

Equations différentielles sur les hypersurfaces de \mathbb{P}^4

Erwan Rousseau

Résumé

Dans cet article nous démontrons que toute courbe entière dans une hypersurface lisse de degré $d \geq 97$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$ doit satisfaire une équation différentielle algébrique d'ordre 3. Nous donnons également la version logarithmique de ce théorème en montrant que toute courbe entière dans le complémentaire d'une surface lisse de degré $d \geq 92$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ doit satisfaire une équation différentielle algébrique d'ordre 3.

1 Introduction

En 1970, S.Kobayashi [15] a proposé la conjecture qui stipule qu'une hypersurface générique X de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ de grand degré d par rapport à n est hyperbolique et que son complémentaire est hyperbolique pour $d \geq 2n + 1$. Dans le cas de la dimension 2, Demailly et El Goul ont montré [8] l'hyperbolicité des hypersurfaces très génériques $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ telles que $d \geq 21$ et El Goul a obtenu [11] que le complémentaire d'une courbe très générique dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ est hyperbolique pour $d \geq 15$. Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation des fibrés de jets de différentielles de Demailly $E_{k,m}T_X^*$ introduits dans [7], et leur version logarithmique [10]. Soit $\phi : \mathbb{C} \rightarrow X$ une courbe entière. L'idée pour traiter les problèmes d'hyperbolicité est que les sections globales des fibrés $E_{k,m}T_X^*$ s'annulant sur un diviseur ample fournissent des équations différentielles pour la courbe ϕ . Dans le cas des surfaces lisses $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, on sait [7] que pour $d \geq 15$, $H^0(X, E_{2,m}T_X^* \otimes A^{-1}) \neq 0$ pour m suffisamment grand. Dans ce papier nous allons montrer qu'en dimension 3, il faut au minimum chercher des opérateurs différentiels d'ordre 3 :

Théorème 1.1 *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface de degré $d \geq 2$, lisse. Alors :*

$$H^0(X, E_{2,m}T_X^*) = 0.$$

Autrement dit, il n'y a pas de jets de différentielles d'ordre 2 définis globalement sur X .

Une démonstration simple de ce résultat, sans faire appel au théorème de Borel-Weil-Bott [9], est obtenue à l'aide des complexes de Schur.

Récemment Y.T. Siu [22] a présenté une méthode pour produire des opérateurs différentiels en toute dimension n pour un degré d de X plus grand qu'une constante dépendant de n . Si nous nous intéressons au degré d , le résultat principal de cet article est l'obtention de sections globales des fibrés d'opérateurs différentiels d'ordre 3 avec le résultat suivant

Théorème 1.2 *Soit X une hypersurface lisse de degré $d \geq 97$ de \mathbb{P}^4 et A un fibré en droites ample, alors il y a des sections globales de $E_{3,m}T_X^* \otimes A^{-1}$ pour m suffisamment grand et toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ doit satisfaire l'équation différentielle correspondante.*

et sa version logarithmique

Théorème 1.3 *Soit X une hypersurface lisse de degré $d \geq 92$ de \mathbb{P}^3 et A un fibré en droites ample, alors il y a des sections globales de $E_{3,m}\overline{T}_{\mathbb{P}^3}^* \otimes A^{-1}$ pour m suffisamment grand et toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^3 \setminus X$ doit satisfaire l'équation différentielle correspondante.*

Indiquons les points essentiels de la preuve de ces deux théorèmes. Elle se fonde tout d'abord sur les résultats que nous avons obtenus dans [20] qui donnent la décomposition du gradué du fibré des jets d'ordre 3 en ses représentations irréductibles de Schur.

La clé de la démonstration est alors une majoration de $h^2(X, Gr^\bullet E_{3,m}T_X^*)$. Nous l'obtenons par l'étude de la cohomologie du fibré vectoriel $\Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}T_X^*$ sur X . Celle-ci est faite en remontant aux variétés de drapeaux : sur celles-ci existent des fibrés en droites dont la cohomologie est reliée à celle du fibré vectoriel considéré par les suites spectrales de Leray.

2 Préliminaires

2.1 Fibrés de jets de différentielles

Nous rappelons ici les définitions et propriétés de base des espaces de jets construits par J.-P. Demailly dans [7].

Soit X une variété complexe lisse. On part du couple (X, V) où $V \subset T_X$ est un sous fibré du fibré tangent de X . On définit alors $X_1 := \mathbb{P}(T_X)$, et le fibré $V_1 \subset T_{X_1}$ est défini par

$$V_{1,(x,[v])} := \{\xi \in T_{X_1,(x,[v])} ; \pi_*\xi \in \mathbb{C}v\}$$

où $\pi : X_1 \rightarrow X$ est la projection naturelle. Si l'on a un germe de courbe $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (X, x)$ on peut le relever à X_1 et l'on note le relevé $f_{[1]}$.

Par induction, on obtient une tour de variétés (X_k, V_k) . On note $\pi_k : X_k \rightarrow X$ la projection. Considérons l'image directe $\pi_{k*}(\mathcal{O}_{X_k}(m))$. C'est un fibré vectoriel sur X que l'on peut décrire avec des coordonnées locales. Soit $z = (z_1, \dots, z_n)$ des coordonnées centrées en un point $x \in X$. Une section locale du fibré $\pi_{k*}(\mathcal{O}_{X_k}(m))$ est un polynôme

$$P = \sum_{|\alpha_1|+2|\alpha_2|+\dots+k|\alpha_k|=m} R_\alpha(z) dz^{\alpha_1} \dots d^k z^{\alpha_k}$$

qui agit de manière naturelle sur les fibres du fibré $J_k \rightarrow X$ des k -jets de germes de courbes dans X , i.e l'ensemble des classes d'équivalence des applications holomorphes $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (X, x)$ modulo la relation d'équivalence suivante : $f \sim g$ si et seulement si toutes les dérivées $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)$ coïncident pour $0 \leq j \leq k$. De plus P est invariant par reparamétrisation, i.e

$$P((f \circ \phi)', \dots, (f \circ \phi)^{(k)})_t = \phi'(t)^m P(f', \dots, f^{(k)})_{\phi(t)}$$

pour tout ϕ du groupe \mathbb{G}_k des germes de k -biholomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$. Le fibré vectoriel $\pi_{k*}(\mathcal{O}_{X_k}(m))$ est noté $E_{k,m}V^*$. En général, il semble difficile d'obtenir une filtration de ce fibré, cependant on a les cas simples suivants.

Pour $k = 1$, $E_{1,m}T_X^* = S^m T_X^*$.

Si X est une surface, la description de $E_{2,m}T_X^*$ est la suivante. On note $W = dz_1 d^2 z_2 - dz_2 d^2 z_1$ le wronskien, alors tout opérateur différentiel invariant d'ordre 2 et de degré m s'écrit

$$P = \sum_{|\alpha|+3k=m} R_{\alpha,k}(z) dz^\alpha W^k.$$

Le théorème suivant permet de comprendre pourquoi les espaces de jets sont utiles pour les problèmes d'hyperbolicité :

Théorème [13], [7]. *Supposons qu'il existe des entiers $k, m > 0$ et un fibré en droites ample L sur X tel que*

$$H^0(X_k, \mathcal{O}_{X_k}(m) \otimes \pi_k^* L^{-1}) \simeq H^0(X, E_{k,m}V^* \otimes L^{-1})$$

ait des sections non nulles $\sigma_1, \dots, \sigma_N$. Soit $Z \subset X_k$ le lieu de base de ces sections. Alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ tangente à V vérifie $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset Z$. Autrement dit, pour tout opérateur différentiel P , \mathbb{G}_k -invariant à valeurs dans L^{-1} , toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ tangente à V vérifie l'équation différentielle $P(f) = 0$.

Rappelons qu'une variété complexe, lisse et compacte est hyperbolique s'il n'existe pas de courbes entières non constantes $f : \mathbb{C} \rightarrow X$. Ainsi, le problème est de produire suffisamment d'équations différentielles algébriquement indépendantes.

Dans le cas des surfaces, le résultat suivant donne un critère numérique pour l'existence de sections globales non nulles de $E_{2,m}T_X^* \otimes L^{-1}$

Théorème [7]. *Soit X une surface algébrique de type général et L un fibré en droites ample sur X . Alors*

$$h^0(X, E_{2,m}T_X^* \otimes L^{-1}) \geq \frac{m^4}{648}(13c_1^2 - 9c_2) + O(m^3).$$

Pour les hypersurfaces $X \subset \mathbb{P}^3$ de degré d , ce théorème montre l'existence de telles sections pour $d \geq 15$.

2.2 Décomposition des jets en représentations irréductibles

2.2.1 Les foncteurs de Schur

Soit V est un espace vectoriel complexe de dimension finie r . A l'ensemble des r -uplets décroissants $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$, $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$, on associe de manière fonctorielle une collection d'espaces vectoriels $\Gamma^{(a_1, \dots, a_r)}V$ qui fournit la liste de toutes les représentations polynômiales irréductibles du groupe linéaire $Gl(V)$, à isomorphisme près. Γ^\bullet est appelé foncteur de Schur. Donnons une description simple de ces foncteurs. Soit $\mathbb{U}_r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ le groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures $r \times r$. Si tous les a_j sont positifs, on définit

$$\Gamma^{(a_1, \dots, a_r)}V \subset S^{a_1}V \otimes \dots \otimes S^{a_r}V$$

comme étant l'ensemble des polynômes $P(x_1, \dots, x_r)$ sur $(V^*)^r$ qui sont homogènes de degré a_j par rapport à x_j et qui sont invariants sous l'action à droite de \mathbb{U}_r sur $(V^*)^r$ i.e tels que

$$P(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + x_k, x_{j+1}, \dots, x_r) = P(x_1, \dots, x_r) \quad \forall k < j.$$

Si (a_1, \dots, a_r) n'est pas décroissant alors on pose $\Gamma^{(a_1, \dots, a_r)}V = 0$. Comme cas particuliers on retrouve les puissances symétriques et les puissances extérieures :

$$\begin{aligned} S^k V &= \Gamma^{(k, 0, \dots, 0)}V, \\ \wedge^k V &= \Gamma^{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}V \text{ (avec } k \text{ indices 1)}, \\ \det V &= \Gamma^{(1, \dots, 1)}V. \end{aligned}$$

Les foncteurs de Schur satisfont la formule

$$\Gamma^{(a_1+l, \dots, a_r+l)}V = \Gamma^{(a_1, \dots, a_r)}V \otimes (\det V)^l$$

qui peut être utilisée pour définir $\Gamma^{(a_1, \dots, a_r)}V$ si l'on a des a_i négatifs.

