrightarrow{k_B} \mathsf{Hot}$$

sont isomorphes. Plus précisément, la transformation naturelle λ_u induit une transformation naturelle entre

$$\mathcal{M} \xrightarrow{N_i} \widehat{A} \xrightarrow{i_A} \mathcal{C}at \quad et \quad \mathcal{M} \xrightarrow{N_j} \widehat{B} \xrightarrow{i_B} \mathcal{C}at$$

qui est une équivalence de Thomason argument par argument.

Démonstration. — On dispose d'un diagramme

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{M} \arrow[dl, "N_j"'] \arrow[dr, "N_i"] & \\
\widehat{B} \arrow[rr, "u^*"] \arrow[dr, "i_B"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda_u}{\Longleftarrow}"] & \widehat{A} \arrow[dl, "i_A"] \\
& \mathcal{C}at &
\end{tikzcd}$$

dont le triangle supérieur est commutatif. En effet, si X est dans $\mathcal{M}$ et a est dans A, on a

$$u^*N_j(X)_a = N_j(X)_{u(a)} = \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(ju(a), X) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(i(a), X) = N_i(X)_a.$$

Puisque u est asphérique, la transformation naturelle λ_u est une équivalence de Thomason argument par argument et l'assertion suit. $\square$

Proposition 4.13. — *Soient $i : A \to \mathcal{M}$ et $j : B \to \mathcal{M}$ deux foncteurs de sources des petites catégories. On suppose que pour tout objet a de A et tout objet b de B, les préfaisceaux $N_i i(a)$ et $N_i j(b)$ sont des préfaisceaux asphériques de $\widehat{A}$ et les préfaisceaux $N_j i(a)$ et $N_j j(b)$ sont des préfaisceaux asphériques de $\widehat{B}$. Alors, les foncteurs composés*

$$\mathcal{M} \xrightarrow{N_i} \widehat{A} \xrightarrow{k_A} \mathsf{Hot} \quad \textit{et} \quad \mathcal{M} \xrightarrow{N_j} \widehat{B} \xrightarrow{k_B} \mathsf{Hot}$$

sont isomorphes. Plus précisément, il existe un zigzag de transformations naturelles de la forme

$$i_A N_i \Rightarrow \bullet \Leftarrow i_B N_j$$

qui sont des équivalences de Thomason argument par argument.

Démonstration. — Soit C la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ d'ensemble d'objets

$$\mathsf{Ob}(C) = \{i(a) \mid a \in \mathsf{Ob}(A)\} \cup \{j(b) \mid b \in \mathsf{Ob}(B)\}.$$

Par définition, les foncteurs i et j se factorisent par C et on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i'"] \arrow[dr, "i"'] & C \arrow[d, hook] & B \arrow[l, "j'"'] \arrow[dl, "j"] \\ & \mathcal{M} & \end{tikzcd} .$$

En vertu de la proposition précédente, il suffit de montrer que les foncteurs i' et j' sont asphériques et, par symétrie, il suffit de traiter le cas de i'. Soit donc c un objet de C. Un objet de $A/_C$ est un couple $(a, i'(a) \to c)$, avec a un objet de A et $i'(a) \to c$ un morphisme de C, c'est-à-dire un morphisme $i(a) \to c$ de C ou, ce qui revient au même, un morphisme $a \to N_i(c)$ de préfaisceaux sur A. Autrement dit, on a $A/_C \simeq A/_{N_i(c)}$. Ainsi, le foncteur i' est asphérique si et seulement si, pour tout objet c de C, le préfaisceau $N_i(c)$ sur A est asphérique. Les objets de c étant de la forme $i(a)$ ou $j(b)$, pour a dans A et b dans B, l'assertion résulte de l'hypothèse que $N_i i(a)$ et $N_i j(b)$ sont asphériques. $\square$

***Corollaire 4.14* (Grothendieck).** — *Soient $i : A \to \mathcal{M}$ et $j : B \to \mathcal{M}$ deux foncteurs de sources des petites catégories. On suppose que pour tout objet a de A et tout objet b de B, les préfaisceaux $N_i i(a)$ et $N_j j(b)$ sont asphériques. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *les foncteurs $k_A N_i$ et $k_B N_j$ sont isomorphes ;*

(b) *il existe un zigzag de transformations naturelles de la forme*

$$i_A N_i \Rightarrow \bullet \Leftarrow i_B N_j$$

qui sont des équivalences de Thomason argument par argument ;

et elles entraînent la condition suivante :

(c) *les foncteurs nerf N_i et N_j définissent les mêmes équivalences faibles sur $\mathcal{M}$ au sens où, pour tout morphisme f de $\mathcal{M}$, le morphisme $N_i(f)$ est une équivalence faible de préfaisceaux si et seulement si $N_j(f)$ en est une.*

De plus, si A et B sont asphériques et $\mathcal{M}$ possède un objet final, alors ces trois conditions sont équivalentes.

Démonstration. — Les implications $(b) \Rightarrow (a) \Rightarrow (c)$ sont immédiates.

Montrons l'implication $(a) \Rightarrow (b)$. En vertu de la proposition précédente, il suffit de montrer que pour tout objet a de A et tout objet b de B, les préfaisceaux $N_j i(a)$ et $N_i j(b)$ sont asphériques. Or, l'hypothèse (a) entraîne immédiatement que si X est un objet de $\mathcal{M}$, alors $N_i X$ est asphérique si et seulement si $N_j X$ est asphérique, d'où le résultat.

Montrons enfin l'implication $(c) \Rightarrow (b)$ sous les hypothèses additionnelles. Soit X un objet de $\mathcal{M}$. Pour les mêmes raisons que précédemment, il nous suffit de montrer que $N_i X$ est asphérique si et seulement si $N_j X$ est asphérique. Or, puisque la catégorie A est asphérique, le préfaisceau $N_i X$ est asphérique si et seulement si le morphisme $N_i X \to e_{\widehat{A}}$, où $e_{\widehat{A}}$ désigne le préfaisceau final, est une équivalence faible. Ce morphisme étant l'image par N_i du morphisme $X \to e$, où e désigne l'objet final de $\mathcal{M}$, on obtient que le préfaisceau $N_i X$ est asphérique si et seulement si le morphisme $X \to e$ est envoyé par N_i sur une équivalence faible. On conclut en utilisant le résultat analogue pour N_j. □

Enfin, terminons cette section par des rappels sur la notion de catégorie totalement asphérique.

