

Chapitre 2

Séries numériques

Sommaire

2.1	Séries et sommations	1
2.2	Séries à termes positifs	4
2.3	Séries semi-convergentes	6

Le mot « série » fait référence au fait de faire la somme d’une famille d’éléments. On parle dans ce chapitre de séries numériques, c’est-à-dire de sommes de familles de nombres (réels, éventuellement complexes) ; il existe aussi des séries d’autres objets (vecteurs, fonctions, etc) mais on ne les abordera pas ici.

Comme dans le cas des suites, on s’intéresse essentiellement au comportement *à l’infini*. On cherche donc à comprendre ce qui se passe quand on additionne successivement tous les nombres d’une famille donnée, par exemple tous les $1/2^n$ pour n parcourant $\mathbb{N}$, ou tous les $(-1)^n/n$ pour n parcourant $\mathbb{N}^*$. En d’autres termes, on cherche à définir la notion de *somme infinie* et à savoir comment raisonner et calculer avec.

2.1 Séries et sommations

2.1 **Définition.** À toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on associe la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Cette suite (S_n) est appelée *série de terme général* u_n et on la note $\sum_n u_n$, ou simplement $\sum u_n$ s’il est clair que l’indice est n . Le terme S_n est appelé *somme partielle* de rang n .

On dit que la série $\sum u_n$ converge lorsque la suite (S_n) converge. Dans ce cas, la limite de la suite (S_n) est appelée *somme* de la série $\sum u_n$ et on la note comme une somme infinie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim(S_n).$$

La différence entre la somme de la série et une somme partielle de rang n est appelée *reste*

2 Chapitre 2 – Séries numériques

de rang n de la série, on peut le noter aussi comme une somme infinie :

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Une série n'est donc rien d'autre qu'une suite particulière, définie à partir de sommes de termes d'une autre suite. On peut donc appliquer tous les résultats connus sur les suites. Comme dans le cas des suites, la définition précédente est formulée pour des séries qui commencent au rang 0 mais elle se généralise immédiatement aux cas où le premier terme est de rang 1, ou 2, ou tout autre entier : on fait simplement commencer les sommes à un autre rang.

2.2 *Exemple (série arithmétique).* Une série de la forme $\sum na$ pour une constante a est appelée *série arithmétique*. La somme partielle de rang n vaut $a + 2a + 3a + \dots + na = n(n+1)a/2$. Une telle série converge donc si et seulement si $a = 0$ (et la somme est alors évidemment 0).

2.3 *Exemple (série géométrique).* Une série de la forme $\sum a^n$ pour une constante a est appelée *série géométrique*. Dans le cas particulier $a = 1$ on a en fait la suite $\sum 1$ qui diverge et dont la somme partielle de rang n vaut $n + 1$. Si $a \neq 1$, on démontre facilement par récurrence que la somme partielle de rang n vaut

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Une telle série converge donc si et seulement si $|a| < 1$ et dans ce cas la somme est $1/(1-a)$. Le reste de rang n est donc $a^{n+1}/(1-a)$.

Les séries arithmétiques et géométriques sont des cas très particuliers mais qui pourront servir dans l'étude d'autres séries au moyen de théorèmes de comparaison. En particulier, ce sont des cas où l'on peut obtenir une formule explicite pour les sommes partielles et les restes, ce qui est rarement le cas.

2.4 **Théorème.** Si une série $\sum u_n$ converge, alors son terme général u_n tend vers 0.

Démonstration. Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Si la série $\sum u_n$ converge, alors par définition la suite (S_n) converge vers une certaine limite ℓ , or pour tout $n \geq 1$ on a $u_n = S_n - S_{n-1}$ donc (u_n) converge et par les règles de calcul sur les limites on a $\lim(u_n) = \lim(S_n) - \lim(S_{n-1}) = \ell - \ell = 0$. $\square$

En conséquence (par contraposition), si une suite (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ ne peut pas converger et on dit alors qu'elle diverge *grossièrement*. C'est le cas des séries arithmétiques non nulles et des séries géométriques divergentes.

Il est très important de noter que ce théorème n'est pas une équivalence et que sa réciproque est fautive : ce n'est pas parce qu'une suite (u_n) tend vers 0 que la série associée $\sum u_n$ converge. Le premier exemple est celui de la série de terme général $1/n$.

2.5 **Définition (série harmonique).** La série $\sum 1/n$ est appelée série harmonique.

2.6 **Proposition.** La série harmonique est divergente.

