## Exercice 1 : Machines de Turing et arithmétique de Peano

On rappelle que $\Delta_0$ désigne l'ensemble des formules arithmétiques à quantification bornée et que $\Sigma_1$ désigne l'ensemble des formules qui s'écrivent $\exists t\, A$ pour une certaine formule $A \in \Delta_0$ (à équivalence logique près).

**1.** Montrer que les énoncés suivants peuvent s'exprimer dans $\Delta_0$ :

- **a.** « $q$ est le quotient de $a$ par $b$ dans la division euclidienne »
- **b.** « $r$ est le reste dans la division euclidienne de $a$ par $b$ »
- **c.** « $a$ est un carré »
- **d.** « $a$ est une puissance de 2 »
- **e.** « $a$ est une puissance de 4 »

Soit $M$ une machine de Turing à un ruban sur un alphabet à $k$ lettres. Pour simplifier les notations, on suppose que

- l'alphabet est l'ensemble $\{0, \ldots, k-1\}$ et 0 est le symbole utilisé pour les cases vides,
- l'ensemble des états de $M$ est un sous-ensemble (forcément fini) de $\mathbb{N}$.

Si $c$ est une configuration de $M$ où l'état est $q$, la tête est en position $p$ et où pour chaque $i \in \mathbb{Z}$ la case d'indice $i$ du ruban contient la lettre $a_i$, alors on représente $c$ par le quadruplet $(q, p, L, R)$ où $R = \sum_{i \geq p} a_i k^{i-p}$ et $L = \sum_{i<p} a_i k^{p-1-i}$.

**2.** Montrer que cette représentation est bien définie et injective.

**3.** Montrer que les énoncés suivants peuvent s'exprimer par des formules de $\Delta_0$ (dont l'écriture précise dépend bien sûr de $M$) :

- **a.** « dans la configuration $(q, p, L, R)$, la lettre présente à la position de la tête de lecture est $a$ »
- **b.** « la configuration $(q, p, L, R)$ est finale »
- **c.** « la configuration qui suit $(q, p, L, R)$ est $(q', p', L', R')$ »

**4.** On suppose que la machine $M$ calcule une fonction sur les entiers, pour une représentation raisonnable des nombres entiers (c'est-à-dire dans une base $b$ donnée, de sorte que l'alphabet de la machine contient au moins les chiffres de 0 à $b-1$). Justifier que l'énoncé « $(q, p, L, R)$ est la configuration initiale pour l'entrée $n$ » s'exprime par une formule $\Sigma_1$.

**5.** En déduire que l'énoncé « sur l'entrée $n$, la machine $M$ termine et donne la valeur $m$ » peut être exprimé en arithmétique par un énoncé $\Sigma_1$.

**6.** Déduire finalement qu'une fonction (éventuellement partielle) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est calculable par une machine de Turing si et seulement si elle est récursive.