4.15. — Soit A une petite catégorie asphérique. On dit que A est *totalement asphérique* si le foncteur $i_A : \widehat{A} \to \mathcal{C}at$ commute aux produits binaires à équivalence faible près au sens où, pour tous préfaisceaux F et G sur A, le foncteur canonique $A/(F \times G) \to A/F \times A/G$ est une équivalence de Thomason. Cela entraîne en particulier que si a_1 et a_2 sont deux objets de A, alors la catégorie $A/(a_1 \times a_2)$, où $a_1 \times a_2$ est vu comme un préfaisceau sur A, est asphérique. (Cette seconde condition, *a priori* plus faible, se trouve en fait être équivalente, voir par exemple [**21**, proposition 1.6.1].)

Théorème 4.16 **(Cisinski-Maltsiniotis).** — *Pour tout $n \geqslant 0$, la catégorie Θ_n est totalement asphérique. De même, la catégorie Θ est totalement asphérique.*

Démonstration. — Cela résulte de [**15**, exemples 5.8 et 5.12]. □

Remarque 4.17. — En particulier, la catégorie $\mathbf{\Delta}$, qui n'est autre que Θ_1, est totalement asphérique. Il en résulte immédiatement que, pour tout $n \geqslant 0$, le foncteur diagonal $\delta : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{\Delta}^n$ est asphérique. Ainsi, en vertu de la proposition 4.11, la transformation λ_δ est une équivalence de Thomason argument par argument, de sorte que les foncteurs

$$\widehat{\mathbf{\Delta}^n} \xrightarrow{\delta^*} \widehat{\mathbf{\Delta}} \xrightarrow{k_{\mathbf{\Delta}}} \mathsf{Hot} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{\Delta}^n} \xrightarrow{k_{\mathbf{\Delta}^n}} \mathsf{Hot}$$

sont isomorphes. Ainsi, le théorème 3.16 entraîne que les foncteurs composés

$$n\text{-}\mathcal{C}at \hookrightarrow \infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N} \widehat{\mathbf{\Delta}} \xrightarrow{k_{\mathbf{\Delta}}} \mathsf{Hot} \quad \text{et} \quad n\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N_{\mathbf{\Delta}^n}} \widehat{\mathbf{\Delta}^n} \xrightarrow{k_{\mathbf{\Delta}^n}} \mathsf{Hot}$$

sont isomorphes.

5. Comparaison du nerf de Street et du nerf cellulaire, par l'intermédiaire du nerf multi-simplicial

Nous allons commencer par comparer le nerf n-simplicial et le nerf n-cellulaire. Pour ce faire, nous allons montrer que le foncteur $m_n : \mathbf{\Delta}^n \to \Theta_n$ du paragraphe 1.3.1 est asphérique. Cela résultera par récurrence du fait que, si C est une catégorie totalement asphérique, alors le foncteur $\mu : \mathbf{\Delta} \times C \to \mathbf{\Delta} \wr C$ de ce même paragraphe est asphérique.

5.1. — Soit C une catégorie. Considérons le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta} \times C \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \mathbf{\Delta} \wr C \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathbf{\Delta} & \end{tikzcd},$$

où p_1 désigne la première projection et π le foncteur du paragraphe 1.2.2. Pour tout objet $(\Delta_n; c_1, \dots, c_n)$ de $\mathbf{\Delta} \wr C$, on déduit de ce triangle un foncteur

$$P : (\mathbf{\Delta} \times C)/(\Delta_n; c_1, \dots, c_n) \to \mathbf{\Delta}/\Delta_n.$$

Explicitement, ce foncteur envoie un objet

$$((\Delta_m, c), (\varphi; (f_{i',i})) : (\Delta_m; c, \dots, c) \to (\Delta_n; c_1, \dots, c_n))$$

sur l'objet

$$(\Delta_m, \varphi : \Delta_m \to \Delta_n)$$

et un morphisme (ψ, g) sur le morphisme ψ.

Proposition 5.2. — *Pour toute catégorie C et tout objet $(\Delta_n; c_1, \dots, c_n)$ de $\mathbf{\Delta} \wr C$, le foncteur*

$$P : (\mathbf{\Delta} \times C)/(\Delta_n; c_1, \dots, c_n) \to \mathbf{\Delta}/\Delta_n$$

du paragraphe précédent est une fibration de Grothendieck.

Démonstration. — Le foncteur $p_1 : \mathbf{\Delta} \times C \to \mathbf{\Delta}$ étant une fibration de Grothendieck, c'est un cas particulier du lemme général suivant. $\square$

Lemme 5.3. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un triangle commutatif de foncteurs, avec v une fibration de Grothendieck. Pour tout objet b de B, le foncteur canonique

$$\begin{aligned} A/b &\to C/w(b) \\ (a,f) &\mapsto (v(a), w(f)) \end{aligned}$$

est une fibration de Grothendieck.

Démonstration. — Le foncteur de l'énoncé se factorise comme le composé des foncteurs

$$\begin{aligned} A/b &\to A/w(b) \\ (a,f) &\mapsto (a, w(f)) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} A/w(b) &\to C/w(b) \\ (a,g) &\mapsto (v(a), g) \end{aligned}$$

et il suffit donc de montrer que chacun de ces foncteurs est une fibration de Grothendieck. On vérifie que toutes les flèches de A/b sont cartésiennes par rapport au premier foncteur et on en déduit immédiatement que ce premier foncteur est une fibration de Grothendieck. En ce qui concerne le second foncteur, il s'inscrit dans un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A/w(b) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & A \arrow[d, "v"] \\ C/w(b) \arrow[r] & C \end{tikzcd},$$

où les flèches horizontales sont les foncteurs d'oubli. Ainsi, ce second foncteur s'obtient par changement de base à partir de la fibration de Grothendieck v. C'est donc une fibration de Grothendieck, d'où le résultat. □

Proposition 5.4. — *Pour toute petite catégorie totalement asphérique C, le foncteur*

$$\mu : \mathbf{\Delta} \times C \to \mathbf{\Delta} \wr C$$

est asphérique.