Démonstration. Considérons une somme partielle de rang 2^n . En minorant chaque terme $1/k$ par le terme $1/2^p$ immédiatement inférieur, on peut obtenir la minoration suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &\geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + \cdots + 2^{n-1} \times \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}\end{aligned}$$

en remarquant qu'il y a 2^{k-1} termes minorés par $1/2^k$. On a donc une somme partielle minorée par $1 + n/2$ pour chaque n , ce qui prouve que la suite des sommes partielles n'est pas bornée, elle ne peut donc pas converger. $\square$

2.7 **Définition.** Une série $\sum u_n$ est dite en *forme télescopique* si son terme général est écrit sous la forme $v_n - v_{n+1}$ pour une certaine suite (v_n) .

2.8 *Exemple.* La série $\sum u_n = \sum_{n \geq 1} (1/n - 1/(n+1))$ est en forme télescopique, avec $v_n = 1/n$. On peut alors donner une formule pour ses sommes partielles :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

donc la série est convergente et sa limite est 1.

Le terme général peut se réécrire en

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

donc la série $\sum 1/n(n+1)$ est convergente de somme 1. Les séries $\sum_{n \geq 1} (1/n - 1/(n+1))$ et $\sum_{n \geq 1} 1/n(n+1)$ sont donc égales mais la première est sous forme télescopique alors que la deuxième de l'est pas.

2.9 **Proposition.** Une série télescopique $\sum (v_n - v_{n+1})$ converge si et seulement si la suite associée (v_n) converge. Dans ce cas on a $\sum_{n=0}^{\infty} (v_n - v_{n+1}) = v_0 - \lim(v_n)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que la somme partielle de rang n se simplifie en

$$\sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_1 + v_1 - v_2 + v_2 - v_3 + \cdots - v_n + v_n - v_{n+1} = v_0 - v_{n+1}$$

puisque tous les v_k pour $1 \leq k \leq n$ s'annulent. $\square$

- 2.10 Le fait d'être télescopique est donc une propriété de la façon d'écrire le terme général, ce n'est pas une propriété des valeurs que prend le terme général. En fait, toute série peut s'écrire sous forme télescopique de façon artificielle : en partant de $\sum u_n$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et on a alors $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout n , donc $u_n = v_n - v_{n+1}$ si on pose $v_n = -S_{n-1}$. Mais cette façon d'écrire la série sous forme télescopique n'apporte rien : le terme v_n contient une somme partielle de la série et étudier (v_n) est la même chose qu'étudier $\sum u_n$.

2.2 Séries à termes positifs

Une série à termes positifs est une série dont le terme général est toujours positif. C'est un cas particulier intéressant parce que la convergence est plus simple à étudier dans ce cas.

- 2.11 **Proposition.** *Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que le fait que le terme général de la série soit positif entraîne que la suite des sommes partielles est croissante, or on sait qu'une suite croissante de réels est convergente si et seulement si elle est majorée. $\square$

- 2.12 **Théorème (comparaison de séries positives).** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout n on ait $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors*
- *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.*
 - *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

Démonstration. Les deux séries considérées sont à termes positifs. Comme on a $u_n \leq v_n$ pour tout n , la même inégalité s'applique aux sommes partielles : $\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k$. Par conséquent, si $\sum v_n$ converge, elle est majorée donc ses sommes partielles le sont, et en conséquence celles de $\sum u_n$ le sont aussi et $\sum u_n$ converge. Dans ce cas, l'inégalité entre les sommes s'obtient par passage à la limite. Le second point, sur la divergence, est simplement la contraposée du premier. $\square$

- 2.13 **Corollaire (comparaison asymptotique des termes généraux).** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives.*
- *Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
 - *Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
 - *Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.*

Démonstration. Le cas de $u_n = O(v_n)$ est une conséquence immédiate du théorème de comparaison, par définition de la domination (et en remarquant que la convergence d'une série est préservée par multiplication du terme général par une constante). Le cas de $u_n = o(v_n)$ est une conséquence du précédente puisque dans ce cas on a $u_n = O(v_n)$. Pour l'équivalence, il suffit de remarquer que $u_n \sim v_n$ entraîne que $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$. $\square$

Ce théorème de comparaison est très puissant car il permet de réinvestir dans les séries toutes les techniques connues pour la convergence des suites. Un exemple d'application est le théorème suivant qui généralise le résultat sur la série harmonique.

