

Chapitre 1

Suites numériques

Sommaire

1.1	Convergence	2
1.2	Calcul sur les limites	3
1.3	Tendre vers l'infini	5
1.4	Critères de convergence	6
1.5	Comparaison asymptotique	9
1.6	Notations de Landau	13

L'expression « suite numérique » fait référence aux suites dont les valeurs sont des *nombre*s, c'est-à-dire principalement des nombres réels, parfois complexes. On ne parlera pas dans ce cours de suites d'autres objets (vecteurs, matrices, fonctions, espaces...) même si de telles suites sont utiles en mathématiques.

1.1 **Définition.** Une *suite numérique* est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou éventuellement $\mathbb{C}$). Si u est une telle suite et i est un entier, le réel $u(i)$ est le *terme de rang i* et on le note en général u_i .

1.2 On parle de *terme général* pour désigner une formule qui dépend de l'indice et qui donne la valeur d'un terme en fonction de l'indice. Par exemple, la « suite de terme général $n^2 - 3$ » est la suite u telle que pour tout n on a $u_n = n^2 - 3$. Souvent, on note (u_n) la suite de terme général u_n , ou éventuellement $(u_n)_n$ pour insister sur le fait que n est l'indice. Par exemple, $(n + k)_n$ est la suite de premiers termes $k, k + 1, k + 2, \dots$ alors que la suite $(n + k)_k$ est la suite de premiers termes $n, n + 1, n + 2, \dots$.

Quand on parle de suites, on s'intéresse principalement à leur comportement lorsque l'indice tend vers l'infini. En termes techniques, on parle de comportement *asymptotique*. Les principales questions que l'on se pose sont :

- est-ce qu'une suite s'approche indéfiniment d'une valeur limite, et à quelle vitesse ?
- est-ce que deux suites données se comportent essentiellement de la même façon ?
- est-ce que telle suite croît beaucoup plus vite que telle autre ?

Dans la suite de ce chapitre, on abordera ces questions en définissant précisément ces notions, ce qui est indispensable pour espérer pouvoir y répondre, et en étudiant des techniques classiques permettant d'y répondre.

1.3 Il est parfois plus pratique de considérer des suites dont l'ensemble de départ n'est pas $\mathbb{N}$ tout entier mais par exemple $\mathbb{N}^*$ ou $\{5, 6, 7, 8, \dots\}$. Par exemple, la suite de terme

général $1/n$ ne peut pas être définie en 0. Comme on s'intéresse au comportement à l'infini, les premiers termes n'ont de toute façon pas d'importance. Si l'on veut préciser le domaine d'une suite de façon explicite, on peut employer la notation $(1/n)_{n \geq 1}$ qui désigne « la suite de terme général $1/n$ définie sur les entiers n tels que $n \geq 1$ ».

1.1 Convergence

L'idée intuitive de limite dit qu'une suite (u_n) tend vers une limite ℓ si ses valeurs sont de plus en plus proches de ℓ à mesure que n tend vers l'infini. La définition suivante n'est autre qu'une formalisation de cette idée.

- 1.4 **Définition (convergence).** On dit qu'une suite (u_n) tend vers une limite ℓ (ou converge vers ℓ) si pour toute distance $\varepsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Dans cet énoncé, la distance ε est un réel strictement positif quelconque et le rang est un entier naturel qui dépend de cette distance. On dit donc que les valeurs de la suite sont à une distance inférieure à ε de ℓ partir du rang N , et que l'on peut trouver un rang N quel que soit le choix de distance ε , aussi petit soit-il.

- 1.5 *Exemple.* La suite de terme général $1/n$ tend vers 0.

Démontrons-le formellement. Pour cela, soit ε un réel strictement positif. Son inverse $1/\varepsilon$ est bien défini et c'est un réel strictement positif. Posons $N := \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$ (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x), alors pour tout entier $n \geq N$ on a $n \geq \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1 > 1/\varepsilon$ donc $|1/n - 0| = 1/n \leq \varepsilon$. Ainsi, par définition, $1/n$ tend vers 0.

- 1.6 Quand on parle de suites, la notion de limite n'a de sens que pour n allant vers l'infini parce que les entiers sont tous « isolés ». En effet, si l'on se demandait quel est la limite d'un certain u_n lorsque n tend vers 42, en appliquant l'idée intuitive de limite on se retrouverait à se demander quel est le comportement de u_n à mesure que l'entier n s'approche de plus en plus de l'entier 42, or la seule façon de s'approcher de 42 en restant dans l'ensemble des nombres entiers est de prendre la valeur 42 et de ne plus varier. Ainsi on a une suite qui finit par être constante et la notion de convergence n'a plus d'intérêt. Par conséquent on parlera simplement de limite et de convergence sans préciser « quand n tend vers l'infini » car c'est toujours le cas.

- 1.7 **Théorème (unicité de la limite).** Soient une suite (u_n) et deux réels ℓ et m . Si (u_n) tend vers ℓ et vers m , alors $\ell = m$.

Démonstration. Soit un réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme (u_n) tend vers ℓ , en appliquant la définition de la convergence avec la distance $\varepsilon/2$ on obtient qu'il existe un rang N tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$ pour tout $n \geq N$. De même, comme (u_n) tend vers m , il existe un rang M tel que $|u_n - m| \leq \varepsilon/2$ pour tout $n \geq M$. Ces deux inégalités s'appliquent si n vérifie à la fois $n \geq N$ et $n \geq M$, c'est le cas par exemple si l'on pose $n = \max(M, N)$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a alors

$$|\ell - m| \leq |\ell - u_n| + |u_n - m| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Par conséquent, $|\ell - m|$ est strictement inférieur à tout réel ε strictement positif. Comme on a forcément $|\ell - m| \geq 0$, on a nécessairement $|\ell - m| = 0$, d'où on déduit $\ell = m$. $\square$

Le fait de poser un ε arbitraire puis d'appliquer la définition de la convergence avec des fractions de cet ε comme distances pour finalement obtenir une majoration par ε en ajoutant des fractions d' ε est une technique omniprésente, on parle familièrement de « découper des ε ». Souvent, on construit une démonstration en appliquant la définition de la convergence à des valeurs indéterminées pour ε puis on se retrouve en fin de compte avec une majoration par une somme et on choisit les valeurs pour que cette somme tombe sur la valeur attendue.

1.8 **Définition.** Si une suite $(u_n)_n$ tend vers un certain réel, on désigne celui-ci par la notation « $\lim_n u_n$ ». On peut simplifier la notation en $\lim u_n$ s'il est clair que la variable est n . D'après le **théorème d'unicité de la limite**, il n'y a pas d'ambiguïté puisqu'une suite donnée ne peut tendre que vers au plus une valeur.