Démonstration. — Soit $(\Delta_n; c_1, \dots, c_n)$ un objet de $\mathbf{\Delta} \wr C$. Il s'agit de montrer que la catégorie $(\mathbf{\Delta} \times C)/(\Delta_n; c_1, \dots, c_n)$ est asphérique. En vertu de la proposition 5.2, le foncteur

$$P : (\mathbf{\Delta} \times C)/(\Delta_n; c_1, \dots, c_n) \to \mathbf{\Delta}/\Delta_n$$

est une fibration de Grothendieck. Si $(\Delta_m, \varphi : \Delta_m \to \Delta_n)$ est un objet de la catégorie but de P, on vérifie immédiatement que la fibre de P en cet objet est la catégorie $C/\prod_{\varphi(0)<i\leqslant\varphi(m)} c_i$. La catégorie C étant supposée totalement asphérique, cette fibre est asphérique et le foncteur P est donc une fibration à fibres asphériques, et par conséquent une équivalence de Thomason (voir [**22**, §1, théorème A, corollaire]). Puisque la catégorie but de P est asphérique (car elle possède un objet final), il en est de même de sa source, ce qu'on voulait montrer. □

Corollaire 5.5. — *Pour tout $n \geqslant 0$, le foncteur*

$$m_n : \mathbf{\Delta}^n \to \Theta_n$$

du paragraphe 1.3.1 est asphérique.

Démonstration. — L'assertion est claire pour $n = 0$. Supposons-la vraie pour un entier n. Par définition, le foncteur m_{n+1} est le composé

$$\mathbf{\Delta}^{n+1} = \mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}^n \xrightarrow{\mathbf{\Delta} \times m_n} \mathbf{\Delta} \times \Theta_n \xrightarrow{\mu} \mathbf{\Delta} \wr \Theta_n = \Theta_{n+1} .$$

Par récurrence, le foncteur m_n est asphérique. Il en est donc de même du foncteur $\mathbf{\Delta} \times m_n$, les foncteurs asphériques étant stables par produit (voir par exemple [**21**, corollaire 1.1.6]). Par ailleurs, puisque la catégorie Θ_n est totalement asphérique d'après le théorème 4.16, il résulte de la proposition précédente que le foncteur $\mu : \mathbf{\Delta} \times \Theta_n \to \mathbf{\Delta} \wr \Theta_n$ est asphérique. L'assertion est donc conséquence de la stabilité des foncteurs asphériques par composition (voir par exemple [**21**, proposition 1.1.8]). □

Théorème 5.6. — *Pour tout $n \geqslant 0$, le nerf n-simplicial et le nerf n-cellulaire sont équivalents au sens où les foncteurs composés*

$$n\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N_{\mathbf{\Delta}^n}} \widehat{\mathbf{\Delta}^n} \xrightarrow{k_{\mathbf{\Delta}^n}} \mathsf{Hot} \quad et \quad n\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N_{\Theta_n}} \widehat{\Theta_n} \xrightarrow{k_{\Theta_n}} \mathsf{Hot}$$

sont isomorphes. Plus précisément, la transformation naturelle

$$\lambda_{m_n} : i_{\mathbf{\Delta}^n} N_{\mathbf{\Delta}^n} \Rightarrow i_{\Theta_n} N_{\Theta_n}$$

(voir le paragraphe 4.10) est une équivalence de Thomason argument par argument.

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du corollaire précédent, en vertu de la proposition 4.12 appliquée au triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta}^n \arrow[rr, "m_n"] \arrow[dr, "M_n"'] & & \Theta_n \arrow[dl, "R_n"] \\ & n\text{-}\mathcal{C}at & \end{tikzcd}$$

(voir les paragraphes 1.2.6 et 1.3.1). □

Nous allons maintenant comparer le nerf de Street et le nerf cellulaire.

Lemme 5.7. — *Si C est une n-catégorie, pour $n \geqslant 0$ un entier, alors l'ensemble simplicial NC est asphérique si et seulement si l'ensemble cellulaire $N_\Theta C$ est asphérique.*

Démonstration. — En vertu de la remarque 4.17 (dont le contenu technique est le théorème 3.16), si C est une n-catégorie, l'ensemble simplicial NC est asphérique si et seulement si l'ensemble n-simplicial $N_{\mathbf{\Delta}^n}C$ est asphérique. Par ailleurs, en vertu du théorème précédent, cet ensemble n-simplicial est asphérique si et seulement si l'ensemble n-cellulaire $N_{\Theta_n}C$ est asphérique. Il nous suffit donc de justifier que ce dernier est asphérique si et seulement si l'ensemble cellulaire $N_\Theta C$ est asphérique.

Rappelons que le foncteur d'inclusion $n\text{-}\mathcal{C}at \hookrightarrow \infty\text{-}\mathcal{C}at$ admet un adjoint à gauche $\tau : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to n\text{-}\mathcal{C}at$, le foncteur de *troncation intelligente*. Si A est une ∞-catégorie, on a

$$\tau(A)_k = \begin{cases} A_k & \text{si } 0 \leqslant k < n, \\ A_n/{\sim} & \text{si } k = n, \end{cases}$$

où la relation $\sim$ identifie deux n-cellules reliées par un zigzag de $(n+1)$-cellules. Puisque le foncteur τ est un adjoint à gauche, il commute aux limites inductives et il résulte de la description des objets de Θ comme sommes amalgamées que le foncteur τ envoie Θ dans Θ_n et induit donc un foncteur $\tau_\Theta : \Theta \to \Theta_n$, adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\Theta_n \hookrightarrow \Theta$. Le foncteur τ_Θ étant un adjoint à gauche, il est asphérique et, en vertu de la proposition 4.11, pour tout ensemble n-cellulaire X, le foncteur $\lambda_{\tau_\Theta} : \Theta/\tau^*_\Theta(X) \to \Theta_n/X$ est une équivalence de Thomason. Ainsi, si C est une n-catégorie, l'ensemble n-cellulaire $N_{\Theta_n}C$ est asphérique si et seulement si l'ensemble cellulaire $\tau^*_\Theta(N_{\Theta_n}C)$ est asphérique. Or, il est immédiat, par adjonction, que ce dernier ensemble cellulaire est canoniquement isomorphe au nerf cellulaire $N_\Theta C$ de C, d'où le résultat. $\square$

Théorème 5.8. — *Le nerf de Street et le nerf cellulaire sont équivalents au sens où les foncteurs composés*

$$\infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N} \widehat{\boldsymbol{\Delta}} \xrightarrow{k_{\boldsymbol{\Delta}}} \mathsf{Hot} \quad \textit{et} \quad \infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N_\Theta} \widehat{\Theta} \xrightarrow{k_\Theta} \mathsf{Hot}$$

sont isomorphes. Plus précisément, il existe un zigzag de transformations naturelles de la forme

$$i_{\boldsymbol{\Delta}}N \Rightarrow \bullet \Leftarrow i_\Theta N_\Theta$$

qui sont des équivalences de Thomason argument par argument.