2.2.2 Dualité de Schur, Tableaux de Young (cf.[12])

Faisons le lien avec les représentations du groupe symétriques. Les représentations irréductibles du groupe symétrique S_r correspondent aux classes de conjugaison de S_r , i.e aux partitions $(l) : r = l_1 + l_2 + \dots + l_d$ avec $l_i \in \mathbb{Z}$ et $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_d > 0$. La partition (l) peut être décrite par un diagramme de Young avec r cases et dont les longueurs des lignes sont l_1, l_2, \dots, l_d . Les longueurs de ses colonnes sont $d_j = \text{card}\{i \in \mathbb{Z} : l_i \geq j\}$ ($j = 1, 2, \dots, l_1; l = l_1$: longueur du diagramme ; $d = d_1$: hauteur du diagramme ; $\sum l_i = \sum d_j = r$). Un tableau de Young t associé à un diagramme de Young est tout simplement une numérotation des cases par les entiers $1, 2, \dots, r$. Pour un tableau de Young fixé t on introduit un idempotent e_t de l'algèbre $\mathbb{C}.S_r$:

$$e_t = \frac{v(l)}{r!} \cdot \left(\sum_{q \in Q_t} \text{sgn}(q) \cdot q \right) \cdot \left(\sum_{p \in P_t} p \right)$$

avec $v(l) = \frac{r!}{d!} \cdot \prod_{i=1}^d \frac{i!}{(l_i+d-i)!} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq d} \binom{l_i-l_j}{j-i} + 1$ et les sous-groupes

$$P_t = \{p \in S_r : p \text{ préserve chaque ligne de } t\},$$

$$Q_t = \{q \in S_r : q \text{ préserve chaque colonne de } t\}.$$

Un tableau de Young t est appelé tableau standard si sur chaque ligne et chaque colonne les entiers sont rangés par ordre croissant. Le nombre de tableaux standards associé à un diagramme de Young est égal à $v(l)$. Soit $D(r)$ l'ensemble de tous les tableaux standards à r cases. Alors l'identité $1 \in \mathbb{C}.S_r$ se décompose en

$$1 = \sum_{t \in D(r)} e_t$$

et ces idempotents sont orthogonaux deux à deux.

Le groupe symétrique S_r et donc l'algèbre $\mathbb{C}.S_r$ agit sur $V^{\otimes r}$ par permutations des indices des éléments de tenseurs :

$$p(a_1 \otimes a_2 \dots \otimes a_r) = a_{p^{-1}(1)} \otimes a_{p^{-1}(2)} \dots \otimes a_{p^{-1}(r)}, \quad \forall p \in S_r.$$

Par la décomposition précédente de l'identité on obtient

$$V^{\otimes r} = \bigoplus_{t \in D(r)} \Gamma^t V$$

avec $\Gamma^t V = e_t(V^{\otimes r})$. Si les tableaux de Young t, \tilde{t} correspondent au même diagramme de Young, i.e à la même partition (l) alors $\Gamma^t V$ et $\Gamma^{\tilde{t}} V$ sont isomorphes. D'où

$$V^{\otimes r} = \bigoplus_{(l)} (\Gamma^{(l)} V)^{\oplus v(l)}, \text{ où } (l) \text{ décrit les partitions de } r.$$

2.2.2.1 Cas du fibré cotangent Considérons une variété algébrique lisse X et son fibré cotangent T_X^* . Pour chaque partition (l) ,

$$\dim H^0(X, \Gamma^{(l)} T_X^*)$$

est un invariant birationnel de la variété X (cf.[18]). Dans le cas de certaines partitions particulières, on a par exemple le genre cotangentiel

$$\dim H^0(X, S^m T_X^*)$$

(cf. [21]) pour $(l) = (m, 0, \dots, 0)$, ou bien le nombre de Hodge h^{0r} pour $(l) = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ avec r fois "1". Malheureusement le calcul de ces invariants et celui des groupes de cohomologie d'ordre supérieur est assez difficile (cf. chapitre 4).

2.2.2.2 Coefficient de Littlewood-Richardson Un diagramme de Young *gauche* est le diagramme obtenu en enlevant un diagramme plus petit d'un diagramme de Young qui le contient. Si deux diagrammes correspondent aux partitions $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$, on écrit $\mu \subset \lambda$ si le diagramme de μ est contenu dans celui de λ , i.e, $\mu_i \leq \lambda_i$ pour tout i . Le diagramme gauche est noté λ/μ . Un tableau gauche est un diagramme gauche rempli par des entiers positifs qui sont en croissance stricte sur les colonnes et croissance faible sur les lignes. On définit *le mot* d'un tableau gauche t (ou mot en ligne), $w(t)$ (ou $w_r(t)$) en lisant les entiers de t de la gauche vers la droite et de bas en haut. Un mot $w = x_1 x_2 \dots x_r$ est dit de *Yamanouchi* si, quand on le lit en partant de la fin jusqu'à n'importe quelle lettre, la suite x_r, x_{r-1}, \dots, x_s contient au moins autant de "1" que de "2", au moins autant de "2" que de "3", ...

Un tableau gauche t est un tableau gauche de Littlewood-Richardson si son mot $w_r(t)$ est de Yamanouchi. Un tableau gauche a pour contenu $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ si les entiers qu'il contient vérifient : il y a μ_1 "1", μ_2 "2" ..., μ_l "l".

Definition 2.1 (cf.[12]) *Le coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\lambda, \mu}^\nu$ est le nombre de tableaux gauches de Littlewood-Richardson de forme ν/λ de contenu μ .*

Remarque 2.2 [12] C'est aussi la multiplicité de $\Gamma^\nu V$ dans $\Gamma^\lambda V \otimes \Gamma^\mu V$.

2.2.3 Caractères, fonctions de Schur

On définit le caractère multiplicatif de $T = \{(x = \text{diag}(x_1, \dots, x_r)) \subset G$ le sous-groupe des matrices diagonales inversibles comme étant l'application :

$$\chi_\lambda : T \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$d(t) \rightarrow t_1^{\lambda_1} \dots t_r^{\lambda_r}.$$

On pose : $X^\lambda = X_1^{\lambda_1} \dots X_r^{\lambda_r}$. On définit le caractère formel $ch(E)(X)$ de E comme étant le polynôme :

$$ch(E)(X) = \sum_{\lambda} (\dim E_\lambda) X^\lambda \text{ où } E_\alpha = \{e \in E : x.e = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} e, \forall x \in T\}.$$

Faisons le lien avec le caractère de Chern.

Proposition 2.3 Soit V un fibré vectoriel de rang r sur X .

Notons la factorisation formelle :

$$\sum_{i=0}^r c_i(V) x^i = \prod_{i=1}^r (1 + a_i x)$$

.Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \Lambda(r, n) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r, \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r, \sum \lambda_i = n\}$.

Alors :

$$Ch(\Gamma^\lambda V) = ch(\Gamma^\lambda V)(e^{a_1}, \dots, e^{a_r}),$$

où Ch désigne le caractère de Chern.

Démonstration. Par [14] il suffit de le vérifier pour V somme directe de fibrés en droites.

Soit donc :

$V = \bigoplus_{i=1}^r \xi_i$. Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert pour lequel les ξ_i sont

représentés par les cocycles $\{a_{ii}^{k,l}\}$:

$$a_{ii}^{k,l} : U_k \cap U_l \rightarrow \mathbb{C}^*.$$

V est donc représenté par un cocycle :

$$g_{k,l}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}^{k,l}(x) & & & \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ & & & a_{rr}^{k,l}(x) \end{pmatrix} = \text{diag}(a_{11}^{k,l}(x), \dots, a_{rr}^{k,l}(x)) \text{ pour } x \in$$

$U_k \cap U_l$.

Soit :

$\rho : GL(V) \rightarrow GL(\Gamma^\lambda V)$ la représentation associée à λ .

Le fibré vectoriel $\Gamma^\lambda V$ est donc représenté par le cocycle $h_{k,l}(x) = \rho(g_{k,l}(x))$. Par le fait que $\Gamma^\lambda V$ est somme de ses espaces de poids, $\Gamma^\lambda V = \bigoplus_{\mu \in \Lambda(r,n)} (\Gamma^\lambda V)^\mu$

on obtient :

$$h_{k,l}(x) = \rho(g_{k,l}(x)) = \text{diag} \left(\begin{array}{ccc} (a_{11}^{k,l})^{\mu_1} \dots (a_{rr}^{k,l})^{\mu_r} & & \\ & \dots & \\ & & (a_{11}^{k,l})^{\mu_1} \dots (a_{rr}^{k,l})^{\mu_r} \end{array} \right),$$

matrice diagonale par blocs où les blocs sont des matrices diagonales de dimension $\dim(\Gamma^\lambda V)^\mu$.

Ainsi :

$$\Gamma^\lambda V = \bigoplus_{\mu \in \Lambda(r,n)} (\dim(\Gamma^\lambda V)^\mu) \xi_1^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \xi_r^{\mu_r}.$$

Donc :

$$Ch(\Gamma^\lambda V) = ch(\Gamma^\lambda V)(e^{a_1}, \dots, e^{a_r}). \quad \square$$

Rappelons maintenant [19] qu'en caractéristique 0, ce qui est notre cas, on a accès au caractère formel :

$ch(\Gamma^\lambda V) = ch_\lambda = s_\lambda$ où s_λ est la fonction de Schur de type λ définie par :

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$$

où pour $\alpha \in \Lambda(r,n) : a_\alpha(X) = \det[(X_i^{\alpha_j})]$ et $\delta = (r-1, r-2, \dots, 0)$.

2.2.4 Décomposition des jets d'ordre 3 en dimension 3

Dans [20] nous avons obtenu la décomposition du gradué du fibré des jets d'ordre 3 en dimension 3 :

Théorème [20]. *Soit X une variété complexe de dimension 3, alors :*

$$Gr^\bullet E_{3,m} T_X^* = \bigoplus_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\bigoplus_{\{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=m-\gamma; \lambda_i-\lambda_j \geq \gamma, i < j\}} \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} T_X^* \right)$$

où Γ est le foncteur de Schur.

Cette décomposition a permis par Riemann-Roch un calcul de caractéristique d'Euler :

Proposition [20]. *Soit X une hypersurface lisse de degré d de \mathbb{P}^4 , alors*

$$\chi(X, E_{3,m} T_X^*) = \frac{m^9}{81648 \times 10^6} d(389d^3 - 20739d^2 + 185559d - 358873) + O(m^8)$$

On obtient alors la positivité de la caractéristique d'Euler :

Corollaire [20]. *Pour $d \geq 43$, $\chi(X, E_{3,m} T_X^*) \sim \alpha(d)m^9$ avec $\alpha(d) > 0$.*

2.3 Les variétés de drapeaux

Soit X une variété complexe lisse de dimension 3. Notons $Fl(T_X^*)$ la variété des drapeaux de T_X^* i.e des suites de sous-espaces vectoriels emboîtés

$$D = \{0 = E_3 \subset E_2 \subset E_1 \subset E_0 = T_{X,x}^*\}.$$

Soit $\pi : Fl(T_X^*) \rightarrow X$. C'est une fibration localement triviale dont la dimension relative est : $N = 1 + 2 = 3$.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ une partition telle que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Notons \mathcal{L}^λ le fibré en droites sur $Fl(T_X^*)$ dont la fibre au-dessus du drapeau précédent est $\mathcal{L}_D^\lambda = \bigotimes_{i=1}^3 \det(E_{i-1}/E_i)^{\otimes \lambda_i}$. D'après le théorème de Bott [3], si $m \geq 0$:

$$\begin{aligned} \pi_*(\mathcal{L}^\lambda)^{\otimes m} &= \Gamma^{m\lambda} T_X^*, \\ \mathcal{R}^q \pi_*(\mathcal{L}^\lambda)^{\otimes m} &= 0 \text{ si } q > 0. \end{aligned}$$

Les fibrés $\Gamma^{m\lambda} T_X^*$ et $(\mathcal{L}^\lambda)^{\otimes m}$ ont donc même cohomologie.