1.9 Rien ne garantit l'existence d'une limite en général. Par conséquent, la notation $\lim u_n$ n'a de sens que si l'on a établi la convergence de la suite (u_n) .

1.10 Dans le cas des suites on ne notera jamais $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ car la notion de convergence n'a d'intérêt qu'à l'infini dans le cas de suites, comme on l'a déjà observé dans la **remarque 1.6**.

1.2 Calcul sur les limites

On va maintenant établir les règles usuelles de calcul avec les limites, dans le cas de suites convergentes. On commence par le cas simple de l'addition.

1.11 **Théorème.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Alors la suite $(u_n + v_n)$ est convergente et $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$.

Démonstration. Soit un réel $\varepsilon > 0$. En appliquant la définition de la convergence à (u_n) avec la distance $\varepsilon/2$, on obtient l'existence d'un entier N_u tel que pour tout $k \geq N_u$ on a $|u_k - \lim u_n| \leq \varepsilon/2$. De même il existe un N_v tel que pour tout $k \geq N_v$ on a $|v_k - \lim v_n| \leq \varepsilon/2$. En posant $N := \max(N_u, N_v)$ on en déduit que pour tout $k \geq N$ on a

$$\begin{aligned} |u_k + v_k - \lim u_n - \lim v_n| &\leq |u_k - \lim u_n| + |v_k - \lim v_n| \quad \text{grâce à l'inégalité triangulaire} \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\lim u_n + \lim v_n$. □

On en déduit le corollaire suivant qui permet de se ramener au cas de la convergence vers 0, ce qui simplifie certains raisonnements puisque l'expression de la convergence est plus simple.

1.12 **Corollaire.** Une suite (u_n) converge vers un réel ℓ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

Démonstration. Supposons d'abord que (u_n) converge vers ℓ . La suite constante $(-\ell)$ converge vers $-\ell$ donc en appliquant le **théorème d'addition des limites** à (u_n) et $(-\ell)$ on en déduit que $(u_n - \ell)$ converge vers 0. Réciproquement, si $(u_n - \ell)$ converge vers 0, en appliquant le même théorème à $(u_n - \ell)$ et à la suite constante (ℓ) on obtient que (u_n) , qui est égale à $((u_n - \ell) + \ell)$, converge vers ℓ . □

Le cas de la multiplication est plus subtil que celui de l'addition parce que le même argument ne fonctionne pas directement. On peut l'établir au moyen de quelques résultats intermédiaires.

1.13 **Lemme.** *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite qui converge vers une limite ℓ . En appliquant la définition de la convergence avec une distance $\varepsilon = 1$ on a qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - \ell| \leq 1$ donc $\ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$. L'ensemble de réels $\{u_0, u_1, \dots, u_N\}$ est fini et on voit, il a donc un minimum m et un maximum M , donc pour tout $n \leq N$ on a $m \leq u_n \leq M$. On en déduit que pour tout entier n , $\min(m, \ell - 1) \leq u_n \leq \max(M, \ell + 1)$, en appliquant l'un ou l'autre des deux encadrements selon que $n \leq N$ ou $n > N$. Ainsi (u_n) est bornée. $\square$

1.14 **Théorème.** *Soient deux suites (u_n) et (v_n) . Si (u_n) tend vers 0 et (v_n) est bornée, alors le produit $(u_n v_n)$ tend vers 0.*

Démonstration. Comme (v_n) est supposée bornée, il existe un réel $A > 0$ tel que $|v_n| \leq A$ pour tout n . Soit alors un réel $\varepsilon > 0$ quelconque. En appliquant la définition de la convergence de (u_n) avec la distance ε/A on obtient un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| \leq \varepsilon/A$, donc pour tout $n \geq N$ on a $|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq \varepsilon/A \cdot A = \varepsilon$. Par conséquent, $(u_n v_n)$ tend vers 0. $\square$

1.15 **Théorème.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Alors la suite $(u_n v_n)$ est convergente et $\lim(u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$.*

Démonstration. Posons $\ell := \lim u_n$ et $m := \lim v_n$. Pour tout entier n on a

$$u_n v_n - \ell m = u_n v_n - u_n m + u_n m - \ell m = u_n(v_n - m) + (u_n - \ell)m.$$

On fait alors les observations suivantes :

- La suite (u_n) est convergente donc bornée d'après le **lemme 1.13**, la suite $(v_n - m)$ tend vers 0 puisque (v_n) tend vers m , par conséquent la suite produit $(u_n(v_n - m))$ tend vers 0 d'après le **théorème 1.14**.
- La suite $(u_n - \ell)$ tend vers 0 puisque (u_n) tend vers ℓ , la constante m peut être vue comme une suite constante donc bornée, donc la suite $((u_n - \ell)m)$ tend aussi vers 0.

Par le **théorème d'addition des limites**, $(u_n v_n - \ell m)$ tend donc vers 0, d'où on déduit que $(u_n v_n)$ converge vers ℓm . $\square$

1.16 **Théorème.** *Soit (u_n) une suite convergente dont la limite n'est pas 0. Alors la suite $(1/u_n)$ est convergente et $\lim(1/u_n) = 1/\lim u_n$.*

Démonstration. On va démontrer que la suite de terme général $1/u_n - 1/\ell$ tend vers 0. Pour cela, on écrit $1/u_n - 1/\ell = (\ell - u_n)/\ell u_n$. Le numérateur $\ell - u_n$ tend vers 0 puisque par hypothèse (u_n) tend vers ℓ . Grâce au **théorème 1.14**, il suffit donc de montrer que la suite $1/\ell u_n$ est bornée. Pour cela, on procède de façon similaire au **lemme 1.13** : comme (u_n) converge vers ℓ , il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - \ell| \leq |\ell|/2$ et on a alors $|u_n| > |\ell|/2$ donc $|1/\ell u_n| \leq 2$. Comme il y a un nombre fini de termes avant le rang N , la suite $(1/\ell u_n)$ est donc bornée. $\square$

- 1.17 Ce théorème ne s'applique pas lorsque (u_n) tend vers 0 puisque dans ce cas $1/\lim u_n$ n'est même pas défini. A priori cela n'indique rien sur la convergence de $(1/u_n)$, mais on peut en fait observer que $(1/u_n)$ ne peut pas converger si (u_n) tend vers 0. En effet, si $(1/u_n)$ convergeait vers une limite ℓ , par le **théorème du multiplication des limites** cela impliquerait que $(u_n \cdot 1/u_n)$ converge vers $0 \cdot \ell$ qui est égal à 0 alors que cette suite est constante égale à 1.

1.3 Tendre vers l'infini

On parle de « tendre vers l'infini » pour décrire une suite qui prend des valeurs de plus en plus grandes. Formellement, on le définit de la façon suivante, qui ne s'applique que pour des suites à valeurs réelles :

- 1.18 **Définition (tendre vers l'infini).** On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si pour tout réel a il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait $u_n \geq a$.

On dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ si pour tout réel a il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait $u_n \leq a$.

- 1.19 *Exemple.* La suite de terme général n tend vers $+\infty$. En effet, pour tout réel a , si on choisit pour N un entier supérieur à a , par exemple $[a] + 1$, on a bien $n \geq a$ pour tout $n \geq N$.

Ici, il faut faire attention au vocabulaire : on emploie le mot « tendre » voire le mot « limite » mais il ne s'agit pas de convergence à proprement parler. On emploie le même vocabulaire parce c'est commode et que la notion est tout de même proche.

On peut même faire en sorte que ce soit effectivement une forme de convergence, mais dans l'ensemble $\mathbb{R}$ constitué de l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on ajoute $+\infty$ et $-\infty$. Cela se définit très bien en employant le formalisme de la topologie générale, mais on ne le fera pas ici car cela dépasse le cadre de ce cours.

- 1.20 **Proposition.** Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout n à partir d'un certain rang on ait $u_n \leq v_n$. Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors (v_n) tend vers $+\infty$. De même, si (v_n) tend vers $-\infty$ alors (u_n) tend vers $-\infty$.

Démonstration. Supposons que (u_n) tend vers $+\infty$. Soit a un réel quelconque. Par définition, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \geq a$. Alors pour tout $n \geq N$ on a $v_n \geq u_n \geq a$ donc $v_n \geq a$, ce qui établit que v_n tend vers $+\infty$. Le cas de $-\infty$ se démontre de la même façon. $\square$

Cette propriété est très utile parce qu'elle permet dans de nombreux cas de montrer qu'une suite tend vers un infini de façon plus simple qu'en se ramenant à la définition : il suffit de comparer la suite étudiée à une suite connue. En particulier, cela permet d'étendre les règles de calcul sur les limites au cas des infinis.

- 1.21 **Théorème.** Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Alors
- la suite $(-u_n)$ tend vers $-\infty$;
 - la suite $(1/u_n)$ tend vers 0 ;
 - pour toute suite (v_n) minorée, $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$;
 - pour toute suite (v_n) minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif, $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$;

- pour toute suite (v_n) majorée à partir d'un certain rang par un réel strictement négatif, $(u_n v_n)$ tend vers $-\infty$.

Démonstration. Dans le cas de $(-u_n)$, on applique la définition directement : soit a un réel quelconque, par hypothèse il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \geq -a$, alors pour tout $n \geq N$ on a $-u_n \leq a$, par conséquent (u_n) tend vers $-\infty$.

Pour $(1/u_n)$ on applique aussi la définition : soit un réel $\varepsilon > 0$, par hypothèse il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \geq 1/\varepsilon$, on a alors $|u_n| \geq 1/\varepsilon$ donc $|1/u_n| \leq \varepsilon$, par conséquent $(1/u_n)$ tend vers 0.

Pour la somme, par hypothèse il existe un réel m tel que pour tout n on a $v_n \geq m$. Pour tout a , par hypothèse sur (u_n) il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \geq a - m$, on a donc $u_n + v_n \geq a$ ce qui prouve que $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.

Pour le produit, la méthode est similaire : par hypothèse il existe un réel $m > 0$ et un rang N tels que pour tout $n \geq N$ on a $v_n \geq m$. Soit a un réel, on peut supposer $a \geq 0$ sans perte de généralité, par hypothèse sur (u_n) il existe un rang N' tel que pour tout $n \geq N'$ on ait $u_n \geq a/m$, par conséquent pour tout $n \geq \max(N, N')$ on a $u_n v_n \geq (a/m)m = a$ (du fait que a et m sont positifs) ce qui prouve que $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$. Le cas où (v_n) est majoré par un réel strictement négatif est similaire. $\square$

De ce théorème, on peut déduire les règles habituelles de calcul sur les sommes et produits de limites. Si (u_n) et (v_n) sont des suites soit convergentes soit tendant vers un infini, on les tableaux suivants, qui donnent les limites (finies ou infinies) de $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ en fonction de celles de (u_n) et (v_n) :

		$\lim(u_n + v_n)$		$\lim u_n$		$\lim(u_n v_n)$		$\lim v_n$				
								$-\infty$	$a < 0$	0	$a > 0$	$+\infty$
$\lim v_n$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$?$	$-\infty$	$-\infty$
	b	$-\infty$	$-\infty$	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ab	0	ab	$-\infty$
	0	$-\infty$	$-\infty$	a	$+\infty$	0	0	$?$	0	0	0	$?$
	$+\infty$	$?$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$?$	$+\infty$	$+\infty$

Les cases qui comportent « ? » sont ce que l'on appelle des *formes indéterminées*. Cela signifie que l'information de convergence des suites (u_n) et (v_n) ne suffit pas à déterminer le comportement de la somme ou du produit. Cela ne veut absolument pas dire qu'il n'y a pas de limite, mais seulement que les règles de calcul pour la somme et le produit ne permettent pas de conclure.

- 1.22 *Exemple.* La suite (n^2) tend vers $+\infty$, la suite $(-n)$ tend vers $-\infty$. Dans la table d'addition des limites, le cas qui s'applique à la suite $n^2 - n$ est donc une forme indéterminée, mais $(n^2 - n)$ tend vers $+\infty$.
- 1.23 **Exercice.** Trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que (u_n) tend vers $+\infty$, (v_n) tend vers $-\infty$ et $(u_n + v_n)$ tend vers 1.

1.4 Critères de convergence

Dans cette partie, on démontre des théorèmes qui permettent de garantir que certaines suites sont convergentes. Il s'agit de théorèmes d'existence (puisqu'ils établissent

l'existence de limites) qui ne sont pas nécessairement constructifs (parce qu'ils ne donnent pas forcément de façon de calculer les limites). Ils reposent de façon cruciale sur la propriété suivante des nombres réels.

- 1.24 **Définition (borne supérieure).** Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Un réel a est borne supérieure de X s'il est le plus petit majorant de X , c'est-à-dire s'il vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout $x \in X$, on a $x \leq a$;
- pour tout $b \in \mathbb{R}$, si on a $x \leq b$ pour tout $x \in X$ alors on a aussi $a \leq b$.

Par construction, si une borne supérieure existe, alors elle est unique.