Démonstration. — On va appliquer la proposition 4.13. Soit $n \geqslant 0$ et soit S un objet de Θ. Il nous faut montrer que les ensembles simpliciaux $N\mathcal{O}_n$ et NS, et les ensembles cellulaires $N_\Theta\mathcal{O}_n$ et $N_\Theta S$, sont asphériques. En vertu du lemme précédent, cela équivaut à montrer que $N\mathcal{O}_n$ et $N_\Theta S$ sont asphériques. Or, l'ensemble simplicial $N\mathcal{O}_n$ est contractile en vertu de la proposition A.3, et est donc asphérique. Quant à l'ensemble cellulaire $N_\Theta S$, le nerf cellulaire étant pleinement fidèle, cet ensemble cellulaire est isomorphe au préfaisceau représentable S, qui est asphérique, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 5.9. — *Un ∞-foncteur $u : A \to B$ est une équivalence de Thomason si et seulement si son nerf cellulaire $N_\Theta u : N_\Theta A \to N_\Theta B$ est une équivalence faible d'ensembles cellulaires, au sens du paragraphe 4.4.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du théorème précédent. $\square$

Remarque 5.10. — Dans [**16**], Gagna montre que le nerf de Street $N : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\mathbf{\Delta}}$ induit une équivalence de catégories $\mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{C}at) \to \mathsf{Hot}$ (voir son théorème 5.6), où $\mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{C}at)$ désigne la localisation de la catégorie $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ par la classe des équivalences de Thomason, c'est-à-dire des ∞-foncteurs dont le nerf de Street est une équivalence faible simpliciale. Il résulte donc de notre théorème 5.8 que le nerf cellulaire $N_\Theta : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Theta}$, postcomposé par le foncteur $k_\Theta : \widehat{\Theta} \to \mathsf{Hot}$, induit la même équivalence de catégories $\mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{C}at) \to \mathsf{Hot}$, à isomorphisme près. De plus, la catégorie Θ étant test au sens de Grothendieck (voir [**15**, paragraphe 2.5 et exemple 5.12]), ce dernier foncteur induit une équivalence de catégories $\mathrm{Ho}(\widehat{\Theta}) \to \mathsf{Hot}$, où $\mathrm{Ho}(\widehat{\Theta})$ désigne la catégorie des ensembles cellulaires localisée par rapport aux équivalences faibles d'ensembles cellulaires, et par conséquent le nerf cellulaire induit une équivalence de catégories $\mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{C}at) \to \mathrm{Ho}(\widehat{\Theta})$.

En fait, le caractère fonctoriel de la preuve de Gagna permet d'obtenir un résultat plus fort : le nerf de Street induit une équivalence de $(\infty,1)$-catégories faibles ou de dérivateurs $\mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathcal{C}at) \to \mathsf{Hot}$. On en déduit immédiatement qu'il en est de même du nerf cellulaire.

Par ailleurs, pour $n \geqslant 1$, Gagna montre que le résultat analogue pour la restriction $n\text{-}\mathcal{C}at \hookrightarrow \infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N} \widehat{\mathbf{\Delta}}$ du nerf de Street à $n\text{-}\mathcal{C}at$ est également vrai (voir toujours son théorème 5.6). On obtient ainsi, en vertu de nos théorèmes 3.16 et 5.6 (voir également la remarque 4.17), que les foncteurs nerf de Street, nerf n-simplicial et nerf n-cellulaire,

$$n\text{-}\mathcal{C}at \hookrightarrow \infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N} \widehat{\mathbf{\Delta}}, \quad N_{\mathbf{\Delta}^n} : n\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\mathbf{\Delta}^n}, \quad N_{\Theta_n} : n\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Theta_n},$$

induisent tous les trois la même équivalence de $(\infty,1)$-catégories faibles ou de dérivateurs $\mathrm{Ho}(n\text{-}\mathcal{C}at) \to \mathsf{Hot}$.

6. Deux applications

6.1. — On dira qu'un ∞-foncteur $u : C \to D$ est une *équivalence de Thomason* si son nerf de Street $Nu : NC \to ND$ est une équivalence faible simpliciale.

Théorème 6.2. — *Soit $u : C \to D$ un ∞-foncteur. On suppose que*

(a) *u induit une bijection $\mathsf{Ob}(C) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ob}(D)$;*

(b) *pour tous objets c et c' de C, le ∞-foncteur*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_C(c,c') \to \underline{\mathsf{Hom}}_D(u(c),u(c'))$$

induit par u est une équivalence de Thomason.

Alors u est une équivalence de Thomason.

Démonstration. — Considérons le morphisme $Su : SC \to SD$ d'objets simpliciaux dans $\infty\text{-}\mathcal{C}at$, où S est la construction du paragraphe 3.4. En vertu de la description explicite de cette construction donnée par le corollaire 3.7, la stabilité des équivalences de Thomason par produit fini et somme (par connexité des orientaux) entraîne que ce morphisme est une équivalence de Thomason argument par argument. Autrement dit, le morphisme bisimplicial $NSu : NSC \to NSD$ est une équivalence faible lorsque l'on fixe le premier argument et le lemme bisimplicial implique donc que $\delta^* NSu$ est une équivalence faible simpliciale. Or, en vertu de la proposition 3.13, le nerf de Street Nu est une équivalence faible si et seulement si $\delta^* NSu$ est une équivalence faible, d'où le résultat. □

Corollaire 6.3. — *Soit $u : C \to D$ un ∞-foncteur et soit $n \geqslant 0$. On suppose que*

(a) *pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, le ∞-foncteur u induit une bijection $C_i \to D_i$;*

(b) *pour tout couple x et y de n-cellules parallèles de C, le ∞-foncteur*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_C(x,y) \to \underline{\mathsf{Hom}}_D(u(x),u(y))$$

induit par u est une équivalence de Thomason.

Alors u est une équivalence de Thomason.