3 Etude de la cohomologie

Soit X une variété complexe lisse de dimension 3. Nous étudions maintenant les fibrés $\Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} T_X^*$ et leur cohomologie. Pour obtenir l'existence de suffisamment d'opérateurs différentiels, i.e de sections globales des fibrés $E_{k,m} T_X^*$, il est crucial de contrôler les groupes de cohomologie. En dimension 2 le point clé est l'utilisation d'un théorème d'annulation de Bogomolov [2] valable sur les surfaces de type général. En dimension 3, nous allons voir que l'on ne peut espérer un tel théorème d'annulation. En effet, on a peu de résultats explicites sur la détermination des groupes de cohomologie. Citons tout de même un théorème d'annulation dû à J.-P. Demailly [7] :

Théorème 3.1 *Soit X une variété algébrique projective de dimension n , et L un fibré en droites sur X . Supposons que X est de type général est minimal (i.e. K_X est big et nef) et soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, $a_1 \geq \dots \geq a_n$. Si l'on a L pseudoeffectif et $|a| = \sum a_j > 0$, ou L big et $|a| \geq 0$, alors*

$$H^0(X, \Gamma^a T_X \otimes L^*) = 0.$$

Malheureusement ce théorème ne nous renseigne que sur le groupe H^3 par la dualité de Serre. Or, ce que nous souhaitons obtenir est un contrôle du H^2 . Nous allons donc présenter dans cette section une approche élémentaire

pour traiter ce problème utilisant des outils algébriques (essentiellement les suites exactes), et des outils provenant de l'analyse complexe (théorèmes d'annulation sous hypothèse de positivité des fibrés).

Rappelons la formule :

$$\Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} T_X^* = \Gamma^{(\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, 0)} T_X^* \otimes K_X^{\lambda_3}.$$

3.1 Les jets d'ordre 1 et 2

Montrons tout d'abord la nécessité d'étudier les jets d'ordre 3. L'absence de 1-jets définis globalement est bien connue :

Proposition 3.2 ([21])

$$H^0(X, S^m T_X^*) = 0 \text{ pour } m \geq 1.$$

On a également absence des 2-jets. En effet, on a le résultat suivant :

Théorème 3.3 Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface de degré $d \geq 2$, lisse et irréductible. Alors :

$$H^0(X, E_{2,m} T_X^*) = 0.$$

Autrement dit, il n'y a pas de jets de différentielles d'ordre 2 définis globalement sur X .

Nous allons donner une démonstration de ce résultat, sans faire appel au théorème de Borel-Weil-Bott [9], à l'aide des complexes de Schur qui ne sont pas utilisés dans la preuve d'un théorème plus général de P. Brückmann et H.G. Rackwitz [4] qui permet de montrer aussi ce résultat :

Théorème 3.4 Soit T tableau de Young, d_i le nombre de cases de la colonne i et X une intersection complète de dimension p de \mathbb{P}^n . Alors

$$H^0(X, \Gamma^T T_X^*) = 0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n-p} d_i < \dim X = p.$$

L'outil fondamental est l'existence de suites exactes. En effet, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow T_X \rightarrow T_{\mathbb{P}^4|X} \rightarrow \mathcal{O}_X(d) \rightarrow 0.$$

Donc par dualité :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-d) \rightarrow T_{\mathbb{P}^4|X}^* \rightarrow T_X^* \rightarrow 0.$$

Rappelons la proposition suivante qui donne une résolution de tout fibré de Schur :

Proposition 3.5 ([16]) Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte d'espaces vectoriels. Il y a un complexe $C_\mu \rightarrow \Gamma^\mu C \rightarrow 0$, dont le j -ème terme est $C_\mu^j = \bigoplus_{|\nu|=j, \rho} c_{\nu, \rho}^\mu \Gamma^{\nu^*} A \otimes \Gamma^\rho B$ où $c_{\nu, \rho}^\mu$ est le coefficient de Littlewood-Richardson et ν^* désigne la partition conjuguée de ν .

On applique cette proposition à la suite exacte précédente pour obtenir une résolution de $\Gamma^{(b_1, b_2, 0)} T_X^*$:

Proposition 3.6 Soit $b_1 \geq b_2 \geq 1$. On a la suite exacte :

$$\begin{aligned} (1) \quad &: 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-2d) \otimes \Gamma^{(b_1-1, b_2-1, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \\ &\rightarrow \mathcal{O}_X(-d) \otimes \Gamma^{(b_1-1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \oplus \mathcal{O}_X(-d) \otimes \Gamma^{(b_1, b_2-1, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \\ &\rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0)} T_X^* \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Démonstration. Puisque la dimension du fibré $\mathcal{O}_X(-d)$ est 1, ν^* est de la forme $(\lambda, 0, 0)$ donc les seules possibilités pour ν sont : $\nu = (1, 0, 0)$; $\nu = (1, 1, 0)$ puisque $\nu \subset \mu = (b_1, b_2, 0, 0)$.

Reste la détermination des partitions ρ telles que les coefficients de Littlewood-Richardson $c_{\nu, \rho}^\mu$ soient non nuls. Par la définition 2.1, nous devons déterminer les tableaux gauches de Littlewood-Richardson de type μ/ν de contenu ρ . Pour $\nu = (1, 0, 0)$, la croissance faible sur les lignes et stricte sur les colonnes impose que le mot $w(\mu/\nu) = (2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$ où il y a b_2 "2" et $(b_1 - 1)$ "1", ou $w(\mu/\nu) = (1, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$ où il y a b_1 "1" et $(b_2 - 1)$ "2". Pour $\nu = (1, 1, 0)$, la seule possibilité est $w(\mu/\nu) = (2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$ avec $(b_2 - 1)$ "2" et $(b_2 - 1)$ "1". Dans tous ces cas une seule partition ρ convient : respectivement $((b_1 - 1), b_2)$; $(b_1, (b_2 - 1))$ et $(b_1 - 1, b_2 - 1)$. De plus il n'y a qu'un seul tableau gauche de Littlewood-Richardson qui convient dans chaque cas, i.e $c_{\nu, \rho}^\mu = 1$. \square

On considère maintenant la suite exacte d'Euler :

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(1)^{\oplus 5} \rightarrow T_{\mathbb{P}^4} \rightarrow 0.$$

On lui applique la proposition 3.5 :

Proposition 3.7 Soit $b_1 \geq b_2 \geq 1$. On a la suite exacte :

$$\begin{aligned} (2) \quad &: 0 \rightarrow \mathcal{O}(b_1 + b_2 - 2)^{\oplus s(b_1-1, b_2-1)} \rightarrow \mathcal{O}(b_1 + b_2 - 1)^{\oplus (s(b_1-1, b_2) + s(b_1, b_2-1))} \\ &\rightarrow \mathcal{O}(b_1 + b_2)^{\oplus s(b_1, b_2)} \rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Où :

$$s(x, y) = (x - y + 1) \frac{(x + 2)}{2} \frac{(x + 3)}{3} \frac{(x + 4)}{4} (y + 1) \frac{(y + 2)}{2} \frac{(y + 3)}{3}.$$

Démonstration. Le complexe de Schur nous donne la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \Gamma^{(b_1-1, b_2-1, 0, 0, 0)}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 5}) \rightarrow \Gamma^{(b_1-1, b_2, 0, 0, 0)}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 5}) \oplus \Gamma^{(b_1, b_2-1, 0, 0, 0)}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 5}) \\ &\rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0, 0)}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 5}) \rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0, 0)}T_{\mathbb{P}^4} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de déterminer $\Gamma^{(a, b, 0, 0, 0)}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 5})$. Pour V somme directe de fibrés en droites i.e $V = \bigoplus_{i=1}^r \xi_i$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \Lambda(r, n) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r, \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r, \sum \lambda_i = n\}$, on a

$$\Gamma^\lambda V = \bigoplus_{\mu \in \Lambda(r, n)} (\dim(\Gamma^\lambda V)^\mu) \xi_1^{\mu_1} \otimes \dots \otimes \xi_r^{\mu_r}.$$

Donc, ici :

$$\Gamma^{(a, b, 0, 0, 0)}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 5}) = \mathcal{O}(a + b)^{\oplus d}$$

où d est le rang de $\Gamma^{(a, b, 0, 0, 0)}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 5})$. Le rang des fibrés de Schur est connue (cf.[12]) :

le rang de $\Gamma^\rho E$ est donné par $s_\rho(1, 1, \dots, 1)$ où s_ρ est la fonction de Schur.

On a la propriété ([12]) :

$$s_\rho(1, 1, \dots, 1) = \prod_{i < j} \frac{\rho_i - \rho_{j+j-i}}{j - i}.$$

Donc :

$$d = s(a, b).$$

□

Passons aux applications au niveau de la cohomologie en utilisant le lemme standard :

Lemme 3.8 Soit E un fibré vectoriel sur X .

a) Supposons que l'on ait une résolution de longueur m $E^\bullet \rightarrow E \rightarrow 0$, et que $H^{q+j}(X, E^j) = 0$ pour tout $j \geq 0$. Alors $H^q(X, E) = 0$.

b) Supposons que l'on ait une filtration de E et notons $Gr^\bullet E$ la somme directe des quotients successifs de la filtration. Si $H^q(X, Gr^\bullet E) = 0$ pour $q \geq 0$ fixé, alors $H^q(X, E) = 0$.

Démonstration. En notant $E^j \xrightarrow{\phi_j} E^{j-1}$, on obtient les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{im } \phi_1 \rightarrow E^0 \rightarrow E \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \text{im } \phi_i \rightarrow E^{i-1} \rightarrow \text{im } \phi_{i-1} \rightarrow 0, \text{ pour } 2 \leq i \leq m-1, \\ 0 &\rightarrow E^m \rightarrow E^{m-1} \rightarrow \text{im } \phi_{m-1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

a) découle immédiatement des suites exactes longues de cohomologie.

Soit

$$E \supset E^1 \supset \dots \supset E^p \supset \dots \supset E^m = 0$$

la filtration. On montre par récurrence sur p que $H^q(X, E/E^p) = 0$ grâce à la suite exacte

$$0 \rightarrow E^p/E^{p+1} \rightarrow E/E^{p+1} \rightarrow E/E^p \rightarrow 0.$$

Et b) est montré. □

On obtient la proposition :

Proposition 3.9 *Soit $b_1 \geq b_2 \geq 1$.*

1) *Si : $l - b_1 - b_2 < 0$ alors $H^0(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) = 0$.*

2) *Si : $l - b_1 - b_2 + 1 < 0$ alors $H^1(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) = 0$.*

3) *Si : $l - b_1 - b_2 + 2 < 0$ alors $H^2(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) = 0$.*

4) *Si : $b_1 + b_2 - l + (d - 5) < 0$ alors $H^3(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) = 0$.*

Démonstration. On applique la partie a) du lemme 3.8 précédent à la suite exacte (2) :

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(p)) &= 0 \text{ pour } p + b_1 + b_2 < 0, \\ H^1(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(p)) &= 0, \\ H^2(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(p)) &= 0 \text{ pour } -3 - b_1 - b_2 - p < 0, \\ H^3(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(p)) &= 0 \text{ pour } -4 - b_1 - b_2 - p < 0, \\ H^4(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(p)) &= 0 \text{ pour } -5 - b_1 - b_2 - p < 0. \end{aligned}$$

Par la dualité de Serre

$$H^q(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) = H^{3-q}(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)).$$

Montrer 1) revient à voir pour quelles conditions

$$H^3(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4/X} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) = 0.$$

On a la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(-5 - l) &\rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l) \\ &\rightarrow \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc : $H^3(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) = 0$ pour

$$\begin{aligned} H^3(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) &= 0, \\ H^4(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(-5 - l)) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui est vrai par ce qui précède pour

$$\begin{aligned} -4 - b_1 - b_2 - (d - 5 - l) &< 0, \\ -5 - b_1 - b_2 - (-5 - l) &< 0. \end{aligned}$$

Et 1) est montré.