- 1.25 *Exemple.* Dans le cas d'un intervalle $[a, b]$ avec $a \leq b$ il est facile de vérifier que b est la borne supérieure. Cela fonctionne aussi pour un intervalle ouvert $]a, b[$.
- 1.26 *Exemple.* Si X est l'ensemble des nombres rationnels dont le carré est inférieur à 2, alors le réel $\sqrt{2}$ (qui n'est pas rationnel) est borne supérieure de X .
- 1.27 *Exemple.* Un ensemble qui n'est pas majoré, comme $[3, +\infty[$, n'a pas de borne supérieure.
- 1.28 *Exemple.* L'ensemble vide n'a pas de borne supérieure. En effet il est majoré mais il n'a pas de plus petit majorant.
- 1.29 **Axiome (propriété de la borne supérieure).** Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

- 1.30 Cette propriété est un *axiome*, c'est-à-dire qu'elle fait partie de ce que l'on considère comme vrai par définition. En effet, en analyse, on définit habituellement l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels comme un corps muni d'une relation d'ordre total, archimédien (c'est-à-dire que tout réel est majoré par un nombre entier) et ayant la propriété de la borne supérieure. Ces propriétés sont des axiomes, c'est-à-dire qu'en quelque sorte ce sont les règles du jeu que l'on pose au départ et à partir desquelles on démontre toutes les autres propriétés.

Par ailleurs, on peut construire effectivement un ensemble ayant ces propriétés à partir des nombres rationnels. Cette *construction des réels* peut se faire de différentes façons essentiellement équivalentes. Cela dépasse le cadre de ce cours.

- 1.31 **Définition (suite monotone).** Une suite (u_n) est *croissante* si pour tout n on a $u_n \leq u_{n+1}$, ou de façon équivalente si on a $u_m \leq u_n$ pour tous m, n tels que $m \leq n$. Une suite est *strictement croissante* si elle satisfait les mêmes propriétés formulées avec des inégalités strictes $<$, elle est *décroissante* (éventuellement strictement) si elle satisfait les mêmes propriétés en inversant l'ordre sur les valeurs de la suite. Une suite est *monotone* si elle est soit croissante soit décroissante.
- 1.32 **Théorème.** Toute suite croissante et majorée est convergente.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante et majorée. Par hypothèse, l'ensemble de ses valeurs $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré, il n'est pas vide puisqu'il contient par exemple u_0 , il a donc une borne supérieure d'après la **propriété de la borne supérieure**. On va alors montrer que cette borne supérieure a est la limite de (u_n) .

Pour cela, considérons un réel $\varepsilon > 0$. Comme a est le plus petit des majorants de (u_n) , le réel $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant de (u_n) , il existe donc un entier N tel que $u_N > a - \varepsilon$. Comme la suite est supposée croissante, on en déduit que pour tout $n \geq N$

on a $u_n \geq u_N > a - \varepsilon$, de plus $u_n \leq a$ puisque a majore la suite, donc on a $|u_n - a| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Ainsi (u_n) converge vers a . $\square$

- 1.33 **Théorème.** Soient trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que l'on ait $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n . Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite, alors (v_n) converge vers cette même limite.

Démonstration. Soit ℓ la limite commune de (u_n) et (v_n) . Soit $\varepsilon > 0$, par hypothèse on a $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang N_u et aussi $|w_n - \ell| \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang N_w . Pour tout $n \geq \max(N_u, N_w)$ on a donc $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$, donc $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$, par conséquent (v_n) converge vers ℓ . $\square$

- 1.34 **Définition.** Une suite numérique (u_n) est une *suite de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tous entiers m et n tels que $m, n \geq N$ on a $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$.
- 1.35 *Exemple.* La suite de terme général $1/n$ est de Cauchy. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut choisir un N tel que $N \geq 1/\varepsilon$. Pour tous entiers m et n tels que $n, m \geq N$, on a alors

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| = \frac{|m - n|}{nm} \leq \frac{\max(m, n)}{nm} = \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{\min(n, m)} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon.$$

- 1.36 **Exercice.** Démontrer que la suite de terme général $1/n^2$ est de Cauchy.
- 1.37 *Exemple.* La suite de terme général $x_n = n$ n'est pas de Cauchy. En effet si $\varepsilon = 1/2$, quel que soit $N \in \mathbb{N}$, pour $m = N + 1$ et $n = N + 2$ on a $|n - m| = 1 > \varepsilon$.
- 1.38 **Proposition.** Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente, soit ℓ sa limite. Considérons un $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition de la convergence, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$. Pour tous $m, n \geq N$ on a donc $|u_n - u_m| = |u_n - \ell + \ell - u_m| \leq |u_n - \ell| + |\ell - u_m| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, le critère de Cauchy est donc satisfait. $\square$

- 1.39 **Théorème.** Toute suite de Cauchy à valeurs réelles est convergente dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{R}$. On commence par montrer que (u_n) est bornée. Pour cela, on applique la définition avec le seuil $\varepsilon = 1$, ce qui donne un rang N tel que pour tous $m, n \geq N$ on a $|u_n - u_m| \leq 1$. De cette propriété, on déduit que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| \leq |u_N| + 1$, donc (u_n) est bornée à partir du rang N . Comme il y a un nombre fini de termes avant le rang N , (u_n) est bornée.

On va maintenant considérer l'ensemble E de tous les nombres réels a tels que la suite (u_n) a une infinité de termes strictement minorés par a : $E := \{a \mid \{n \mid u_n > a\} \text{ est infini}\}$. Comme (u_n) est bornée, on en déduit que

- E n'est pas vide : si a est un minorant de (u_n) , alors $\{n \mid u_n \geq a\}$ est $\mathbb{N}$ donc il est infini et $a \in E$;
- E est majoré : si M majore (u_n) , alors pour tout $a > M$ l'ensemble $\{n \mid u_n \geq a\}$ est vide donc fini, donc $a \notin E$, ainsi M majore E .

Par la **propriété de la borne supérieure**, on en déduit que E a une borne supérieure, appelons-la ℓ . On montre finalement que ℓ est limite de (u_n) . Pour cela considérons un $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme ℓ est borne supérieure de E , on déduit deux choses :

- $\ell + \varepsilon/2$ n'est pas élément de E donc $\{n \mid u_n > \ell + \varepsilon/2\}$ est fini, il existe donc un N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$ on a $u_n \leq \ell + \varepsilon/2$.
- Il existe un élément $a \in E$ tel que $a \geq \ell - \varepsilon/2$ (sinon la borne supérieure de E serait majorée par $\ell - \varepsilon/2$). Comme (u_n) vérifie le critère de Cauchy, il existe un rang N_1 tel que pour tous $m, n \geq N_1$ on a $|u_n - u_m| \leq \varepsilon/2$.