Démonstration. — Le théorème précédent est précisément le cas $n = 0$ de cet énoncé. Le cas général s'en déduit par récurrence. En effet, si $n > 0$, pour conclure, en appliquant le théorème précédent, il suffit de montrer que, pour tous objets c et c' de C, le ∞-foncteur $\underline{\mathsf{Hom}}_C(c,c') \to \underline{\mathsf{Hom}}_D(u(c),u(c'))$ est une équivalence de Thomason. Or, l'hypothèse sur u entraîne immédiatement que l'application $\underline{\mathsf{Hom}}_C(c,c')_i \to \underline{\mathsf{Hom}}_D(u(c),u(c'))_i$, qui est induite par l'application $C_{i+1} \to D_{i+1}$, est bijective pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, ainsi que le fait que, pour x et y deux $(n-1)$-cellules parallèles de $\underline{\mathsf{Hom}}_C(c,c')$, le ∞-foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\underline{\mathsf{Hom}}_C(c,c')}(x,y) \to \underline{\mathsf{Hom}}_{\underline{\mathsf{Hom}}_D(u(c),u(c'))}(u(x),u(y)),$$

qui n'est autre que le ∞-foncteur $\underline{\mathsf{Hom}}_C(x,y) \to \underline{\mathsf{Hom}}_D(u(x),u(y))$, est une équivalence de Thomason. On conclut donc en appliquant l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$. □

6.4. — Soit J un sous-ensemble de $\mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. Si C est une ∞-catégorie, on notera $D_J(C)$ la ∞-catégorie obtenue à partir de C en inversant l'orientation des j-cellules pour j dans J. Cette construction définit un foncteur $D_J : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$ qui est un automorphisme involutif de $\infty\text{-}\mathcal{C}at$.

Lemme 6.5. — *Soit J une partie de $\mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. Alors, pour tout objet S de Θ, la ∞-catégorie $D_J(S)$ est dans Θ.*

Démonstration. — Soit S un objet de Θ_n. On va démontrer le résultat par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors $S = \mathrm{D}_0$ et $D_J(\mathrm{D}_0) = \mathrm{D}_0$. Supposons $n \geqslant 1$. En vertu des paragraphes 1.2.5 et 1.2.6, la n-catégorie S est la limite inductive d'un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Sigma' T_n & & \Sigma' T_{n-1} & & \cdots & & \Sigma' T_1 \\
& \mathrm{D}_0 \arrow[ul, "0"] \arrow[ur, "1"'] & & \mathrm{D}_0 \arrow[ul, "0"] & \cdots & \mathrm{D}_0 \arrow[ur, "1"'] &
\end{tikzcd},$$

où $T_1, \dots, T_n$ sont des objets de Θ_{n-1}, ce qu'on écrira

$$S \simeq \Sigma' T_n \amalg_{\mathrm{D}_0} \cdots \amalg_{\mathrm{D}_0} \Sigma' T_1.$$

Si J' est une partie de $\mathbb{N} \smallsetminus \{0, 1\}$, il est immédiat que pour toute ∞-catégorie C, on a

$$D_{J'}(\Sigma' C) = \Sigma'(D_{J'-1}(C)),$$

où $J' - 1 = \{j - 1 \mid j \in J'\}$. Par ailleurs, on a

$$D_{\{1\}}(\Sigma' C) \simeq \Sigma' C,$$

mais les ∞-foncteurs $0, 1 : \mathrm{D}_0 \to \Sigma' C$ sont échangés à travers cet isomorphisme. Ainsi, en posant $K = \{j - 1 \mid j \in J, j > 1\}$ et en utilisant le fait que D_J commute aux limites inductives, on obtient, si 1 n'appartient pas à J,

$$D_J(S) \simeq \Sigma'(D_K(T_n)) \amalg_{\mathrm{D}_0} \cdots \amalg_{\mathrm{D}_0} \Sigma'(D_K(T_1))$$

et, si 1 appartient à J,

$$D_J(S) \simeq \Sigma'(D_K(T_1)) \amalg_{\mathrm{D}_0} \cdots \amalg_{\mathrm{D}_0} \Sigma'(D_K(T_n)),$$

d'où le résultat par récurrence. □

Théorème 6.6. — *Soit $u : C \to D$ un ∞-foncteur et soit J une partie de $\mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. Alors u est une équivalence de Thomason si et seulement si $D_J(u)$ en est une.*

Démonstration. — En vertu du corollaire 5.9, il suffit de montrer que $N_\Theta u$ est une équivalence faible cellulaire si et seulement si $N_\Theta D_J(u)$ en est une. D'après le lemme précédent, la dualité D_J induit un automorphisme de Θ, qu'on notera d_J. Le foncteur d_J étant un isomorphisme, il est asphérique et on peut donc appliquer la proposition 4.12 au triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \Theta \arrow[rr, "d_J"] \arrow[dr, "d_J R"'] & & \Theta \arrow[dl, "R"] \\ & \infty\text{-}\mathcal{C}at & \end{tikzcd},$$

où R est le foncteur induisant le nerf cellulaire. Or, le foncteur nerf N_{Rd_J} associé à Rd_J n'est autre que $N_\Theta D_J$ puisque, si A est une ∞-catégorie et S un objet de Θ, on a

$$\begin{aligned} N_{Rd_J}(A)_S &= \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(Rd_J(S), A) = \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(D_J R(S), A) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(R(S), D_J(A)) = N_\Theta(D_J(A))_S. \end{aligned}$$

La proposition 4.12 entraîne ainsi que les foncteurs $k_\Theta N_\Theta$ et $k_\Theta N_\Theta D_J$ sont isomorphes et donc le résultat. □

Corollaire 6.7. — *Soit J une partie de $\mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. Le foncteur*

$$\infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{D_J} \infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N} \widehat{\mathbf{\Delta}} \xrightarrow{k_{\mathbf{\Delta}}} \mathsf{Hot}$$

est isomorphe au foncteur

$$\infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{N} \widehat{\mathbf{\Delta}} \xrightarrow{k_{\mathbf{\Delta}}} \mathsf{Hot}\ .$$

Plus précisément, il existe un zigzag de transformations naturelles de la forme

$$i_{\mathbf{\Delta}} N D_J \Rightarrow \bullet \Leftarrow i_{\mathbf{\Delta}} N$$

qui sont des équivalences de Thomason argument par argument.

En particulier, si C est une ∞-catégorie, alors les ensembles simpliciaux NC et $N(D_J(C))$ ont même type d'homotopie.