Montrer 2) revient à voir pour quelles conditions

$$H^2(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4/X} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) = 0.$$

Ceci est le cas pour

$$\begin{aligned} H^2(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) &= 0, \\ H^3(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(-5 - l)) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui est vérifié pour

$$\begin{aligned} -3 - b_1 - b_2 - (d - 5 - l) &< 0, \\ -4 - b_1 - b_2 - (-5 - l) &< 0. \end{aligned}$$

Et 2) est montré.

Montrer 3) revient à voir pour quelles conditions

$$H^1(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) = 0.$$

Ceci est le cas pour

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) &= 0, \\ H^2(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(-5 - l)) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui est vérifié pour

$$-3 - b_1 - b_2 - (-5 - l) < 0.$$

Et 3) est montré.

Montrer 4) revient à voir pour quelles conditions

$$H^0(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) = 0.$$

Ceci est le cas pour

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(d - 5 - l)) &= 0, \\ H^1(\mathbb{P}^4, \Gamma^{(b_1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}(-5 - l)) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui est vérifié pour

$$(d - 5 - l) + b_1 + b_2 < 0.$$

Et 4) est montré. □

On en déduit donc :

Proposition 3.10 Soit $b_1 \geq b_2 \geq 1$, $d \geq 2$.

$$H^0(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0)} T_X^* \otimes \mathcal{O}(l)) = 0 \text{ pour } l - b_1 - b_2 < 0.$$

Démonstration. On applique la partie a) du lemme 3.8 à la suite exacte (1). $H^0(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0)} T_X^* \otimes \mathcal{O}(l)) = 0$ pour

$$\begin{aligned} H^0(X, \Gamma^{(b_1, b_2, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) &= 0, \\ H^1(X, \mathcal{O}_X(-d) \otimes \Gamma^{(b_1-1, b_2, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4/X}^* \otimes \mathcal{O}(l) \oplus \mathcal{O}_X(-d) \otimes \Gamma^{(b_1, b_2-1, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) &= 0, \\ H^2(X, \mathcal{O}_X(-2d) \otimes \Gamma^{(b_1-1, b_2-1, 0, 0)} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui est vérifié par la proposition 3.9 pour

$$\begin{aligned} l - b_1 - b_2 &< 0, \\ l - d - b_1 - b_2 + 2 &< 0, \\ l - 2d - b_1 - b_2 + 4 &< 0. \end{aligned}$$

Et la proposition est montrée. \square

On peut maintenant démontrer le théorème 1.1 annoncé :

Démonstration. On sait que : $Gr^\bullet E_{2,m} T_X^* = \bigoplus_{\lambda_1+2\lambda_2=m} \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, 0)} T_X^*$. On applique la proposition précédente 3.10 et la proposition 3.2 qui nous donnent $H^0(X, Gr^\bullet E_{2,m} T_X^*) = 0$. Donc, par la partie b) du lemme 3.8,

$$H^0(X, E_{2,m} T_X^*) = 0.$$

\square

La prochaine section va montrer que nous pouvons aussi utiliser les théorèmes d'annulation classiques.

3.2 Premiers résultats sur les jets d'ordre 3

Faisons tout d'abord quelques rappels. Soit E un fibré vectoriel hermitien de rang r sur une variété complexe compacte X de dimension n . On note par $C_{p,q}^\infty(E)$ l'espace des formes différentielles C^∞ de type (p, q) sur X à valeurs dans E et par

$$D_E = D'_E + D''_E : C_{p,q}^\infty(E) \rightarrow C_{p+1,q}^\infty(E) \oplus C_{p,q+1}^\infty(E)$$

la connection de Chern de E . Soient (x_1, \dots, x_n) des coordonnées holomorphes sur X et (e_1, \dots, e_n) un repère orthonormal mobile C^∞ de E . Le tenseur de courbure de Chern $c(E)$ est défini par $D_E^2 = c(E) \wedge \bullet$ et peut s'écrire

$$c(E) = \sum_{i,j,\lambda,\mu} c_{ij\lambda\mu} dx_i d\bar{x}_j \otimes e_\lambda^* \otimes e_\mu, \quad 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq \lambda, \mu \leq r.$$

Le tenseur de courbure $ic(E)$ est en fait une $(1, 1)$ -forme à valeur dans le fibré $Herm(E, E)$ des endomorphismes hermitiens de E , i.e $c_{ij\lambda\mu} = \bar{c}_{j\mu\lambda}$; ainsi $ic(E)$ peut être identifié avec une forme hermitienne sur $T_X \otimes E$.

Rappelons qu'un fibré vectoriel E est positif (respectivement semi-positif) au sens de Griffiths si on peut munir E d'une métrique hermitienne telle qu'en tout point $x \in X$:

$$ic(E)_x(\zeta \otimes v, \zeta \otimes v) = \sum_{i,j,\lambda,\mu} c_{ij\lambda\mu}(x) \zeta_i \bar{\zeta}_j v_\lambda \bar{v}_\mu > 0, \text{ resp. } \geq 0; \text{ où } ic(E) \text{ est}$$

le tenseur de courbure, $\zeta = \sum \zeta_i \frac{\partial}{\partial z_i} \in T_X, v = \sum v_\lambda e_\lambda \in E_x$. Rappelons également que tout fibré engendré par ses sections, i.e tel que l'application $H^0(X, E) \rightarrow E_x$ est surjective, est semi-positif (cf.[5])

Nous allons utiliser un théorème d'annulation dû à J.-P. Demailly [5] :

Théorème 3.11 *Soit X une variété complexe de dimension n et L un fibré en droites sur X ; E un fibré vectoriel de rang r . Supposons $E > 0$ et $L \geq 0$, ou $E \geq 0$ et $L > 0$. Soit $h \in \{1, \dots, r-1\}$ et $\Gamma^a E$ le fibré de Schur de poids $a \in \mathbb{Z}^r$, avec $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_h > a_{h+1} = \dots = a_r = 0$.*

Alors pour $q \geq 1$, $H^{n,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ pour $l \geq h$.

Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 3.12 *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface lisse et irréductible de degré d .*

Alors pour $q \geq 1$,

$$H^q(X, \Gamma^{(a_1, a_2, a_3)} T_X^*) = 0 \text{ pour } a_3(d-1) > 2(a_1 + a_2) + 3(d-1).$$

Démonstration. Dans notre situation on a $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface lisse et irréductible de degré d . On a $T_{\mathbb{P}^4}^* \otimes \mathcal{O}(2)$ qui est engendré par ses sections, donc $T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(2)$, quotient de $T_{\mathbb{P}^4}^* \otimes \mathcal{O}(2)$, est semi-positif. Appliquons le théorème précédent à $E = T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(2) \geq 0$:

$$\Gamma^{(a_1 - a_3, a_2 - a_3, 0)} E = \Gamma^{(a_1 - a_3, a_2 - a_3, 0)} T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(2(a_1 - a_3 + a_2 - a_3))$$

et

$$\det E = K_X \otimes \mathcal{O}_X(6).$$

$$\Gamma^{(a_1-a_3, a_2-a_3, 0)} E \otimes (\det E)^2 = \Gamma^{(a_1-a_3, a_2-a_3, 0)} T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(2(a_1+a_2)-4a_3+2(d+1)).$$

Donc :

$$H^q(X, \Gamma^{(a_1, a_2, a_3)} T_X^*) = H^{3, q}(X, \Gamma^{(a_1-a_3, a_2-a_3, 0)} T_X^* \otimes K_X^{(a_3-1)}) = 0$$

pour

$$(a_3 - 1)(d - 5) > 2(a_1 + a_2) - 4a_3 + 2(d + 1)$$

i.e

$$a_3(d - 1) > 2(a_1 + a_2) + 3(d - 1).$$

□

Remarque 3.13 1) *l'étude des suites exactes décrites précédemment par les complexes de Schur fournissent des résultats équivalents en utilisant le théorème de Borel-Weil-Bott [9] comme l'ont montré [18] et [4]. Ainsi, l'utilisation du Théorème 7 de [4] fournit le résultat :*

$$\text{pour } q \geq 1, H^q(X, \Gamma^{(a_1, a_2, a_3)} T_X^*) = 0 \text{ pour } a_3(d - 1) > 2(a_1 + a_2) + 3d - 8.$$

2) *On obtient donc qu'à m fixé, pour d suffisamment grand on a "peu" en proportion de partitions qui donnent une contribution non nulle du H^2 .*

On obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire 3.14 *Pour $a_3(d - 1) > 2(a_1 + a_2) + 3(d - 1)$,*

$$h^0(X, \Gamma^{(a_1, a_2, a_3)} T_X^*) = \chi(X, \Gamma^{(a_1, a_2, a_3)} T_X^*).$$

Remarque 3.15 *Contrairement au cas des jets d'ordre 2 en dimension 2, on ne peut espérer avoir $H^2(X, Gr^\bullet E_{3, m} T_X^*) = 0$ car pour tout m suffisamment grand, il existe $H^2(X, \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} T_X^*) \neq 0$.*

En effet :

Proposition 3.16 *Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface lisse et irréductible de degré $d \geq 6$.*

Alors

$$h^2(X, S^m T_X^*) \underset{+\infty}{\sim} \left(-\frac{7}{24}d + \frac{1}{8}d^2\right)m^5.$$

Démonstration. On sait par la proposition 3.2 que

$$h^0(X, S^m T_X^*) = 0.$$

De plus $H^3(X, S^m T_X^*) = H^0(X, S^m T_X \otimes K_X) = 0$ pour $m > 6$ par le théorème 3.1 car X est de type général ($d \geq 6$) et

$$S^m T_X \otimes K_X = \Gamma^{(m-2, -2, -2)} T_X \otimes K_X^{-1}.$$

On a les suites exactes :

$$(1) : 0 \rightarrow S^m T_{\mathbb{P}^4|X}^* \rightarrow \bigoplus_{\binom{4+m}{m}} \mathcal{O}(-m) \rightarrow \bigoplus_{\binom{4+m-1}{m-1}} \mathcal{O}(1-m) \rightarrow 0$$

$$(2) : 0 \rightarrow S^{m-1} T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(-d) \rightarrow S^m T_{\mathbb{P}^4|X}^* \rightarrow S^m T_X^* \rightarrow 0.$$

De (1) il vient $H^2(X, S^m T_{\mathbb{P}^4|X}^* \otimes \mathcal{O}(l)) = 0$ pour $m > 0$ et $l \in \mathbb{Z}$ et $H^1(X, S^m T_{\mathbb{P}^4|X}^*) = 0$ pour $m \geq 2$. Donc par (2) $H^1(X, S^m T_X^*) = 0$ pour $m \geq 2$. Finalement

$$\chi(X, S^m T_X^*) = h^2(X, S^m T_X^*) \text{ pour } m > 6.$$

On conclut grâce au calcul explicite par Riemann-Roch. □

4 Les jets d'ordre 3 en dimension 3

Nous allons montrer le théorème

Théorème 4.1 *Soit X une hypersurface lisse de degré d de \mathbb{P}^4 , alors*

$$h^2(X, Gr^\bullet E_{3,m} T_X^*) \leq Cd(d+13)m^9 + O(m^8)$$

où C est une constante.