Comme l'ensemble des m tels que $u_m > a$ est infini, il existe un $m \geq \max(N_0, N_1)$ tel que $u_m > a \geq \ell - \varepsilon/2$ et comme $n \geq N_0$ on a $u_m \leq \ell + \varepsilon/2$, ainsi $|u_m - \ell| \leq \varepsilon/2$. Pour tout $n \geq N_1$ on a alors $|u_n - \ell| = |u_n - u_m + u_m - \ell| \leq |u_n - u_m| + |u_m - \ell| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Ainsi, (u_n) converge vers ℓ . $\square$

1.40 On a donc établi que, dans l'ensemble $\mathbb{R}$, les suites de Cauchy sont exactement les suites convergentes. Dans le vocabulaire de la topologie, on dit que $\mathbb{R}$ est *complet*. Comme on le voit dans la démonstration, le fait qu'une suite convergente soit de Cauchy découle simplement de l'inégalité triangulaire, en revanche la réciproque est une conséquence de la propriété de la borne supérieure. En effet, c'est cette propriété qui permet de trouver la limite d'une suite qui vérifie le critère de Cauchy. On ne pourrait pas mener le même raisonnement sans cette propriété.

La notion de suite de Cauchy peut en fait se définir dans n'importe quel *espace métrique*, c'est-à-dire tout ensemble muni d'une distance. On remplace alors dans la définition la valeur absolue $|u_n - u_m|$ par $d(u_n, u_m)$, la distance entre u_n et u_m .

- 1.41 **Exercice.** Montrer que $u_n = \sum_{k=1}^n 1/k!$ est une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$ mais qu'elle ne converge vers aucun point de $\mathbb{Q}$.
- 1.42 **Exercice.** Montrer que la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n/2 + 1/u_n$ pour tout n est une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ mais qu'elle ne converge vers aucun point de $\mathbb{Q}$.

1.5 Comparaison asymptotique

Lorsqu'on calcule une limite de suite, il arrive fréquemment que certaines parties du terme général n'entrent pas en ligne de compte dans le résultat. Prenons l'exemple d'une fraction rationnelle :

$$u_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{2n^2 - 4n}$$

Si l'on applique directement les règles de calcul sur les limites, on constate que le numérateur tend vers $+\infty$ puisque n^2 et n tendent vers $+\infty$ et 3 est constant, on a donc $\infty + \infty + 3 = \infty$ donc leur somme tend vers $+\infty$. Pour le dénominateur, l'application directe des règles de calcul donne $\infty - \infty$ qui est une forme indéterminée. On peut pourtant justifier que le dénominateur tend vers $+\infty$ parce que $2n^2$ croît « plus vite » que $4n$:

$$2n^2 - 4n = 2n^2 \left(1 - \frac{4n}{2n^2}\right) = 2n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

Ici on observe que $2n^2$ tend vers $+\infty$ et $2/n$ tend vers 0 donc $1 - 2/n$ tend vers 1 et le produit donne $+\infty \times 1$ donc il tend vers $+\infty$. On se retrouve alors pour u_n avec un quotient $+\infty / +\infty$, qui est encore une forme indéterminée, mais on peut résoudre le problème à nouveau en factorisant par le terme « dominant », c'est-à-dire n^2 au numérateur et $2n^2$

au dénominateur :

$$u_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{2n^2 - 4n} = \frac{n^2(1 + 2n/n^2 + 3/n^2)}{2n^2(1 - 4n/2n^2)} = \frac{n^2(1 + 2/n + 3/n^2)}{2n^2(1 - 2/n)} = \frac{1 + 2/n + 3/n^2}{2 - 4/n}$$

Sous cette forme, il apparaît que le dénominateur tend vers 1 et le numérateur vers 2, donc u_n tend vers $1/2$.

La technique consistant à factoriser une expression par le terme qui y croît le plus vite est très générale et on la formalise à l'aide de la notion de négligeabilité, et de la notion apparentée de domination, qui permet de dire formellement par exemple que $2n^2$ ne croît pas significativement plus vite que n^2 . Ce genre de comparaison est appelé *asymptotique* parce qu'il concerne le comportement à l'infini, par opposition aux inégalités usuelles qui comparent des valeurs individuelles prises par les suites.

1.43 **Définition (négligeabilité).** Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si pour toute distance $\varepsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait $|u_n| \leq \varepsilon|v_n|$.

1.44 *Exemple.* La suite n^2 est négligeable devant la suite n^3 . En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, si l'on choisit N de sorte que $N \geq 1/\varepsilon$, alors pour tout $n \geq N$ on a $1/n \leq 1/N \leq \varepsilon$ donc $n^2 = (1/n) \times n^3 \leq \varepsilon n^3$. Par le même argument, on montre que $1/n^3$ est négligeable devant $1/n^2$.

1.45 *Exemple.* La suite n^2 n'est pas négligeable devant $4n^2 + 4n$. En effet, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \geq 1$ donc $2n \geq n + 1$ et $n \geq (n + 1)/2$ et par conséquent on a $n^2 \geq (n + 1)^2/4 = (n^2 + 2n + 1)/4 > (n^2 + 2n)/4 = (1/8) \times (2n^2 + 4n)$. On a donc un contre-exemple à la définition de la négligeabilité en choisissant $\varepsilon = 1/8$.

1.46 **Exercice.** Montrer que si a et b sont des réels strictement positifs tels que $a < b$, alors a^n est négligeable devant b^n .

La définition de négligeabilité ressemble beaucoup à la définition de la convergence : on dit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un N tel que pour tout $n \geq N$ on a une certaine comparaison. Cette ressemblance permet de caractériser la négligeabilité de façon plus simple dans de nombreux cas.

1.47 **Proposition.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Supposons que (v_n) ne s'annule pas (éventuellement à partir d'un certain rang). Alors (u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si (u_n/v_n) tend vers 0.

Démonstration. Il suffit de remarquer que si v_n ne s'annule pas, alors la condition $|u_n| \leq \varepsilon|v_n|$ est équivalente à $|u_n/v_n| \leq \varepsilon$, donc les deux définitions coïncident. $\square$

La condition que v_n ne s'annule pas est nécessaire simplement pour pouvoir considérer la suite (u_n/v_n) . Par le même genre d'argument que dans l'observation précédente, on peut noter deux cas particulier intéressants :

1.48 **Proposition.** Une suite numérique est

- négligeable devant 0 si et seulement si elle est nulle à partir d'un certain rang.
- négligeable devant 1 si et seulement si elle tend vers 0.

Démonstration. Soit (u_n) une suite négligeable devant 0. En appliquant la définition de négligeabilité avec $\varepsilon = 1$, on obtient qu'il existe rang N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| \leq 1 \times 0 = 0$ donc $u_n = 0$ pour tout $n \geq N$.

Soit maintenant (u_n) une suite négligeable devant 1. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| \leq \varepsilon \times 1 = \varepsilon$. C'est exactement la définition de la convergence de (u_n) vers 0. $\square$

1.49 **Définition (domination).** Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) s'il existe une constante $A > 0$ et un rang N tels que pour tout entier $n \geq N$ on ait $|u_n| \leq A|v_n|$.