Démonstration. — Il est immédiat que le foncteur ND_J est le foncteur nerf associé à l'objet cosimplicial

$$\mathcal{O}_J : \mathbf{\Delta} \xrightarrow{\mathcal{O}} \infty\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{D_J} \infty\text{-}\mathcal{C}at\ .$$

Ainsi, le théorème précédent affirme précisément que les foncteurs nerf associés aux objets cosimpliciaux $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_J$ définissent les mêmes équivalences faibles sur $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ au sens de la condition (c) du corollaire 4.14. Le résultat est donc conséquence de ce même corollaire. □

Dans [**5**] et [**6**], nous avons établi un théorème A de Quillen ∞-catégorique pour les tranches au-dessous. (On renvoie à la section 6 de [**7**] pour la définition des tranches et en particulier au paragraphe 6.31 et à la remarque 6.37.) Les tranches au-dessus s'obtenant par dualité à partir des tranches au-dessous, on en déduit, en utilisant le théorème précédent, un théorème A pour les tranches au-dessus :

Corollaire 6.8. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Swarrow}"] & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un triangle de ∞-foncteurs commutatif à une transformation oplax α près. Si pour tout objet c de C, le ∞-foncteur canonique $(u, \alpha)/c : A/c \to B/c$ est une équivalence de Thomason, alors il en est de même de u.

Démonstration. — Pour D une ∞-catégorie, on notera D° le dual total de D, c'est-à-dire la ∞-catégorie $D_{\mathbb{N} \smallsetminus \{0\}}(C)$. Si $\beta : \mathrm{D}_1 \otimes D \to E$ est une transformation oplax d'un ∞-foncteur $f : D \to E$ vers un ∞-foncteur $g : D \to E$, alors, en vertu de l'isomorphisme canonique $(\mathrm{D}_1 \otimes D)^\circ \simeq \mathrm{D}_1^\circ \otimes D^\circ$ (voir [**7**, proposition A.22]), le ∞-foncteur β° définit une transformation oplax de $g^\circ : D^\circ \to E^\circ$ vers $f^\circ : D^\circ \to E^\circ$. Ainsi, en appliquant la dualité totale au triangle de l'énoncé, on obtient un triangle

$$\begin{tikzcd} A^\circ \arrow[rr, "u^\circ"] \arrow[dr, "v^\circ"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha^\circ}{\Nearrow}"] & B^\circ \arrow[dl, "w^\circ"] \\ & C^\circ & \end{tikzcd},$$

commutant à une transformation oplax près. Par ailleurs, en vertu de [**7**, remarque 6.37], si D est une ∞-catégorie au-dessus de C, alors, pour tout objet c de C, on a un isomorphisme canonique $(D/c)^\circ \simeq c\backslash D^\circ$. De plus, le ∞-foncteur $((u,\alpha)/c)^\circ : (A/c)^\circ \to (B/c)^\circ$ s'identifie au ∞-foncteur $c\backslash(u^\circ,\alpha^\circ) : c\backslash A^\circ \to c\backslash B^\circ$. Ainsi, puisque, en vertu du théorème précédent, les équivalences de Thomason sont stables par la dualité totale, l'hypothèse de l'énoncé est équivalente au fait que, pour tout objet c de C, le ∞-foncteur $c\backslash(u^\circ,\alpha^\circ) : c\backslash A^\circ \to c\backslash B^\circ$ est une équivalence de Thomason, c'est-à-dire à l'hypothèse du théorème A pour les tranches au-dessous (voir [**6**, théorème 7.8]). On peut donc appliquer ce théorème A et on obtient que le ∞-foncteur u° est une équivalence de Thomason. En appliquant de nouveau le théorème précédent, on en déduit que u est une équivalence de Thomason, ce qu'on voulait démontrer. □

De même, dans [**2**], le premier auteur a démontré un théorème B de Quillen ∞-catégorique pour les tranches au-dessous. On en déduit un théorème B pour les tranches au-dessus :

Corollaire 6.9. — *Soit $u : A \to B$ un ∞-foncteur tel que, pour toute 1-cellule $f : b \to b'$ de B, le ∞-foncteur canonique $A/f : A/b \to A/b'$ soit une équivalence de Thomason. Alors, pour tout objet b de B, le carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r] \arrow[d, "u/b"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "u"] \\ B/b \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

où les flèches horizontales sont les ∞-foncteurs d'oubli, est un carré homotopiquement cartésien.

Démonstration. — Le résultat se déduit de l'énoncé analogue pour les tranches au-dessous (voir [**2**, corollaire 3.11]) en utilisant le théorème 6.6, comme dans la preuve précédente. Plus précisément, on applique cet énoncé au foncteur u°, les hypothèses étant vérifiées en vertu de la stabilité des équivalences de Thomason par dualité, et on obtient que le carré qui se déduit du carré de l'énoncé en appliquant la dualité totale est homotopiquement cartésien. Or, le foncteur dual total étant une involution préservant les équivalences faibles, il respecte les carrés homotopiquement cartésiens, et le carré de l'énoncé est donc bien homotopiquement cartésien. □

Remarque 6.10. — Les deux corollaires précédents sont des exemples de résultats qui se déduisent de le stabilité des équivalences de Thomason par dualité. Dans [**6**] et [**2**], nous avons annoncé un certain nombre d'autres tels résultats ; ceux-ci se démontrent tous de manière similaire aux deux corollaires précédents. On renvoie en particulier aux remarques 5.28 et 7.13 de [**6**] et aux remarques 3.16 et 4.5 de [**2**].

Appendice A. Rétractes par transformation

Le but de cet appendice est de rappeler les définitions et quelques propriétés des rétractes par transformation lax et oplax, et de démontrer un des points clés de la preuve de la proposition 3.12, à savoir que le ∞-foncteur canonique $\mathcal{O}_n \to \Delta_n$ qui y est considéré est la rétraction d'un rétracte par transformation oplax triviale sur les objets.

A.1. — Soit $i : A \to B$ un ∞-foncteur. On dit que i est un *rétracte par transformation oplax* si i admet une rétraction $r : B \to A$ (c'est-à-dire un ∞-foncteur vérifiant $ri = 1_A$) pour laquelle il existe une transformation oplax α entre ir et 1_B. Dans une telle situation, on dit aussi que r est la *rétraction d'un rétracte par transformation oplax*. On parle de *rétracte par transformation oplax triviale sur les objets* si la transformation oplax entre ir et 1_B peut être choisie triviale sur les objets (au sens introduit au paragraphe 2.9).

On définit des variantes lax de ces notions en remplaçant la transformation oplax α par une transformation lax.