La preuve s'inspire de la démonstration algébrique [1] des inégalités de Morse de Demailly [6] qui stipulent :

Théorème 4.2 *Soit $L = F - G$ un fibré en droites sur une variété compacte Kähler X où F et G sont des fibrés en droites nef. Alors pour $0 \leq q \leq n = \dim X$*

$$h^q(X, kL) \leq \frac{k^n}{(n-q)!q!} F^{n-q} \cdot G^q + o(k^n).$$

Montrons tout d'abord la proposition

Proposition 4.3 Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ une partition telle que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ et $|\lambda| = \sum \lambda_i > 4(d-5) + 18$. Alors :

$$h^2(Fl(T_X^*), \mathcal{L}^\lambda) = h^2(X, \Gamma^\lambda T_X^*) \leq g(\lambda)d(d+13) + q(\lambda)$$

où $g(\lambda) = \frac{3|\lambda|^3}{2} \prod_{\lambda_i > \lambda_j} (\lambda_i - \lambda_j)$ et de plus q est un polynôme en λ de composantes homogènes de plus haut degré 5.

Démonstration. On a

$$\mathcal{L}^\lambda = (\mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(3|\lambda|)) \otimes (\pi^* \mathcal{O}_X(3|\lambda|))^{-1} = F \otimes G^{-1},$$

avec $F = \mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(3|\lambda|)$, $G = \pi^* \mathcal{O}_X(3|\lambda|)$. $\mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(3|\lambda|)$ est positif. En effet, on a la propriété générale [5] que si E est un fibré vectoriel semi-positif i.e $E \geq 0$ alors le fibré en droites correspondant $\mathcal{L}(E)^\lambda$ est aussi semi-positif. Ici, $E = T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(2)$ est semi-positif et

$$\mathcal{L}(E)^\lambda \simeq \mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(2|\lambda|) \geq 0,$$

donc

$$\mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(3|\lambda|) > 0.$$

Soit $Y = Fl(T_X^*)$. Tout d'abord montrons que $H^i(Y, F) = 0$ pour tout $i \geq 1$ et λ telle que $|\lambda| = \sum \lambda_i > 4(d-5) + 18$. Pour cela nous utilisons le théorème d'annulation de Kodaira qui stipule que pour tout fibré en droites A ample sur une variété projective Z complexe $H^i(Z, K_Z \otimes A) = 0$ pour $i > 0$. En effet, regardons à quelles conditions

$$F \otimes K_Y^{-1} > 0.$$

Rappelons [17] que

$$K_Y = \mathcal{L}^{-(5,3,1)} \otimes \pi^*(K_X \otimes \det(T_X^*)^{\otimes 3}) = \mathcal{L}^{-(5,3,1)} \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(4(d-5)).$$

Donc

$$F \otimes K_Y^{-1} = \mathcal{L}^{\lambda+(5,3,1)} \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(3|\lambda| - 4(d-5)).$$

Or on a

$$\mathcal{L}^{\lambda+(5,3,1)} \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(2|\lambda| + (5,3,1)|) = \mathcal{L}^{\lambda+(5,3,1)} \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(2|\lambda| + 18) \geq 0.$$

Par conséquent $F \otimes K_Y^{-1} > 0$ si

$$3|\lambda| - 4(d-5) > 2|\lambda| + 18$$

c'est-à-dire

$$|\lambda| > 4(d-5) + 18.$$

Prenons un diviseur $D = \pi^*E_1 \in |G|$, lisse et irréductible. On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(F \otimes G^{-1}) \rightarrow \mathcal{O}_Y(F) \rightarrow \mathcal{O}_D(F) \rightarrow 0.$$

donc la suite exacte longue en cohomologie :

$$0 = H^1(Y, \mathcal{O}_Y(F)) \rightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D(F)) \rightarrow H^2(Y, \mathcal{O}_Y(F \otimes G^{-1})) \rightarrow H^2(Y, \mathcal{O}_Y(F)) = 0.$$

Donc

$$h^2(Y, \mathcal{O}_Y(F \otimes G^{-1})) = h^1(D, \mathcal{O}_D(F)).$$

Prenons un deuxième diviseur $D' = \pi^*E_2 \in |G|$, lisse et irréductible, rencontrant D proprement. Soit $Z = D \cap D'$, $F' = F \otimes G$ et $E_3 = E_1 \cap E_2$. On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_D(F' \otimes G^{-1}) \rightarrow \mathcal{O}_D(F') \rightarrow \mathcal{O}_Z(F') \rightarrow 0.$$

Par adjonction

$$K_D = (K_Y)_{|D} \otimes \mathcal{O}_D(D)$$

donc

$$F'_{|D} \otimes K_D^{-1} = (F \otimes K_Y^{-1})_{|D} > 0.$$

Ainsi

$$h^1(D, \mathcal{O}_D(F)) \leq h^0(Z, \mathcal{O}_Z(F')) = h^0(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G)) \leq h^0(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G^2)).$$

Or comme précédemment

$$\mathcal{O}_Z(F \otimes G^2) \otimes K_Z^{-1} = (F \otimes K_Y^{-1})_{|Z} > 0$$

donc

$$h^0(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G^2)) = \chi(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G^2)).$$

On a

$$\chi(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G^2)) = \chi(E_3, \Gamma^\lambda T_{X|E_3}^* \otimes \mathcal{O}_{E_3}(9|\lambda)).$$

Par Riemann-Roch et la proposition 2.3, on sait explicitement calculer

$$\chi(X, \Gamma^\lambda T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(t)).$$

On a les suites exactes

$$\begin{aligned} (1) \quad 0 &\rightarrow \Gamma^\lambda T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(t - E_1) \rightarrow \Gamma^\lambda T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(t) \rightarrow \Gamma^\lambda T_{X|E_1}^* \otimes \mathcal{O}_{E_1}(t) \rightarrow 0 \\ (2) \quad 0 &\rightarrow \Gamma^\lambda T_{X|E_1}^* \otimes \mathcal{O}_E(t - E_3) \rightarrow \Gamma^\lambda T_{X|E_1}^* \otimes \mathcal{O}_{E_1}(t) \rightarrow \Gamma^\lambda T_{X|E_3}^* \otimes \mathcal{O}_{E_3}(t) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\chi(E_3, \Gamma^\lambda T_{X|E_3}^* \otimes \mathcal{O}_{E_3}(9|\lambda|)) &= \chi(E_1, \Gamma^\lambda T_{X|E_1}^* \otimes \mathcal{O}_{E_1}(9|\lambda|)) - \chi(E_1, \Gamma^\lambda T_{X|E_1}^* \otimes \mathcal{O}_{E_1}(6|\lambda|)) \\ &= (\chi(X, \Gamma^\lambda T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(9|\lambda|)) - \chi(X, \Gamma^\lambda T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(6|\lambda|))) - \\ &\quad (\chi(X, \Gamma^\lambda T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(6|\lambda|)) - \chi(X, \Gamma^\lambda T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(3|\lambda|))).\end{aligned}$$

On termine le calcul explicite (cf. annexe) sur Maple et la proposition est démontrée. \square

Passons maintenant à la démonstration du théorème 4.1 :

Démonstration. Estimons maintenant

$$h^2(X, Gr^\bullet E_{3,m} T_X^*) = \sum_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\sum_{\{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = m - \gamma; \lambda_i - \lambda_j \geq \gamma, i < j\}} h^2(X, \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} T_X^*) \right).$$

Pour m suffisamment grand λ vérifie $|\lambda| = \sum \lambda_i > 4(d-5) + 18$. En effet

$$\frac{4m}{5} \leq m - \gamma = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \leq 6\lambda_1$$

donc

$$|\lambda| \geq \lambda_1 \geq \frac{2m}{15}.$$

On applique la proposition 4.3 et par sommation :

$$h^2(X, Gr^\bullet E_{3,m} T_X^*) \leq d(d+13) \sum_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\sum_{\{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = m - \gamma; \lambda_i - \lambda_j \geq \gamma, i < j\}} g(\lambda) \right) + O(m^8).$$

Remarquons qu'à priori la sommation se fait pour $\gamma > 0$ car nos inégalités supposent $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, mais la sommation pour $\gamma = 0$ n'influence pas le terme dominant, c'est un $O(m^8)$.

Il ne reste plus qu'à évaluer $\sum_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\sum_{\{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = m - \gamma; \lambda_i - \lambda_j \geq \gamma, i < j\}} g(\lambda) \right)$. Ce calcul se fait par Maple :

$$\sum_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\sum_{\{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = m - \gamma; \lambda_i - \lambda_j \geq \gamma, i < j\}} g(\lambda) \right) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{49403}{252 \cdot 10^7} m^9.$$

Et le théorème est démontré. \square

On peut maintenant montrer le théorème 1.2 :

Démonstration. On a

$$h^0(X, E_{3,m} T_X^*) + h^2(X, E_{3,m} T_X^*) \geq \chi(X, E_{3,m} T_X^*)$$

et par [20] :

$$\chi(X, E_{3,m}T_X^*) = \frac{m^9}{81648 \times 10^6} d(389d^3 - 20739d^2 + 185559d - 358873) + O(m^8).$$

Par ailleurs

$$h^2(X, E_{3,m}T_X^*) \leq h^2(X, Gr^\bullet E_{3,m}T_X^*) \leq Cd(d+13)m^9 + O(m^8)$$

donc

$$h^0(X, E_{3,m}T_X^*) \geq m^9 \left(\frac{1}{81648 \times 10^6} d(389d^3 - 20739d^2 + 185559d - 358873) - Cd(d+13) \right) + O(m^8).$$

Il ne reste plus qu'à évaluer pour quels degrés

$$\frac{1}{81648 \times 10^6} d(389d^3 - 20739d^2 + 185559d - 358873) - Cd(d+13)$$

est positif. Cela se fait par Maple (cf. annexe). □

5 Le cas logarithmique

Nous allons montrer le théorème

Théorème 5.1 *Soit (\mathbb{P}^3, X) variété logarithmique où X est une hypersurface lisse de degré d de \mathbb{P}^3 , alors*

$$h^2(\mathbb{P}^3, Gr^\bullet E_{3,m} \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) \leq C(d+14)m^9 + O(m^8)$$

où C est une constante.

Montrons tout d'abord la proposition

Proposition 5.2 *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ une partition telle que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ et $|\lambda| = \sum \lambda_i > 3d + 2$. Alors :*

$$h^2(Fl(\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}), \mathcal{L}^\lambda) = h^2(\mathbb{P}^3, \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) \leq g(\lambda)(d+14) + r(\lambda)$$

où $g(\lambda) = \frac{3|\lambda|^3}{2} \prod_{\lambda_i > \lambda_j} (\lambda_i - \lambda_j)$ et de plus r est un polynôme en λ de composantes homogènes de plus haut degré 5.