- 2.14 *Exemple.* La série $\sum 1/n^2$ est convergente. En effet, on a $1/n^2 \sim 1/n(n+1)$ or ces deux suites sont positives et on sait par l'exemple 2.8 que la série $\sum 1/n(n+1)$ est convergente. En revanche, le raisonnement par équivalence ne permet pas de donner la somme.
- 2.15 **Théorème (séries de Riemann).** Soit α un nombre réel. La série $\sum 1/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Le cas $\alpha = 1$ est celui de la série harmonique, il est déjà démontré. Dans le cas $\alpha \neq 1$, on peut comparer la série considérée à une série télescopique, essentiellement en généralisant l'exemple 2.8. En effet on a

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \left(1 - \frac{(n+1)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\alpha-1} \right)$$

or on a $(1 + 1/n)^{\alpha-1} = 1 + (\alpha-1)/n + o(1/n)$ donc $1 - (1 + 1/n)^{\alpha-1} - 1$ est équivalent à $(\alpha-1)/n$, de plus $n+1 \sim n$ entraîne $(n+1)^{\alpha-1} \sim n^{\alpha-1}$ puisque $\alpha-1$ est une constante, donc on a

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{\alpha-1}{n} = \frac{\alpha-1}{n^\alpha}.$$

La série télescopique $\sum (1/(n+1)^{\alpha-1} - 1/n^{\alpha-1})$ converge si et seulement si $\alpha-1 > 0$ donc $\alpha > 1$, par la règle d'équivalence on en déduit que la série $\sum (\alpha-1)/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ et on obtient la série $\sum 1/n^\alpha$ en divisant par la constante $\alpha-1$. $\square$

- 2.16 **Corollaire (critère $n^\alpha u_n$).** Soit (u_n) une suite à valeurs positives.
- S'il existe un $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n$ tend vers 0 alors $\sum u_n$ converge.
 - S'il existe un $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n$ tend vers ∞ alors $\sum u_n$ diverge.
 - Si pour un certain α la suite $n^\alpha u_n$ converge vers une limite non nulle, alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Le premier cas implique $u_n = o(1/n^\alpha)$ or $1/n^\alpha$ converge si $\alpha > 1$ donc on peut conclure avec la règle des o . Le deuxième cas implique $1/n^\alpha = o(u_n)$ or $1/n^\alpha$ diverge si $\alpha \leq 1$ donc on peut conclure avec la contraposée de la règle des o . Pour le troisième cas, c'est la règle des équivalents qui s'applique, en remarquant que $u_n \sim \lim_k (k^\alpha u_k)/n^\alpha$. $\square$

- 2.17 **Proposition (règle de d'Alembert).** Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs.

- S'il existe $q \in]0, 1[$ tel que l'on ait $u_{n+1}/u_n \leq q$ pour tout n à partir d'un certain rang, alors $\sum u_n$ est convergente.
- S'il existe $q > 1$ tel que l'on ait $u_{n+1}/u_n \geq q$ pour tout n à partir d'un certain rang, alors $\sum u_n$ est divergente.

En particulier, si u_{n+1}/u_n converge vers une certaine limite ℓ ,

- si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge,
- si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration. Pour le premier cas, soit N un rang tel que $u_{n+1}/u_n \leq q$ pour tout $n \geq N$. On en déduit par récurrence que pour tout $n \geq N$ on a

$$u_n = u_N \times \frac{u_{N+1}}{u_N} \times \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \times \cdots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq u_N \times q^{n-N}$$

donc on a $u_n = O(q^n)$ et par la **règle de comparaison asymptotique des séries** on en déduit que $\sum u_n$ converge puisque $\sum q^n$ converge étant donné que $|q| < 1$.

Le deuxième cas se traite de façon similaire mais la comparaison se fait dans l'autre sens : on obtient $q^n = O(u_n)$ avec $\sum q^n$ divergente. Le cas où u_{n+1}/u_n converge découle des deux points précédents. $\square$

2.18 Si $\lim(u_{n+1}/u_n) = 1$, la règle de d'Alembert ne dit rien. En effet, il est facile de trouver des exemples de suites ayant cette propriété pour lesquelles la série diverge et d'autres pour lesquelles la série converge :

- Pour $u_n = n$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement et on a $u_{n+1}/u_n = (n+1)/n$ donc $\lim(u_{n+1}/u_n) = 1$.
- Pour $u_n = 1/n^2$, la série converge et on a $u_{n+1}/u_n = n^2/(n+1)^2$ donc $\lim(u_{n+1}/u_n) = 1$.

Le critère ne parle en fait que de cas où le terme général est comparable à une suite géométrique.