Théorème A.2. — *Soit $i : A \to B$ un rétracte par transformation lax ou oplax. Alors $Ni : NA \to NB$ est un rétracte par déformation simplicial et en particulier une équivalence faible.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de [**6**, théorème A.11] dans le cas oplax et de [**6**, paragraphe A.18] dans le cas lax. □

La preuve de la proposition 3.12 s'appuie sur l'existence de deux rétractes par transformation :

Proposition A.3. — *Pour tout $n \geqslant 0$, l'unique ∞-foncteur $\mathcal{O}_n \to \Delta_0$ est la rétraction d'un rétracte par transformation lax. En particulier, l'ensemble simplicial $N\mathcal{O}_n$ est contractile.*

Démonstration. — L'assertion sur le ∞-foncteur $\mathcal{O}_n \to \Delta_0$ résulte de [**6**, proposition 5.16] et de [**7**, remarque B.4.11]. Le fait que $N\mathcal{O}_n$ est contractile est alors conséquence du théorème précédent. □

Proposition A.4. — *Pour tout $n \geqslant 0$, le ∞-foncteur canonique $\mathcal{O}_n \to \Delta_n$ (voir le paragraphe 3.11) est la rétraction d'un rétracte par transformation oplax triviale sur les objets.*

Démonstration. — Appelons r le ∞-foncteur de l'énoncé. Ce foncteur admet une unique section $s : \Delta_n \to \mathcal{O}_n$. Explicitement, celle-ci envoie, pour $0 \leqslant i < n$, l'unique flèche de i vers $i + 1$ dans Δ_n sur l'unique 1-cellule de i vers $i + 1$ dans $\mathcal{O}_n$. Nous allons construire une transformation oplax $\alpha : 1_{\mathcal{O}_n} \Rightarrow sr$. Puisque pour tout objet i

de $\mathcal{O}_n$, l'unique 1-cellule de i vers i est 1_i, une telle transformation sera nécessairement triviale sur les objets.

Pour construire α, nous allons utiliser la théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner [**23**]. Rappelons qu'un *complexe dirigé augmenté* est un complexe de chaînes C de groupes abéliens en degrés positifs, muni d'une augmentation et, pour tout $p \geqslant 0$, d'un sous-monoïde C^*_p de C_p des p-chaînes *positives.* Les *morphismes de complexes dirigés augmentés* sont les morphismes de complexes de chaînes augmentés qui envoient les chaînes positives sur des chaînes positives. On obtient ainsi une catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{da}}$. Dans [**23**], Steiner construit un foncteur de « linéarisation » $\lambda : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{C}_{\mathrm{da}}$ dont nous ne rappellerons pas la définition générale. Notons simplement que dans le cas d'une ∞-catégorie C libre au sens des polygraphes (c'est le cas de $\mathcal{O}_n$), les p-chaînes de $\lambda(C)$ sont librement engendrées par les générateurs de dimension p de C et la différentielle est donnée par le but moins la source.

Ainsi, le complexe dirigé augmenté $\lambda(\mathcal{O}_n)$ se décrit de la manière suivante :

- Le complexe de chaînes sous-jacent est le complexe de chaînes normalisé associé à l'ensemble simplicial Δ_n. Ainsi, $\lambda(\mathcal{O}_n)_p$ est le groupe abélien libre sur l'ensemble
$$\{(i_0, \dots, i_p) \mid 0 \leqslant i_0 < \cdots < i_p \leqslant n\}$$
et la différentielle, pour $p \geqslant 1$, est définie par
$$d(i_0, \dots, i_p) = \sum_{l=0}^{p} (-1)^l (i_0, \dots, \hat{i_l}, \dots, i_p),$$
où $(i_0, \dots, \hat{i_l}, \dots, i_p) = (i_0, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_p)$.
- L'augmentation $e : \lambda(\mathcal{O}_n)_0 \to \mathbb{Z}$ envoie (i_0) sur 1.
- Enfin, le sous-monoïde $\lambda(\mathcal{O}_n)^*_p$ consiste en l'ensemble des p-chaînes dont les coefficients sont positifs (au sens large).

Quant au morphisme $\lambda(sr) : \lambda(\mathcal{O}_n) \to \lambda(\mathcal{O}_n)$, puisque le ∞-foncteur sr est l'identité sur les objets, envoie pour tout $0 \leqslant i < j \leqslant n$ la flèche « directe » (i, j) de i vers j dans $\mathcal{O}_n$ sur le composé $(j-1, j)(j-2, j-1) \cdots (i, i+1)$ et envoie toute cellule de dimension au moins 2 sur une identité, on a
$$\lambda(sr)(i_0, \dots, i_p) = \begin{cases} (i_0) & \text{si } p = 0, \\ \sum_{i_0 < k \leqslant i_1} (k-1, k) & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{si } p \geqslant 2. \end{cases}$$

En vertu de [**7**, proposition B.4.7 et théorème 2.11], la donnée d'une transformation oplax de $1_{\mathcal{O}_n}$ vers sr est équivalente à celle d'une homotopie de $1_{\lambda(\mathcal{O}_n)}$ vers $\lambda(sr)$, une homotopie entre morphismes de complexes dirigés augmentés étant simplement une homotopie entre les morphismes de complexes de chaînes sous-jacents qui envoie les chaînes positives sur des chaînes positives. Il nous suffit donc de définir une telle homotopie.

Posons

$$h(i_0, \dots, i_p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0, \\ \sum_{i_0 < k < i_1} (k-1, k, i_1, \dots, i_p) & \text{si } p \geqslant 1. \end{cases}$$

Par définition, h envoie bien les chaînes positives sur des chaînes positives et il s'agit de vérifier que h est une homotopie de complexes de chaînes.