Démonstration. On a

$$\mathcal{L}^\lambda = (\mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3|\lambda|)) \otimes (\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3|\lambda|))^{-1} = F \otimes G^{-1},$$

avec $F = \mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3|\lambda|)$, $G = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3|\lambda|)$. $\mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3|\lambda|)$ est positif. En effet, on a la propriété générale [5] que si E est un fibré vectoriel semi-positif i.e $E \geq 0$ alors le fibré en droites correspondant $\mathcal{L}(E)^\lambda$ est aussi semi-positif. Ici, $E = \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$ est semi-positif. En effet, $\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$ est engendré par ses sections : les sections globales de $T_{\mathbb{P}^3}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$ et celles fournies par les dérivées logarithmiques des équations locales définissant X . On a :

$$\mathcal{L}(E)^\lambda \simeq \mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2|\lambda|) \geq 0,$$

donc

$$\mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3|\lambda|) > 0.$$

Soit $Y = Fl(\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*})$. Tout d'abord montrons que $H^i(Y, F) = 0$ pour tout $i \geq 1$ et λ telle que $|\lambda| = \sum \lambda_i > 4(d-5) + 18$. Pour cela nous utilisons le théorème d'annulation de Kodaira qui stipule que pour tout fibré en droites A ample sur une variété projective Z complexe $H^i(Z, K_Z \otimes A) = 0$ pour $i > 0$. En effet, regardons à quelles conditions

$$F \otimes K_Y^{-1} > 0.$$

Rappelons [17] que

$$K_Y = \mathcal{L}^{-(5,3,1)} \otimes \pi^*(K_{\mathbb{P}^3} \otimes \det(\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*})^{\otimes 3}) = \mathcal{L}^{-(5,3,1)} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3d-16).$$

Donc

$$F \otimes K_Y^{-1} = \mathcal{L}^{\lambda+(5,3,1)} \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(3|\lambda| - 3d + 16).$$

Or on a

$$\mathcal{L}^{\lambda+(5,3,1)} \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(2|\lambda| + (5,3,1)|) = \mathcal{L}^{\lambda+(5,3,1)} \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(2|\lambda| + 18) \geq 0.$$

Par conséquent $F \otimes K_Y^{-1} > 0$ si

$$3|\lambda| - 3d + 16 > 2|\lambda| + 18$$

c'est-à-dire

$$|\lambda| > 3d + 2.$$

Prenons un diviseur $D = \pi^* E_1 \in |G|$, lisse et irréductible. On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(F \otimes G^{-1}) \rightarrow \mathcal{O}_Y(F) \rightarrow \mathcal{O}_D(F) \rightarrow 0.$$

donc la suite exacte longue en cohomologie :

$$0 = H^1(Y, \mathcal{O}_Y(F)) \rightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D(F)) \rightarrow H^2(Y, \mathcal{O}_Y(F \otimes G^{-1})) \rightarrow H^2(Y, \mathcal{O}_Y(F)) = 0.$$

Donc

$$h^2(Y, \mathcal{O}_Y(F \otimes G^{-1})) = h^1(D, \mathcal{O}_D(F)).$$

Prenons un deuxième diviseur $D' = \pi^*E_2 \in |G|$, lisse et irréductible, rencontrant D proprement. Soit $Z = D \cap D'$, $F' = F \otimes G$ et $E_3 = E_1 \cap E_2$. On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_D(F' \otimes G^{-1}) \rightarrow \mathcal{O}_D(F') \rightarrow \mathcal{O}_Z(F') \rightarrow 0.$$

Par adjonction

$$K_D = (K_Y)_{|D} \otimes \mathcal{O}_D(D)$$

donc

$$F'_{|D} \otimes K_D^{-1} = (F \otimes K_Y^{-1})_{|D} > 0.$$

Ainsi

$$h^1(D, \mathcal{O}_D(F)) \leq h^0(Z, \mathcal{O}_Z(F')) = h^0(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G)) \leq h^0(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G^2)).$$

Or comme précédemment

$$\mathcal{O}_Z(F \otimes G^2) \otimes K_Z^{-1} = (F \otimes K_Y^{-1})_{|Z} > 0$$

donc

$$h^0(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G^2)) = \chi(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G^2)).$$

On a

$$\chi(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G^2)) = \chi(E_3, \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3|E_3}}^* \otimes \mathcal{O}_{E_3}(9|\lambda)).$$

Par Riemann-Roch et la proposition 2.3, on sait explicitement calculer

$$\chi(\mathbb{P}^3, \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3}}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(t)).$$

On a les suites exactes

$$(1) \quad 0 \rightarrow \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3}}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(t - E_1) \rightarrow \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3}}^* \otimes \mathcal{O}_X(t) \rightarrow \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3|E_1}}^* \otimes \mathcal{O}_{E_1}(t) \rightarrow 0$$

$$(2) \quad 0 \rightarrow \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3|E_1}}^* \otimes \mathcal{O}_E(t - E_3) \rightarrow \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3|E_1}}^* \otimes \mathcal{O}_{E_1}(t) \rightarrow \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3|E_3}}^* \otimes \mathcal{O}_{E_3}(t) \rightarrow 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \chi(E_3, \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3|E_3}}^* \otimes \mathcal{O}_{E_3}(9|\lambda)) &= \chi(E_1, \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3|E_1}}^* \otimes \mathcal{O}_{E_1}(9|\lambda)) - \chi(E_1, \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3|E_1}}^* \otimes \mathcal{O}_{E_1}(6|\lambda)) \\ &= (\chi(\mathbb{P}^3, \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3}}^* \otimes \mathcal{O}_X(9|\lambda)) - \chi(\mathbb{P}^3, \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3}}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6|\lambda))) - \\ &\quad (\chi(\mathbb{P}^3, \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3}}^* \otimes \mathcal{O}_X(6|\lambda)) - \chi(\mathbb{P}^3, \Gamma^\lambda \overline{T_{\mathbb{P}^3}}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3|\lambda))). \end{aligned}$$

On termine le calcul explicite (cf. annexe) sur Maple et la proposition est démontrée. \square

Passons maintenant à la démonstration du théorème 5.1 :

Démonstration. Estimons maintenant

$$h^2(\mathbb{P}^3, Gr^\bullet E_{3,m} \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) = \sum_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\sum_{\{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = m - \gamma; \lambda_i - \lambda_j \geq \gamma, i < j\}} h^2(\mathbb{P}^3, \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) \right).$$

Pour m suffisamment grand λ vérifie $|\lambda| = \sum \lambda_i > 3d + 2$. En effet

$$\frac{4m}{5} \leq m - \gamma = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \leq 6\lambda_1$$

donc

$$|\lambda| \geq \lambda_1 \geq \frac{2m}{15}.$$

On applique la proposition 5.2 et par sommation :

$$h^2(\mathbb{P}^3, Gr^\bullet E_{3,m} \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) \leq (d+14) \sum_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\sum_{\{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = m - \gamma; \lambda_i - \lambda_j \geq \gamma, i < j\}} g(\lambda) \right) + O(m^8).$$

Remarquons qu'à priori la sommation se fait pour $\gamma > 0$ car nos inégalités supposent $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, mais la sommation pour $\gamma = 0$ n'influence pas le terme dominant, c'est un $O(m^8)$.

Il ne reste plus qu'à évaluer $\sum_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\sum_{\{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = m - \gamma; \lambda_i - \lambda_j \geq \gamma, i < j\}} g(\lambda) \right)$. Ce calcul se fait par Maple :

$$\sum_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \left(\sum_{\{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = m - \gamma; \lambda_i - \lambda_j \geq \gamma, i < j\}} g(\lambda) \right) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{49403}{252 \cdot 10^7} m^9.$$

Et le théorème est démontré. \square

On montre alors le théorème 1.3 :

Démonstration. On a

$$h^0(\mathbb{P}^3, E_{3,m} \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) + h^2(\mathbb{P}^3, E_{3,m} \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) \geq \chi(\mathbb{P}^3, E_{3,m} \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*})$$

et par [20] :

$$\chi(\mathbb{P}^3, E_{3,m} \overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) = m^9 \left(\frac{389}{81648000000} d^3 - \frac{6913}{34020000000} d^2 + \frac{6299}{4252500000} d - \frac{1513}{63787500} \right) + O(m^8).$$

Par ailleurs

$$h^2(\mathbb{P}^3, E_{3,m}\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) \leq h^2(\mathbb{P}^3, Gr^\bullet E_{3,m}\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) \leq C(d+14)m^9 + O(m^8)$$

donc

$$h^0(\mathbb{P}^3, E_{3,m}\overline{T_{\mathbb{P}^3}^*}) \geq m^9 \left(\frac{389}{81648000000} d^3 - \frac{6913}{34020000000} d^2 + \frac{6299}{4252500000} d - \frac{1513}{63787500} \right) - m^9 C(d+14) + O(m^8).$$

Il ne reste plus qu'à évaluer pour quels degrés

$$\frac{389}{81648000000} d^3 - \frac{6913}{34020000000} d^2 + \frac{6299}{4252500000} d - \frac{1513}{63787500} - C(d+14)$$

est positif. Cela se fait par Maple (cf. annexe). □

6 Annexe

CALCUL DE LA CARACTERISTIQUE D'EULER DES FIBRES DE SCHUR EN DIMENSION 3

1) Calcul du caractère de Chern des fibrés de Schur associés aux 3-uplets $(l[1], l[2], l[3])$..

1)a) Calcul du numérateur et du dénominateur de la fonction de Schur.

```
> A:=matrix(3,3,(i,j)->exp(l[j]*a[i])):
> p:=det(A):
> h:=[2,1,0]:
> B:=matrix(3,3,(i,j)->exp(h[j]*a[i])):
> q:=det(B):
```

1)b) On effectue le développement du numérateur et du dénominateur à l'ordre 7 pour obtenir le développement de la fonction de Schur à l'ordre 3 :

```
> readlib(mtaylor):
> s:=factor(mtaylor(p,[a[1],a[2],a[3]],7)):
> t:=factor(mtaylor(q,[a[1],a[2],a[3]],7)):
> r:=simplify(s/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):
> u:=simplify(t/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):
> v:=1-u:
> w:=mtaylor(1+v+v^2,[a[1],a[2],a[3]],4):
```

1)c) Caractère de chern du fibré de Schur.

```
> ch:=factor(mtaylor(r*w,[a[1],a[2],a[3]],4)):
```

1)d) Calcul du caractère de Chern du "twist" du fibré de Schur

```
> co:=(a[1]+a[2]+a[3])/(d-5):
> ch2:=simplify(1+k*(l[1]+l[2]+l[3])*co+(k*(l[1]+l[2]+l[3])*co)^2/2+(k*
> (l[1]+l[2]+l[3])*co)^3/6):
> eul:=expand(mtaylor(ch*ch2,[a[1],a[2],a[3]],4)):
```

2) Le caractère de Chern comme polynôme en $l[1]$, $l[2]$ et $l[3]$:

i) son degré

```
> degree(eul,[l[1],l[2],l[3]]);
```

6

ii) son terme dominant

```
> eul2:=factor(mtaylor(eul,[1[1],1[2],1[3]],7)-mtaylor(eul,[1[1],1[2],1
> [3]],6)):
```