2.3 Séries semi-convergentes

On s'intéresse maintenant à des séries dont le terme général n'est plus supposé être de signe constant. Dans ce cas la notion de convergence est plus subtile et il est utile d'introduire une forme plus restreinte de convergence des séries.

2.19 **Définition (convergence absolue).** Une série $\sum u_n$ est dite *absolument convergente* si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente. Une série est dite *semi-convergente* si elle est convergente mais pas absolument convergente.

2.20 *Exemple.* La suite $\sum (-1)^n/n$ est semi-convergente. En effet, la série des valeurs absolues n'est pas convergente (c'est la série harmonique) mais on peut démontrer que la série est convergente, en étudiant la suite (S_n) des sommes partielles. Pour cela étudions la suite des sommes partielles de rang pair. Pour tout entier n on a

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \cdots - \frac{1}{2n(2n-1)} = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k(2k-1)}. \end{aligned}$$

La série $\sum 1/2n(2n-1)$ est convergente puisque son terme général est positif et équivalent à $1/4n^2$ donc la suite (S_{2n}) converge. Pour les termes de rang impair, on a simplement pour tout n que $S_{2n+1} = S_{2n} - 1/(2n+1)$ donc la suite (S_{2n+1}) est convergente et de même limite que que (S_{2n}) . Par conséquent (S_n) converge.

2.21 **Théorème.** Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. On appelle S_n la suite des sommes partielles de (u_n) et T_n la suite des sommes partielles de $(|u_n|)$, qui est donc supposée convergente. On va alors montrer que (S_n) est une suite de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse (T_n) converge donc c'est une suite de Cauchy, donc il existe un rang N tel que pour tous $m, n \geq N$ on a $|T_n - T_m| \leq \varepsilon$. Considérons alors deux entiers $m, n \geq N$ et étudions $|S_n - S_m|$. Pour simplifier, on suppose (sans perte de généralité) que l'on a $n \geq m$. Alors

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n u_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |u_k| = T_n - T_m \leq \varepsilon$$

Ainsi (S_n) est une suite de Cauchy donc elle est convergente. $\square$

L'exemple de la série $\sum (-1)^n/n$ illustre en fait un cas de série assez courant : le signe change entre un terme et le suivant, et la valeur absolue décroît vers 0. On peut en fait généraliser l'exemple en un résultat général de convergence.

2.22 Définition. Une série $\sum u_n$ est dite *alternée* s'il existe une suite (v_n) de signe constant telle que $u_n = (-1)^n v_n$ pour tout n . En d'autres termes $\sum u_n$ est alternée si $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

2.23 Théorème (critère de Leibniz). Soit $\sum u_n$ une série alternée. Si la suite $(|u_n|)$ est décroissante et tend vers 0, alors $\sum u_n$ est convergente.

Démonstration. Supposons pour simplifier que $(-1)^n u_n$ est toujours positif (s'il est toujours négatif, tout se passe de la même façon au signe près). Soit (S_n) la suite des sommes partielles. On va montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Pour les termes de rang impair, on a pour tout n :

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k = |u_0| - |u_1| + |u_2| - \cdots + |u_{2n}| - |u_{2n+1}| = \sum_{k=0}^n (|u_{2k}| - |u_{2k+1}|)$$

or pour chaque k le terme $(|u_{2k}| - |u_{2k+1}|)$ est positif puisque la suite $(|u_n|)$ est décroissante par hypothèse. Par conséquent la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante.

Pour les termes de rang impair, par un calcul similaire on obtient

$$S_{2n} = u_0 - \sum_{k=1}^n (|u_{2k+1}| - |u_{2k+2}|)$$

d'où on déduit que la suite $(S_{2n})_n$ est décroissante.

De plus, pour tout n on a $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} = -|u_{2n+1}|$ donc $S_{2n+1} \leq S_{2n}$. En combinant cette inégalité avec la croissance de (S_{2n+1}) et la décroissance de (S_{2n}) on en déduit que (S_{2n}) est décroissante et minorée (par S_1) donc convergente et que (S_{2n+1}) est croissante et majorée (par S_0) donc convergente. Enfin, on a

$$\lim(S_{2n+1}) - \lim(S_{2n}) = \lim(S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim(u_{2n+1}) = 0$$

puisque (u_n) tend vers 0 par hypothèse. Par conséquent (S_{2n}) et (S_{2n+1}) ont même limite, donc (S_n) est convergente. $\square$

- 2.24 La réciproque de ce théorème est fausse : on peut trouver une série alternée convergente dont le terme général n'est pas décroissant (le terme général doit bien sûr tendre vers 0 faute de quoi il y a divergence grossière de la série).