1.50 *Exemple.* La suite $2/n + 1/n^2$ est dominée par $1/n$. En effet, elle est majorée par exemple par $3 \times 1/n$ puisque pour tout entier n non nul on a $n \geq 1$ dont $1/n \leq 1$, donc $1/n^2 \leq 1/n$ d'où $2/n + 1/n^2 \leq 3/n$.

Cette définition est proche de celle de la négligeabilité, la différence est qu'ici on demande qu'il existe une constante A de sorte que $A|v_n|$ majore $|u_n|$ à partir d'un certain rang, alors que pour la négligeabilité on demande que ce soit le cas pour toute valeur (non nulle) de la constante. Du fait que la notion est proche, il y a beaucoup de résultats similaires.

1.51 **Proposition.** Une suite numérique est

- dominée par 0 si et seulement si elle est nulle à partir d'un certain rang.
- dominée par 1 si et seulement si elle est bornée.

Démonstration. Soit (u_n) une suite dominée par 0. Il existe donc un $A > 0$ et un rang N tels que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| \leq A \times 0 = 0$ donc $u_n = 0$ pour tout $n \geq N$.

Soit maintenant (u_n) une suite dominée par 1. Par définition, il existe un $A > 0$ et un N tels que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| \leq A \times 1 = A$. La suite (u_n) est donc bornée en valeur absolue par A à partir du rang N , or il n'y a qu'un nombre fini de termes avant le rang N donc (u_n) est bornée. $\square$

1.52 **Exercice.** Montrer que toute suite est dominée par elle-même. Une suite peut-elle être négligeable devant elle-même ?

1.53 **Exercice.** Montrer que si une suite (u_n) est négligeable devant une suite (v_n) , alors elle est aussi négligeable devant toute suite (λv_n) avec $\lambda \neq 0$. De même pour la domination.

1.54 **Définition.** Deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* si la différence $(u_n - v_n)$ est négligeable devant (v_n) . On note cette relation $u_n \sim v_n$.

1.55 *Exemple.* L'équivalence est surtout utile pour simplifier des expressions en supprimant des termes négligeables devant d'autres. Pour reprendre l'exemple du début de cette section, on peut observer que

- $n^2 + 2n + 3$ est équivalent à n^2 , puisque la différence est $2n + 3$ qui est négligeable devant n^2 ;
- de même $2n^2 - 4n$ est équivalent à $2n^2$;
- on verra plus loin que les opérations de multiplication et division préservent les équivalences, ainsi $(n^2 + 2n + 3)/(2n^2 - 4n)$ est équivalent à $n^2/2n^2 = 1/2$, d'où on pourra déduire que cette suite tend vers $1/2$.

1.56 **Proposition.** *L'équivalence de suites est une relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle est*

- *réflexive : pour toute suite (u_n) on a $u_n \sim u_n$;*
- *symétrique : pour toutes suites (u_n) et (v_n) , si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$;*
- *transitive : pour toutes suites (u_n) , (v_n) et (w_n) , si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.*

Démonstration. Pour la réflexivité, il suffit de remarquer que 0 est négligeable devant n'importe quelle suite, donc $(u_n - u_n)$ est négligeable devant (u_n) .

Pour la symétrie, supposons que $(u_n - v_n)$ est négligeable devant (v_n) et montrons que $(v_n - u_n)$ est alors négligeable devant (u_n) . Soit donc $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, pour tout $\delta > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - v_n| \leq \delta|v_n|$. Dans ce cas on a $|v_n| = |v_n - u_n + u_n| \leq |v_n - u_n| + |u_n| \leq \delta|v_n| + |u_n|$ donc $(1 - \delta)|v_n| \leq |u_n|$ d'où $|v_n| \leq |u_n|/(1 - \delta)$ si on a $\delta < 1$. On en déduit alors $|v_n - u_n| \leq \delta|v_n| \leq (\delta/(1 - \delta))|u_n|$. En posant par exemple $\delta = \min(\varepsilon/2, 1/2)$ on a $\delta \leq \varepsilon/2$ et $1 - \delta \geq 1/2$ donc $\delta/(1 - \delta) \leq \varepsilon$ et on a bien $|v_n - u_n| \leq \varepsilon|u_n|$, ainsi $(v_n - u_n)$ est négligeable devant (u_n) .

Pour la transitivité, supposons que $(u_n - v_n)$ est négligeable devant (v_n) et que $(v_n - w_n)$ est négligeable devant (w_n) . Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, pour tous $\delta > 0$, à partir d'un certain rang on a $|u_n - v_n| \leq \delta|v_n|$ et $|v_n - w_n| \leq \delta|w_n|$ donc

$$\begin{aligned} |u_n - w_n| &= |u_n - v_n + v_n - w_n| \leq |u_n - v_n| + |v_n - w_n| \\ &\leq \delta|v_n| + \delta|w_n| = \delta|v_n - w_n + w_n| + \delta|w_n| \leq \delta|v_n - w_n| + \delta|w_n| + \delta|w_n| \\ &\leq \delta^2|w_n| + \delta|w_n| + \delta|w_n| = \delta(\delta + 2)|w_n| \end{aligned}$$

En choisissant δ de sorte que $\delta(\delta + 2) \leq \varepsilon$ (par exemple $\delta = \min(1, \varepsilon/3)$ convient), on en déduit que $(u_n - w_n)$ est négligeable devant (w_n) . $\square$

1.57 **Proposition.** *Si (u_n) est négligeable devant (v_n) et (v_n) est équivalente à (w_n) alors (u_n) est négligeable devant (w_n) .*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, à partir d'un certain rang on a $|u_n| \leq (\varepsilon/2)|v_n|$ et $|v_n - w_n| \leq |w_n|$ (en prenant 1 pour seuil), on a donc $|u_n| \leq (\varepsilon/2)|v_n - w_n + w_n| \leq (\varepsilon/2)|v_n - w_n| + (\varepsilon/2)|w_n| \leq (\varepsilon/2)|w_n| + (\varepsilon/2)|w_n| = \varepsilon|w_n|$. Par conséquent (u_n) est négligeable devant (v_n) . $\square$

1.58 **Proposition.** *Une suite numérique est*

- *équivalente à 0 si et seulement si elle est nulle à partir d'un certain rang,*
- *équivalente à une constante ℓ non nulle si et seulement si elle converge vers ℓ .*

Démonstration. Soit (u_n) une suite équivalente à 0. Par définition cela implique que $(u_n - 0)$ est négligeable devant 0 donc que cette suite s'annule à partir d'un certain rang, d'après la [proposition 1.48](#).

Soit maintenant (u_n) une suite équivalente à une suite constante ℓ avec $\ell \neq 0$. Par définition, $(u_n - \ell)$ est donc négligeable devant ℓ , c'est-à-dire négligeable devant 1 d'après l'[exercice 1.53](#), ce qui implique que $(u_n - \ell)$ tend vers 0 d'après la [proposition 1.48](#), donc que (u_n) tend vers ℓ . $\square$

1.6 Notations de Landau

Les relations de négligeabilité et de domination sont très utiles pour étudier la convergence des suites et pour calculer des limites. Pour faciliter le raisonnement, on emploie des notations particulières pour représenter des suites dont on ne précise pas la valeur exacte mais uniquement le comportement asymptotique, en termes de domination ou de négligeabilité.