– Si $p = 0$, on a

$$dh(i_0) = d(0) = 0 = (i_0) - (i_0) = \lambda(sr)(i_0) - 1_{\lambda(\mathcal{O}_n)}(i_0).$$

– Si $p = 1$, on a

$$\begin{aligned} dh(i_0, i_1) + hd(i_0, i_1) &= \sum_{i_0 < k < i_1} d(k-1, k, i_1) + h(i_1) - h(i_0) \\ &= \sum_{i_0 < k < i_1} (k, i_1) - \sum_{i_0 < k < i_1} (k-1, i_1) + \sum_{i_0 < k < i_1} (k-1, k) \\ &= (i_1 - 1, i_1) - (i_0, i_1) + \sum_{i_0 < k < i_1} (k-1, k) \\ &= \sum_{i_0 < k \leqslant i_1} (k-1, k) - (i_0, i_1) \\ &= \lambda(sr)(i_0, i_1) - 1_{\lambda(\mathcal{O}_n)}(i_0, i_1). \end{aligned}$$

– Enfin, si $p \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} dh(i_0, \dots, i_p) &= \sum_{i_0 < k < i_1} d(k-1, k, i_1, \dots, i_p) \\ &= \sum_{i_0 < k < i_1} (k, i_1, \dots, i_p) - \sum_{i_0 < k < i_1} (k-1, i_1, \dots, i_p) \\ &\qquad + \sum_{i_0 < k < i_1} \sum_{l=1}^{p} (-1)^{l+1} (k-1, k, i_1, \dots, \hat{i_l}, \dots, i_p) \\ &= (i_1 - 1, i_1, \dots, i_p) - (i_0, i_1, \dots, i_p) \\ &\qquad + \sum_{i_0 < k < i_1} \sum_{l=1}^{p} (-1)^{l+1} (k-1, k, i_1, \dots, \hat{i_l}, \dots, i_p) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
hd(i_0,\dots,i_p) &= \sum_{l=0}^{p}(-1)^l h(i_0,\dots,\hat{i_l},\dots,i_p)\\
&= \sum_{i_1<k<i_2}^{p}(k-1,k,i_2,\dots,i_p) - \sum_{i_0<k<i_2}^{p}(k-1,k,i_2,\dots,i_p)\\
&\qquad + \sum_{l=2}^{p}(-1)^l \sum_{i_0<k<i_1}(k-1,k,i_1,\dots,\hat{i_l},\dots,i_p)\\
&= -\sum_{i_0<k\leqslant i_1}^{p}(k-1,k,i_2,\dots,i_p)\\
&\qquad + \sum_{l=2}^{p}(-1)^l \sum_{i_0<k<i_1}(k-1,k,i_1,\dots,\hat{i_l},\dots,i_p)\\
&= -(i_1-1,i_1,i_2,\dots,i_p)\\
&\qquad + \sum_{l=1}^{p}(-1)^l \sum_{i_0<k<i_1}(k-1,k,i_1,\dots,\hat{i_l},\dots,i_p),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
dh(i_0,\dots,i_p)+hd(i_0,\dots,i_p) &= -(i_0,\dots,i_p)\\
&= \lambda(sr)(i_0,\dots,i_p) - 1_{\lambda(\mathcal{O}_n)}(i_0,\dots,i_p).
\end{aligned}$$

Ceci achève de montrer que h est bien une homotopie et démontre donc l'assertion. □

Références

[1] D. Ara – « Structures de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie des 2-catégories strictes », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **56** (2015), no. 2, p. 83–108.

[2] ———, « A Quillen Theorem B for strict ∞-categories », *J. Lond. Math. Soc. (2)* **100** (2019), no. 2, p. 470–497.

[3] D. Ara & G. Maltsiniotis – « Vers une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie des n-catégories strictes », *Adv. Math.* **259** (2014), p. 557–654.

[4] ———, « Le type d'homotopie de la ∞-catégorie associée à un complexe simplicial », Prépublication, 2015.

[5] ———, « Un théorème A de Quillen pour les ∞-catégories strictes I : la preuve simpliciale », *Adv. Math.* **328** (2018), p. 446–500.

[6] ———, « Un théorème A de Quillen pour les ∞-catégories strictes II : la preuve ∞-catégorique », *High. Struct.* **4** (2020), no. 1, p. 284–388.

[7] ———, « Joint et tranches pour les ∞-catégories strictes », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* **165** (2020).

[8] C. Berger – « Iterated wreath product of the simplex category and iterated loop spaces », *Adv. Math.* **213** (2007), no. 1, p. 230–270.

[9] A. K. Bousfield & D. M. Kan – *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 304, Springer-Verlag, 1972.

[10] M. Bullejos & A. M. Cegarra – « On the geometry of 2-categories and their classifying spaces », *K-Theory* **29** (2003), no. 3, p. 211–229.

[11] P. Carrasco, A. M. Cegarra & A. R. Garzón – « Nerves and classifying spaces for bicategories », *Algebr. Geom. Topol.* **10** (2010), no. 1, p. 219–274.

[12] A. M. Cegarra & B. A. Heredia – « Comparing geometric realizations of tricategories », *Algebr. Geom. Topol.* **14** (2014), no. 4, p. 1997–2064.

[13] D.-C. Cisinski – « Le localisateur fondamental minimal », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **45** (2004), no. 2, p. 109–140.

[14] ———, « Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie », *Astérisque* (2006), no. 308, p. xxiv+390.

[15] D.-C. Cisinski & G. Maltsiniotis – « La catégorie Θ de Joyal est une catégorie test », *J. Pure Appl. Algebra* **215** (2011), no. 5, p. 962–982.

[16] A. Gagna – « Strict n-categories and augmented directed complexes model homotopy types », *Adv. Math.* **331** (2018), p. 542–564.

[17] A. Grothendieck – « Pursuing stacks », Manuscrit, 1983, édité par G. Maltsiniotis et B. Toën, à paraître dans *Documents Mathématiques*.

[18] L. Illusie – *Complexe cotangent et déformations II*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 283, Springer-Verlag, 1972.

[19] A. Joyal – « Disks, duality and Θ-categories », Prépublication, 1997.

[20] S. Lack – « Icons », *Appl. Categ. Structures* **18** (2010), no. 3, p. 289–307.

[21] G. Maltsiniotis – « La théorie de l'homotopie de Grothendieck », *Astérisque* (2005), no. 301, p. vi+140.

[22] D. G. Quillen – « Higher algebraic K-theory. I », in *Algebraic K-theory I: Higher K-theories* (H. Bass, éd.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 341, Springer-Verlag, 1973, p. 85–147.

[23] R. Steiner – « Omega-categories and chain complexes », *Homology Homotopy Appl.* **6** (2004), no. 1, p. 175–200.

[24] R. Street – « The algebra of oriented simplexes », *J. Pure Appl. Algebra* **49** (1987), no. 3, p. 283–335.

Dimitri Ara, Aix Marseille Univ, CNRS, I2M, Marseille, France
E-mail : `dimitri.ara@univ-amu.fr`
Url : `http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/dimitri.ara/`

Georges Maltsiniotis, Université Paris Cité, CNRS, IMJ, Paris, France
E-mail : `georges.maltsiniotis@imj-prg.fr`
Url : `https://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsiniotis/`