3) Calcul du caractère de Chern en fonction des classes de Chern du fibré cotangent.

```
> eq1:=a[1]+a[2]+a[3]=c[1]:
> eq2:=a[1]*a[2]+a[1]*a[3]+a[3]*a[2]=c[2]:
> eq3:=a[1]^2+a[2]^2+a[3]^2=c[1]^2-2*c[2]:
> eq4:=a[1]*a[2]*a[3]=c[3]:
> eq5:=a[1]^3+a[2]^3+a[3]^3=3*c[3]+c[1]^3-3*c[1]*c[2]:
> eq6:=a[2]*a[1]^2+a[3]*a[1]^2+a[3]^2*a[1]+a[2]^2*a[1]+a[3]*a[2]^2+a[3]
> ^2*a[2]=1/3*(c[1]^3-(3*c[3]+c[1]^3-3*c[1]*c[2]))-2*c[3]:
> eul3:=factor(algsubs(eq6,algsubs(eq4,algsubs(eq5,eul2)))):
```

4) Calcul en fonction du degré d de l'hypersurface

```
> factor(simplify(algsubs(c[2]=d^(2/3)*(d^2-5*d+10),(algsubs(c[1]=(d-5)
> *d^(1/3),algsubs(c[3]=-d*(-d^3+5*d^2-10*d+10),eul3))))));
```

$$\begin{aligned} & \frac{1}{48}(l_3 - l_1)(l_2 - l_1)(l_2 - l_3)d(-14l_1^3 + 6l_1^3d - 5l_2^2l_1d^2 + 31l_2^2l_1d - 5l_2^2l_3d^2 \\ & - 5l_2l_3^2d^2 + 31l_2^2l_3d + 31l_2l_3^2d - 5l_1^2l_2d^2 + 31l_1^2l_2d + 31l_3l_1^2d \\ & - 5l_3^2l_1d^2 + 31l_3^2l_1d - 5l_3l_1^2d^2 - 40l_3l_1^2kd + 4l_1^2l_2kd^2 + 12l_1l_2^2k^2d \\ & + 4l_3l_1^2kd^2 - 40l_2^2l_3kd + 12l_2l_1^2k^2d + 12l_3^2l_1k^2d - 40l_2l_3^2kd \\ & + 4l_2^2l_3kd^2 - 10l_1^3kd + 12l_2l_3^2k^2d - 40l_1l_2^2kd - 60l_2l_1^2k^2 - 60l_3^2l_1k^2 \\ & + 100l_2l_3^2k - 60l_2l_3^2k^2 + 100l_1l_2^2k - 60l_1l_2^2k^2 + 100l_2^2l_3k - 90l_2l_1l_3kd \\ & + 100l_3l_1^2k + 4l_3^2l_1kd^2 - 14l_3^3 + 12l_2^2l_3k^2d + 6l_2^3d + 24l_2l_3l_1k^2d \\ & - 40l_1^2l_2kd + 4l_1l_2^2kd^2 + 12l_2l_1l_3kd^2 - 20l_1^3k^2 - 20l_2^3k^2 - 20l_3^3k^2 \\ & + 4l_2l_3^2kd^2 + 12k^3l_3^2l_1 + 24k^3l_2l_3l_1 + 12k^3l_1^2l_2 + 12k^3l_2^2l_3 + 12k^3l_3l_1^2 \\ & + 12k^3l_2l_3^2 + 12k^3l_2^2l_1 + 4k^3l_3^3 + 4k^3l_1^3 + 4k^3l_2^3 - 60l_3l_1^2k^2 - 120l_2l_3l_1k^2 \\ & + 100l_1^2l_2k - 60l_2^2l_3k^2 + 100l_3^2l_1k + 4l_2l_3l_1d^3 - 30l_2l_3l_1d^2 - 40l_3^2l_1kd \\ & + 12l_3l_1^2k^2d + 96l_2l_3l_1d - 134l_2l_1l_3 - 14l_2^3 + 6l_3^3d + 210l_2l_1l_3k \\ & + 4l_1^3k^2d + 4l_2^3k^2d - 10l_2^3kd + 4l_3^3k^2d - 10l_3^3kd - 54l_3l_1^2 - 54l_2^2l_1 \\ & - 54l_2^2l_3 + 30l_2^3k - 54l_3^2l_1 - 54l_2l_3^2 - 54l_1^2l_2 + 30l_1^3k + 30l_3^3k) \end{aligned}$$

5) Calcul de la proposition 4.3

```

> g:=k->1/48*(1[2]-1[3])*(-1[3]+1[1])*(1[1]-1[2])*d*(-20*1[1]^3*k^2-60*
> 1[2]^2*1[3]*k^2+31*1[1]*1[2]^2*d+100*1[2]^2*1[3]*k+30*1[3]^3*k-10*1[3]
> ^3*k*d-5*1[2]*1[3]^2*d^2+12*1[2]^2*1[3]*k^2*d+4*1[3]^3*k^2*d+4*1[2]^3*
> k^2*d-10*1[2]^3*k*d-5*1[1]^2*1[3]*d^2-60*1[1]^2*1[2]*k^2+100*1[1]^2*1[
> 3]*k+12*k^3*1[1]*1[3]^2+4*1[2]*1[3]^2*k*d^2-54*1[3]*1[2]^2+12*1[2]*1[3]
> ]^2*k^2*d-60*1[2]*1[3]^2*k^2+100*1[2]*1[3]^2*k-10*1[1]^3*k*d+12*k^3*1[
> 1]*1[2]^2+4*1[1]^3*k^2*d+31*1[2]*1[3]^2*d-5*1[2]^2*1[3]*d^2+31*1[2]^2*
> 1[3]*d+31*1[1]^2*1[3]*d-5*1[1]^2*1[2]*d^2+31*1[1]^2*1[2]*d-40*1[2]*1[3]
> ]^2*k*d+100*1[1]^2*1[2]*k-60*1[1]^2*1[3]*k^2+100*1[1]*1[2]^2*k-5*1[1]*
> 1[3]^2*d^2-60*1[1]*1[2]^2*k^2-60*1[1]*1[3]^2*k^2+100*1[1]*1[3]^2*k+30*
> 1[2]^3*k-40*1[2]^2*1[3]*k*d-14*1[3]^3-20*1[2]^3*k^2-14*1[2]^3-54*1[1]*
> 1[2]^2-20*1[3]^3*k^2+12*k^3*1[3]^2*1[2]+4*k^3*1[2]^3+12*k^3*1[3]*1[2]^
> 2+31*1[1]*1[3]^2*d-90*1[1]*1[2]*1[3]*k*d-54*1[1]*1[3]^2-134*1[1]*1[3]*
> 1[2]-54*1[1]^2*1[3]-54*1[3]^2*1[2]+4*k^3*1[3]^3-54*1[1]^2*1[2]-14*1[1]
> ^3+4*k^3*1[1]^3+6*1[3]^3*d+6*1[2]^3*d+12*1[1]^2*1[3]*k^2*d+4*1[1]^2*1[
> 2]*k*d^2+30*1[1]^3*k+6*1[1]^3*d-40*1[1]^2*1[2]*k*d+4*1[1]*1[2]*1[3]*d^
> 3-30*1[1]*1[2]*1[3]*d^2+96*1[1]*1[2]*1[3]*d+210*1[1]*1[2]*1[3]*k+12*1[
> 1]*1[2]^2*k^2*d+24*1[1]*1[2]*1[3]*k^2*d+12*k^3*1[1]^2*1[3]+12*k^3*1[1]
> ^2*1[2]+4*1[1]*1[2]^2*k*d^2+4*1[2]^2*1[3]*k*d^2+12*1[1]^2*1[2]*k^2*d-4
> 0*1[1]*1[2]^2*k*d-40*1[1]^2*1[3]*k*d+24*k^3*1[1]*1[3]*1[2]+12*1[1]*1[3]
> ]^2*k^2*d+4*1[1]^2*1[3]*k*d^2-120*1[1]*1[2]*1[3]*k^2-40*1[1]*1[3]^2*k*
> d+4*1[1]*1[3]^2*k*d^2+12*1[1]*1[2]*1[3]*k*d^2-5*1[1]*1[2]^2*d^2):
> factor(simplify(g(9)-2*g(6)+g(3)));

```

$$\frac{3}{2} d(l_3 - l_1)(l_2 - l_1)(l_2 - l_3)(l_2 + l_3 + l_1)^3(13 + d)$$

6) Calcul du théorème 4.1

```

> factor(algsubs(1[1]=x,algsubs(1[2]=y,algsubs(1[3]=z,3/2*(-1[3]+1[2])*
> (-1[3]+1[1])*(1[1]-1[2])*(1[1]+1[2]+1[3])^3)))));

```

$$-\frac{3}{2}(-y+z)(z-x)(-x+y)(y+z+x)^3$$

```

> f:=(x,y,z)->-3/2*(z-y)*(z-x)*(-x+y)*(x+y+z)^3:
> P:=sum(f(m-3*j-5*k-2*i+2,i+j+k+1,k),i=0..((m-5*j)/3-2*k)):
> Q:=sum(P,k=0..((m-5*j)/6)):
> R:=expand(sum(Q,j=0..(m/5))):

```

```

> lcoeff(R,m);

```

$$\frac{49403}{2520000000}$$

7) Calcul du théorème 1.2

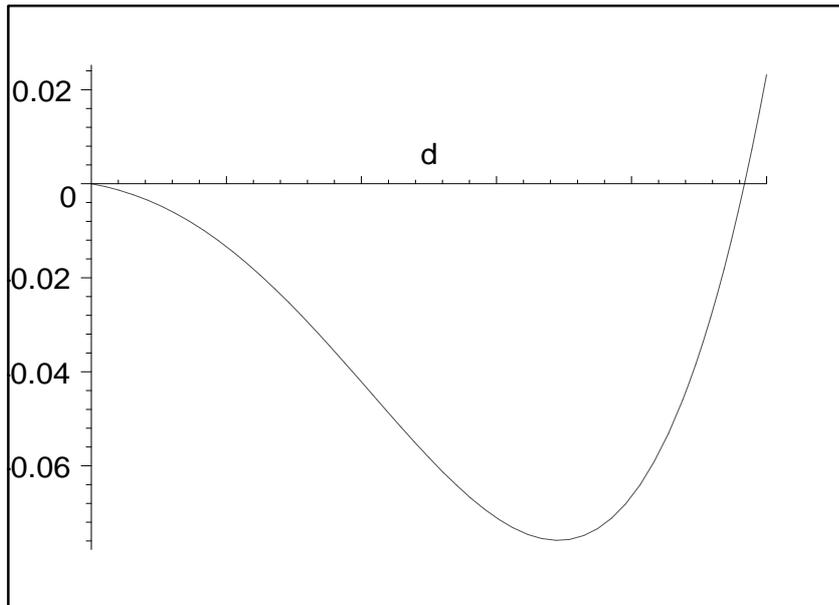
```

> factor(1/8164800000*d*(-358873+185559*d-20739*d^2+389*d^3)-49403/252
> 000000*d*(d+13));

```

$$\frac{1}{40824000000} d(-105837083 - 7075491 d - 103695 d^2 + 1945 d^3)$$

```
> s:=d->-105837083/40824000000*d-2358497/13608000000*d^2-6913/2721600
> 0000*d^3+389/81648000000*d^4:
> plot(s(d),d=0..100);
```



```
> s(96);
```

$$\frac{-19925819}{4252500000}$$

```
> s(97);
```

$$\frac{35516647}{20412000000}$$

CALCUL DE LA CARACTERISTIQUE D'EULER DES FIBRES DE SCHUR EN DIMENSION 3

LE CAS LOGARITHMIQUE

1) Calcul du caractère de Chern des fibrés de Schur associés aux 3-uplets $(l[1], l[2], l[3])$.