- 1.59 **Définition (petit-o et grand-O).** Pour une suite numérique (u_n) , l'expression $o(u_n)$ désigne le terme général d'une suite, que l'on ne précise pas exactement, mais qui est négligeable devant (u_n) . De même, l'expression $O(u_n)$ désigne le terme général d'une suite que l'on ne précise pas exactement mais qui est dominée par (u_n) .

Les notations o et O (petit-o et grand-O) sont parfois appelées *notations de Landau*, du nom du mathématicien Edmund Landau qui les a introduites au début du XX^{ème} siècle.

Ces notations sont surprenantes au premier abord parce qu'on les emploie pour calculer, comme s'il s'agissait de suites, bien qu'elles ne donnent pas de valeur précise. Ainsi, on peut écrire $u_n = o(v_n)$ pour signifier que (u_n) est négligeable devant (v_n) , bien que ce ne soit pas une égalité à proprement parler. Par exemple, si (u_n) et (v_n) sont tous deux négligeables devant (w_n) , on peut écrire $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ comme s'il s'agissait des égalités mais on ne peut pas en déduire $u_n = v_n$, ce que l'on pourrait faire si $o(w_n)$ désignait une suite précise. Formellement, on pose la définition suivante :

- 1.60 **Définition.** Une expression $A = B$ où les expressions A et B font éventuellement intervenir des o et O signifie que toute suite correspondant à l'expression A correspond aussi à l'expression B .

- 1.61 *Exemple.* Pour clarifier cette notation, on peut en donner quelques exemples classiques d'utilisation :

- $1/n^2 = o(1/n)$ signifie que la suite $1/n^2$ est négligeable devant la suite $1/n$ (puisque $1/n^2$ est la seule suite qui correspond au membre gauche) ;
- $O(n) = O(2n)$ signifie que toute suite dominée par n est dominée par $2n$;
- $(n + o(n))^2 = n^2 + O(n)$ signifie que pour toute suite (u_n) négligeable devant n il existe une suite (v_n) dominée par n telle que $(n + u_n)^2 = n^2 + v_n$.
- on n'écrira jamais $o(u_n) = v_n$ si v_n est une suite particulière (sans expression o ou O), parce que cela signifierait que toute suite négligeable devant u_n est égale à v_n , ce qui est toujours faux.
- L'équivalence de suites $u_n \sim v_n$ peut se reformuler avec ces notations comme $u_n - v_n = o(v_n)$, et aussi comme $u_n = v_n + o(v_n)$, c'est-à-dire que u_n s'écrit comme v_n à laquelle on ajoute un terme correctif qui est négligeable devant v_n .

L'emploi d'égalités avec les notations o et O est donc à manipuler avec soin : malgré l'emploi du signe $=$, le membre gauche et le membre de droite n'ont pas le même statut et on exprime plutôt une relation d'inclusion entre ensembles.

- 1.62 Malgré ces mises en garde, la plupart des opérations classiques s'appliquent aux égalités qui font intervenir les notations de Landau. En particulier, ajouter un même terme des deux côtés du signe $=$ préserve l'égalité (par exemple si $O(u_n) = o(v_n)$ alors $O(u_n) + w_n = o(v_n) + w_n$), même si ce que l'on ajoute contient de o et des O , de même on peut multiplier des deux côtés par une même suite (y compris avec des o et des O). On peut également

appliquer une même fonction des deux côtés.

- 1.63 Les seules opérations usuelles qui ne s'appliquent pas sont les simplifications, par exemple l'égalité $o(u_n) - o(u_n) = 0$ est fausse, parce qu'elle signifie que si (a_n) et (b_n) sont deux suites négligeables devant (u_n) alors leur différence $(a_n - b_n)$ est nulle, ce qui n'est pas le cas en général. De même, l'égalité $o(u_n)/o(u_n) = 1$ est fausse.

Dans la suite, on va employer ces notations pour exprimer des propriétés des relations de négligeabilité et domination et établir les règles qui permettent de calculer avec.

- 1.64 **Proposition (transitivité de o et O).** Pour toute suites (u_n) , on a

$$O(O(u_n)) = O(u_n), \quad O(o(u_n)) = o(u_n), \quad o(O(u_n)) = o(u_n), \quad o(o(u_n)) = o(u_n).$$

Démonstration. Le premier cas signifie que pour toutes suites (a_n) et (b_n) telles que (a_n) est dominée par (b_n) et (b_n) est dominée par (u_n) , la suite (a_n) est dominée par (u_n) . Soit donc (a_n) et (b_n) deux telles suites. Par définition il existe $A > 0$ et N tels que pour tout $n \geq N$ on a $|a_n| \leq A|b_n|$, de plus il existe $B > 0$ et N' tels que pour tout $n \geq N'$ on a $|b_n| \leq B|u_n|$. Pour tout $n \geq \max(N, N')$ on a donc $|a_n| \leq A|b_n| \leq AB|u_n|$, par conséquent (a_n) est dominée par $O(u_n)$.

Le deuxième cas est similaire mais on suppose (b_n) négligeable devant (u_n) et on établit que (a_n) est négligeable devant (u_n) . Il existe donc $A > 0$ et N tels que pour tout $n \geq N$ on a $|a_n| \leq A|b_n|$. Soit $\varepsilon > 0$, comme b_n est négligeable devant (u_n) il existe un N' tels que pour tout $n \geq N'$ on a $|b_n| \leq (\varepsilon/A)|u_n|$. Pour tout $n \geq \max(N, N')$ on a donc $|a_n| \leq A|b_n| \leq A(\varepsilon/A)|u_n| = \varepsilon|u_n|$, par conséquent a_n est négligeable devant (u_n) . Le troisième cas est similaire.

Dans le dernier cas, on suppose (a_n) négligeable devant (b_n) et (b_n) négligeable devant (u_n) . Soit alors $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|a_n| \leq \sqrt{\varepsilon}|b_n|$ et il existe un N' tel que pour tout $n \geq N'$ on a $|b_n| \leq \sqrt{\varepsilon}|u_n|$. Par conséquent, pour tout $n \geq \max(N, N')$ on a $|a_n| \leq \sqrt{\varepsilon}|b_n| \leq \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}|u_n| = \varepsilon|u_n|$ donc $u_n = o(u_n)$. $\square$

- 1.65 **Exercice.** Montrer que pour toute suite u_n on a $o(u_n) = O(u_n)$.

