Calcul des séquents

On considère ici un système de calcul de séquents minimaliste pour la logique classique propositionnelle. On se donne un ensemble de variables propositionnelles, notées par des minuscules a, b, c. Les formules sont construites de la façon suivante :

- si a est une variable propositionnelle, alors a et $\bar{a}$ sont des formules,
- si A et B sont des formules, alors $A \wedge B$ et $A \vee B$ sont des formules.

On définit sur ces formules une opération de négation, notée $\neg A$, par induction :

$$\neg a := \bar{a} \qquad \neg \bar{a} := a \qquad \neg(A \wedge B) := (\neg A) \vee (\neg B) \qquad \neg(A \vee B) := (\neg A) \wedge (\neg B)$$

ce qui implique, incidemment, que $\neg\neg A$ et A sont la même formule.

Un séquent est une suite finie de fomules, considérée à permutation près. On se donne quatre règles d'inférence :

$$\frac{}{\vdash a, \bar{a}}\ \text{ax} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B}\ \wedge \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B}\ \vee \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, a}\ \text{w}$$

On a donc une règle d'axiome valable uniquement pour les formules atomiques, un règle d'affaiblissement avec la même contrainte, ainsi qu'un règle de conjonction de forme additive et une règle de disjonction de forme multiplicative.

La notation $\overset{\pi}{\vdash \Gamma}$ signifie que π est une preuve de conclusion $\vdash \Gamma$.

1. Montrer que l'affaiblissement est admissible pour toutes les formules, c'est-à-dire qu'une preuve de conclusion $\vdash \Gamma$ peut être transformée en une preuve de conclusion $\vdash \Gamma, A$ pour une une formule arbitraire A.

   On emploiera la notation

   $$\frac{\overset{\pi}{\vdash \Gamma}}{\vdash \Gamma, A}\ \text{W}$$

   pour représenter la preuve obtenue à partir de π par cette transformation. On s'autorisera donc à utiliser cette fausse règle W comme s'il s'agissait d'une vraie ; toutes les preuves restent construites avec les quatre règles de base.
2. Montrer que, pour toute formule A, le séquent $\vdash \neg A, A$ est démontrable.
3. Montrer que la disjonction est *réversible*, c'est-à-dire que toute preuve π de conclusion $\vdash \Gamma, A \vee B$ peut être transformée, en changeant l'ordre des règles, en une preuve π' de même conclusion où $A \vee B$ est introduit par la dernière règle.
4. Montrer qu'il en est de même pour la conjonction.
5. Montrer que la règle de contraction suivante est admissible :

   $$\frac{\vdash \Gamma, A, A}{\vdash \Gamma, A}\ \text{C}$$

   On pourra commencer par le cas où A est atomique puis généraliser en utilisant la réversibilité.
6. Montrer que la règle de coupure suivante est admissible :

   $$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, \neg A}{\vdash \Gamma}\ \text{cut}$$
7. En déduire qu'une formule est démontrable dans ce système si et seulement si elle l'est dans LK.
8. Montrer que ce n'est plus le cas si on enlève la règle w du système.