1)a) Calcul du numérateur et du dénominateur de la fonction de Schur.

```
> A:=matrix(3,3,(i,j)->exp(l[j]*a[i])):
> p:=det(A):
> h:=[2,1,0]:
> B:=matrix(3,3,(i,j)->exp(h[j]*a[i])):
> q:=det(B):
```

1)b) On effectue le développement du numérateur et du dénominateur à l'ordre 7 pour obtenir le développement de la fonction de Schur à l'ordre 3 :

```
> readlib(mtaylor):
> s:=factor(mtaylor(p,[a[1],a[2],a[3]],7)):
> t:=factor(mtaylor(q,[a[1],a[2],a[3]],7)):
> r:=simplify(s/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):
> u:=simplify(t/((a[1]-a[2])*(-a[2]+a[3])*(a[3]-a[1]))):
> v:=1-u:
> w:=mtaylor(1+v+v^2,[a[1],a[2],a[3]],4):
```

1)c) Caractère de chern du fibré de Schur.

```
> ch:=factor(mtaylor(r*w,[a[1],a[2],a[3]],4)):
```

1)d) Calcul du caractère de Chern du "twist" du fibré de Schur

```
> co:=(a[1]+a[2]+a[3])/(d-4):
> ch2:=simplify(1+k*(l[1]+l[2]+l[3])*co+(k*(l[1]+l[2]+l[3])*co)^2/2+(k*(l[1]+l[2]+l[3])*co)^3/6):
> eul:=expand(mtaylor(ch*ch2,[a[1],a[2],a[3]],4)):
```

2) Le caractère de Chern comme polynôme en $l[1], l[2]$ et $l[3]$:

i) son degré

```
> degree(eul,[l[1],l[2],l[3]]):
```

ii) son terme dominant

```
> eul2:=factor(mtaylor(eul,[1[1],1[2],1[3]],7)-mtaylor(eul,[1[1],1[2],1[3]],6));
```

3) Calcul du caractère de Chern en fonction des classes de Chern du fibré cotangent.

```
> eq1:=a[1]+a[2]+a[3]=c[1]:
> eq2:=a[1]*a[2]+a[1]*a[3]+a[3]*a[2]=c[2]:
> eq3:=a[1]^2+a[2]^2+a[3]^2=c[1]^2-2*c[2]:
> eq4:=a[1]*a[2]*a[3]=c[3]:
> eq5:=a[1]^3+a[2]^3+a[3]^3=3*c[3]+c[1]^3-3*c[1]*c[2]:
> eq6:=a[2]*a[1]^2+a[3]*a[1]^2+a[3]^2*a[1]+a[2]^2*a[1]+a[3]*a[2]^2+a[3]^2*a[2]=1/3*(c[1]^3-(3*c[3]+c[1]^3-3*c[1]*c[2]))-2*c[3]:
> eul3:=factor(algsubs(eq6,algsubs(eq4,algsubs(eq5,eul2)))));
4) Calcul en fonction du degré d de l'hypersurface
> factor(simplify(algsubs(c[2]=d^2-4*d+6,(algsubs(c[1]=(d-4),algsubs(c[3]=d^3-4*d^2+6*d-4,eul3))))));
```

$$-\frac{1}{12}(-l_2 + l_3)(l_1 - l_2)(l_1 - l_3)(l_1 d + k l_2 - l_2 - 2 l_1 + l_1 k - l_3 + k l_3)$$

$$(l_3 d + k l_2 - l_2 + l_1 k - l_1 - 2 l_3 + k l_3)(l_2 d - 2 l_2 + k l_2 + l_1 k - l_1 - l_3 + k l_3)$$

5) Calcul de la proposition 5.2

```
> g:=k->1/12*(-1[3]+1[2])*(-1[3]+1[1])*(1[1]-1[2])*(1[1]*d-2*1[1]-1[2]-1[3]+1[1]*k+1[2]*k+1[3]*k)*(1[2]*d-1[1]-2*1[2]-1[3]+1[1]*k+1[2]*k+1[3]*k)*(1[3]*d-1[1]-1[2]-2*1[3]+1[1]*k+1[2]*k+1[3]*k):
> te:=factor(simplify(g(9)-2*g(6)+g(3)));
```

$$te := -\frac{3}{2}(-l_2 + l_3)(l_1 - l_2)(l_1 - l_3)(l_2 + l_1 + l_3)^3(d + 14)$$

6) Calcul du théorème 5.1

```
> factor(algsubs(1[1]=x,algsubs(1[2]=y,algsubs(1[3]=z,3/2*(-1[3]+1[2])*(-1[3]+1[1])*(1[1]-1[2])*(1[1]+1[2]+1[3])^3)))));
```

$$\frac{3}{2}(-z + y)(x - z)(x - y)(y + x + z)^3$$

```
> f:=(x,y,z)->-3/2*(z-y)*(z-x)*(-x+y)*(x+y+z)^3:
> P:=sum(f(m-3*j-5*k-2*i+2,i+j+k+1,k),i=0..((m-5*j)/3-2*k)):
> Q:=sum(P,k=0..((m-5*j)/6)):
> R:=expand(sum(Q,j=0..(m/5))):
> lcoeff(R,m);
```

$$\frac{49403}{2520000000}$$

7) Calcul du théorème 1.3

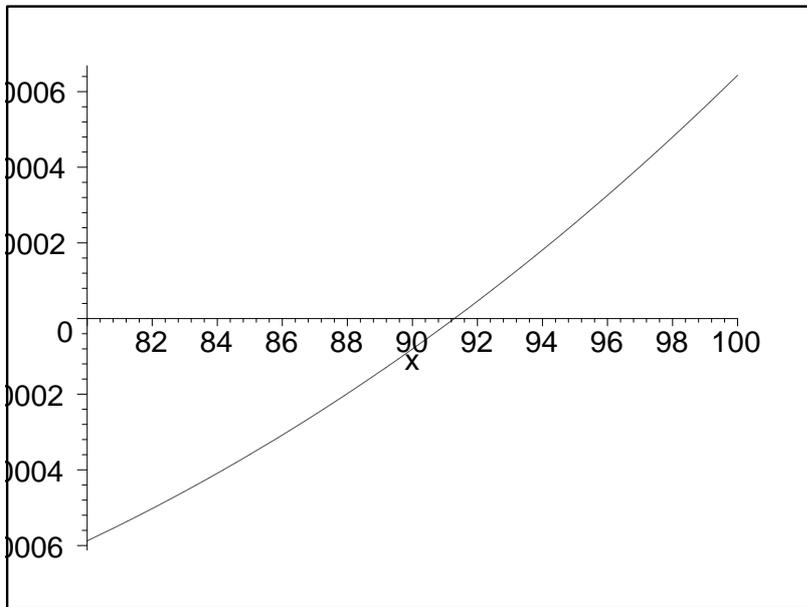
> (389/8164800000*d^3-6913/3402000000*d^2+6299/4252500000*d-
 > 1513/637875000-49403/2520000000*(d+14));

$$\frac{389}{8164800000} d^3 - \frac{6913}{3402000000} d^2 - \frac{1233097}{6804000000} d - \frac{28253581}{10206000000}$$

> s:=d->389/8164800000*d^3-6913/3402000000*d^2-1233097/6804000000*d-
 > 28253581/10206000000;

> plot(s(x),x=80..100);

$$s := d \rightarrow \frac{389}{8164800000} d^3 - \frac{6913}{3402000000} d^2 - \frac{1233097}{6804000000} d - \frac{28253581}{10206000000}$$



> s(91);

$$\frac{-838703}{4536000000}$$

> s(92);

$$\frac{4681177}{10206000000}$$

Références

- [1] Angelini F., *An algebraic version of Demailly's asymptotic Morse inequalities*, Proc. Amer. Math. Soc. 124, 1996, 3265-3269.
- [2] Bogomolov F.A., *Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties*, Math. USSR Izvestija 13, 1979, 499-555.
- [3] Bott R., *Homogeneous vector bundles*, Ann. of Math. 66, 1957, 203-248.
- [4] Brückmann P. and Rackwitz H.G., *T-symmetrical tensor forms on complete intersections*, Math. Ann. 288, 1990, 627-635.
- [5] Demailly J.P., *Vanishing theorems for tensor powers of a positive vector bundle*, Proceedings of the Conference Geometry and Analysis on Manifolds held at Katata, Japan (August 1987), edited by T. Sunada, Lecture Notes in Math. 1339, Springer-Verlag
- [6] Demailly J.P., *L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory*, Transcendental methods in algebraic geometry (Cetraro 1994), Lect. Notes in Math, vol 1464, Springer, Berlin, 1996, 1-97.
- [7] Demailly J.-P., *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, Proc. Sympos. Pure Math., vol.62, Amer. Math.Soc., Providence, RI, 1997, 285-360.
- [8] Demailly J.-P., El Goul J., *Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space*, Amer. J. Math 122, 2000, 515-546.
- [9] Demazure M., *A very simple proof of Bott's theorem*, Invent. Math. 33, 1976, 271-272.
- [10] Dethloff G., Lu. S., *Logarithmic jet bundles and applications*, Osaka J. of Math., vol. 38, 2001, 185-237.
- [11] El Goul J. : *Logarithmic Jets and Hyperbolicity*, Osaka J.Math. 40, 2003, 469-491.
- [12] Fulton W., *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts 35, Cambridge University Press.
- [13] Green M., Griffiths P., *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings*, The Chern Symposium 1979, Proc. Inter. Sympos. Berkeley, CA, 1979, Springer-Verlag, New-York, 1980, 41-74.
- [14] Hirzebruch F., *Topological methods in algebraic geometry*, Grundle. Math. Wiss.131, Springer, Heidelberg, 1966.
- [15] Kobayashi S., *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Marcel Dekker, New York, 1970.
- [16] Lascoux A., *Syzygies des variétés déterminantales*, Adv. in math. 30, 1978, 202-237.

- [17] Manivel L., *Un théorème d'annulation "à la Kawamata-Viehweg"*, manuscripta math. 83, 1994, 387-404.
- [18] Manivel L., *Birational invariants of algebraic varieties*, J. reine angew. Math. 458, 1995, 63-91.
- [19] Martin S., *Schur algebras and representation theory*, Cambridge tracts in mathematics 112, Cambridge university press, 1993.
- [20] Rousseau E., *Etude des jets de Demailly-Semple en dimension 3*, prépublication, 2005.
- [21] Sakai F., *Symmetric powers of the cotangent bundle and classification of algebraic varieties*, Lect. Notes in Math. 732, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1979.
- [22] Siu Y.-T., *Hyperbolicity in complex geometry*, The legacy of Niels Henrik Abel, Springer, Berlin, 2004, 543-566.