- 1.66 **Proposition (multiplication de o et O).** Pour toutes suites (u_n) et (v_n) , on a

$$u_n \cdot o(v_n) = o(u_n v_n) \quad \text{et} \quad u_n \cdot O(v_n) = O(u_n v_n).$$

Démonstration. Soient (a_n) négligeable devant (v_n) . Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|a_n| \leq \varepsilon|v_n|$. Par conséquent, pour tout $n \geq N$ on a $|u_n a_n| = |u_n| \cdot |a_n| \leq |u_n| \cdot \varepsilon|v_n| = \varepsilon|u_n v_n|$ donc $(u_n a_n)$ est négligeable devant $(u_n v_n)$. Le cas de la domination est similaire. $\square$

- 1.67 **Proposition (addition de o et O).** Pour toutes suites (u_n) et (v_n) positives, on a

$$o(u_n) + o(v_n) = o(u_n + v_n) \quad \text{et} \quad O(u_n) + O(v_n) = O(u_n + v_n).$$

Démonstration. Soient (a_n) négligeable devant (u_n) et (b_n) négligeable devant (v_n) . Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|a_n| \leq \varepsilon u_n$. De même, il existe un rang N' tel que pour tout $n \geq N'$ on a $|b_n| \leq \varepsilon v_n$. Pour tout $n \geq \max(N, N')$, on a donc $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq \varepsilon u_n + \varepsilon v_n = \varepsilon(u_n + v_n)$. Par conséquent, $(a_n + b_n)$ est bien négligeable devant $(u_n + v_n)$. Le cas de la domination est similaire, en prenant pour constante la plus grande des deux constantes issues de la définition de $O(u_n)$ et $O(v_n)$. $\square$

1.68 La condition de positivité sur (u_n) et (v_n) est cruciale et la proposition ne s'applique pas si l'une de ces suites peut prendre des valeurs négatives. Par exemple, on a $1/n^2 = o(1/n)$ et $1/n^2 = o(1/n^3 - 1/n)$ mais l'addition donnerait $2/n^2 = o(1/n^3)$, ce qui est faux.

1.69 Pour éviter ce problème de signe, on peut remarquer que par définition on a toujours $o(u_n) = o(|u_n|)$ et $O(u_n) = O(|u_n|)$, on peut donc généraliser en $o(u_n) + o(v_n) = o(|u_n| + |v_n|)$ sans contrainte de signe sur u_n et v_n .

La [table 1.1](#) en fin de chapitre donne des comparaisons entre des suites usuelles qui sont utiles en général pour calculer des équivalents et simplifier des calculs de limites. On ne donne pas les démonstrations ici, mais le lecteur est incité à essayer de les démontrer.

1.70 **Théorème (développement limité au premier ordre).** Soient f une fonction dérivable en 0 et (u_n) une suite qui tend vers 0, alors on a $f(u_n) = f(0) + f'(0)u_n + o(u_n)$.

Démonstration. Par définition de la dérivation, on a

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Supposons pour commencer que (u_n) ne s'annule pas. Comme la suite (u_n) tend vers 0 (comme le x dans la formule), on en déduit que la suite $(f(u_n) - f(0))/u_n$ tend vers $f'(0)$ (comme le quotient dans la formule), donc $(f(u_n) - f(0))/u_n - f'(0)$ tend vers 0. Par la [proposition 1.48](#), cela signifie que cette suite est négligeable devant 1, donc

$$\begin{aligned} \frac{f(u_n) - f(0)}{u_n} - f'(0) &= o(1) \\ \frac{f(u_n) - f(0)}{u_n} &= f'(0) + o(1) \\ f(u_n) - f(0) &= f'(0)u_n + o(1)u_n \\ f(u_n) &= f(0) + f'(0)u_n + o(u_n) \end{aligned}$$

en employant les diverses règles de calcul établies plus haut. □

Ce théorème permet de traiter beaucoup de cas parce qu'il indique en quelque sorte ce que deviennent des suites équivalentes lorsqu'on leur applique des fonctions. En particulier, la [table 1.2](#) en fin de chapitre donne les développements limités au premier ordre de fonctions usuelles.

1.71 *Exemple.* Étudions la suite

$$u_n := \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}.$$

On commence par mettre la suite sous forme exponentielle :

$$u_n = \frac{e^{\ln n^{\sqrt{n+1}}}}{e^{\ln(n+1)^{\sqrt{n}}}} = e^{\ln n^{\sqrt{n+1}} - \ln(n+1)^{\sqrt{n}}}$$

On étudie l'exposant au moyen de développements limités :

$$\begin{aligned}
 & \ln n\sqrt{n+1} - \ln(n+1)\sqrt{n} \\
 &= \ln n\sqrt{n+1} - \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\sqrt{n} && \text{factorisation de } n \text{ dans } \ln(n+1) \\
 &= \ln n\sqrt{n+1} - \left(\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\sqrt{n} && \text{par la règle } \ln(ab) = \ln a + \ln b \\
 &= \ln n\sqrt{n+1} - \left(\ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sqrt{n} && \text{par développement limité,} \\
 &= \ln n\sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right) && \text{en factorisant par } \ln n \cdot \sqrt{n} \\
 &= \ln n\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right) && \text{par développement limité,} \\
 &= \ln n\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right) && \text{en simplifiant les 1,} \\
 &= \ln n\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) && \text{parce que } \frac{1}{n \ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right) \\
 &= \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) && \text{en développant.}
 \end{aligned}$$

L'exposant tend vers 0 et la suite (u_n) tend vers 1.

pour tout $\alpha \in [0, 1[$ et tout β ,	$\alpha^n = o(n^\beta)$
pour tout $\alpha < 0$ et tout β ,	$n^\alpha = o((\ln n)^\beta)$
pour tous $\alpha < \beta$,	$(\ln n)^\alpha = o((\ln n)^\beta)$
pour tout α et tout $\beta > 0$,	$(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$
pour tous $\alpha < \beta$,	$n^\alpha = o(n^\beta)$
pour tout α et tout $\beta > 1$,	$n^\alpha = o(\beta^n)$
pour tout α ,	$\alpha^n = o(n!)$
	$n! = o(n^n)$

TABLE 1.1 – Comparaisons asymptotiques usuelles

La suite (u_n) est supposée tendre vers 0.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+u_n} &= 1 - u_n + o(u_n) \\
\sqrt{1+u_n} &= 1 + \frac{u_n}{2} + o(u_n) \\
(1+u_n)^\alpha &= 1 + \alpha u_n + o(u_n) && \text{pour tout } \alpha \\
\ln(1+u_n) &= u_n + o(u_n) \\
e^{u_n} &= 1 + u_n + o(u_n) \\
\sin(u_n) &= u_n + o(u_n)
\end{aligned}$$

TABLE 1.2 – Développements limités au premier ordre des quelques fonctions usuelles