Hyperbolicité des variétés complexes

Erwan Rousseau

Résumé

Ces notes ont été écrites pour le cours Peccot 2007 du Collège de France.

Table des matières

1 Introduction : le cas des surfaces de Riemann

Les problèmes liés à l'hyperbolicité en géométrie complexe ont déjà une longue histoire. On peut les faire remonter au "petit théorème de Picard" et à l'étude de l'hyperbolicité des surfaces de Riemann compactes de genre $g \geq 2$.

Définition 1.1 *Une variété complexe X est hyperbolique au sens de Brody s'il n'existe pas de courbes entières non constantes $g : \mathbb{C} \to X$.*

Le petit théorème de Picard peut s'énoncer ainsi :

Théorème 1.2 *Toute fonction entière $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui évite au moins deux points est constante.*

Ce théorème, comme l'hyperbolicité des surfaces de Riemann compactes de genre $g \geq 2$, peuvent être vus comme conséquence d'un autre théorème : le théorème d'uniformisation de Riemann :

Théorème 1.3 *Toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe à l'une des 3 surfaces : $\mathbb{C}, \Delta$ le disque unité ou $\mathbb{P}^1$.*

Définition 1.4 *1) Une surface de Riemann est dite elliptique si son revêtement universel est $\mathbb{P}^1$.*

2) Une surface de Riemann est dite parabolique si son revêtement universel est $\mathbb{C}$.

3) Une surface de Riemann est dite hyperbolique si son revêtement universel est Δ.

Proposition 1.5 *1) La seule surface de Riemann elliptique est $\mathbb{P}^1$.*

2) Les surfaces de Riemann paraboliques sont $\mathbb{C}, \mathbb{C}$ privé d'un point et les tores de genre 1.

3) Les autres surfaces de Riemann sont hyperboliques.

Le petit théorème de Picard et l'hyperbolicité des surfaces de Riemann compactes de genre $g \geq 2$ découlent donc directement du fait que $\mathbb{C}$ privé de deux points et S une surface de Riemann de genre $g \geq 2$ ont pour revêtement universel Δ le disque unité et du théorème de Liouville.

On peut faire une liste des propriétés qui distinguent une courbe C de genre deux ou plus des courbes de genre 1 ou 0 :

1) La dimension de la suite pluricanonique $h^0(C, mK)$ croît linéairement avec m.

2) Le fibré cotangent (canonique) est ample.

3) On peut munir C d'une métrique hyperbolique de courbure constante, négative.

Ces propriétés se généralisent à la dimension supérieure. Ainsi, l'étude des surfaces de Riemann compactes de genre $g \geq 2$ amènent à celle des variétés complexes compactes X dont le fibré canonique K_X est positif. Le petit théorème de Picard, lui, amène à l'étude du complémentaire dans X, variété complexe compacte, d'une hypersurface de Y où le fibré $K_X + Y$ est positif.

L'étude en dimension supérieure va montrer comment ces propriétés interviennent pour établir l'hyperbolicité de certaines variétés.

Nous pouvons déjà donner quelques exemples de variétés hyperboliques au sens de Brody en plus grande dimension :

Exemple 1.6 *Toute variété du type* $\prod_{i=1}^{n} C_i$, *où les* C_i *sont des courbes complexes compactes de genre* $g \geq 2$, *est hyperbolique au sens de Brody.*

Remarque 1.7 *L'éclatée d'une variété n'est pas hyperbolique au sens de Brody. Donc, l'hyperbolicité au sens de Brody n'est pas un invariant birationnel.*

2 Hyperbolicité au sens de Kobayashi

2.1 Motivation : lemme de Schwarz

On sait munir le disque unité Δ, d'une métrique à courbure constante -1. C'est la métrique de Poincaré définie par

$$ds^2 = \frac{dz d\overline{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Une version du lemme de Schwarz est la suivante :

Lemme 2.1 *Soit* $f : \Delta \to \Delta$ *holomorphe. Alors*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Corollaire 2.2 *1) Soit $f : \Delta \to \Delta$ holomorphe. Alors f est 1-contractante pour la métrique de Poincaré.*

2) Un automorphisme de Δ est une isométrie.

Etant donnée une surface de Riemann hyperbolique S, il est facile de la munir d'une métrique à courbure constante -1 : c'est la métrique induite par la métrique de Poincaré sur le revêtement universel Δ.

Mais on peut munir S, et toute variété complexe, d'une (pseudo) métrique intrinsèque qui possède des propriétés similaires à celles du lemme de Schwarz [23].

Définition 2.3 *Soit X une variété complexe lisse, $\xi \in T_{X,x}$ un vecteur tangent à X en x. On définit sa pseudo-norme de Kobayashi par*

$$k(\xi) = \inf_{\lambda}\{\lambda / \exists f : \Delta \to X, f(0) = x, \lambda f'(0) = \xi\}.$$

La pseudo-distance de Kobayashi d_X est la pseudo-distance géodésique obtenue en intégrant cette pseudo-norme.

Remarque 2.4 *La définition originale donnée par S. Kobayashi (équivalente à la précédente par Royden [36]) est la suivante : pour calculer la distance de Kobayashi entre deux points $p, q \in X$, on construit une chaîne d'applications $f_i : \Delta \to X$, $1 \leq i \leq n$, avec deux points p_i, q_i, où $f_1(p_1) = p, f_n(q_n) = q$ et $f_i(q_i) = f_{i+1}(p_{i+1})$. Sa longueur est*

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(p_i, q_i)$$

où ρ est la distance de Poincaré. Alors la pseudo-distance de Kobayashi est la borne infèrieure de ces longueurs, par rapport à toutes les chaînes possibles.

Grâce à cette pseudo-distance on peut généraliser le lemme de Schwarz en toute dimension :

Proposition 2.5 *Si $f : X \to Y$ est une application holomorphe entre deux variétés complexes, alors*

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq d_X(p, q)$$

Remarque 2.6 *1) Pour le disque unité Δ, d_Δ coïncide avec la métrique de Poincaré.*

2) La pseudo-distance d_X peut-être dégénérée. Par exemple $d_{\mathbb{C}} \equiv 0$. En effet pour $x, y \in \mathbb{C}$, considérons les fonctions $f_n(z) = n(y-x)z + x$ de Δ dans $\mathbb{C}$. Alors $d_{\mathbb{C}}(x, y) \leq d_\Delta(0, \frac{1}{n}) \to 0$.

Définition 2.7 *Une variété complexe X est hyperbolique au sens de Kobayashi si d_X est une distance.*

Dans la suite, lorsque nous dirons que X est hyperbolique, cela signifiera qu'elle l'est au sens de Kobayashi.

2.2 Lemme de Brody

Une conséquence de ce qui précède est la suivante : si l'on dispose d'une application entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$ alors X ne peut pas être hyperbolique au sens de Kobayashi. Ainsi, l'hyperbolicité au sens de Kobayashi implique l'hyperbolicité au sens de Brody. La réciproque est également vraie si X est compacte :

Théorème 2.8 *[3]Une variété compacte lisse X est hyperbolique si et seulement si elle est hyperbolique au sens de Brody.*

Lemme 2.9 *(de reparamétrisation de Brody [3]) Soit X une variété complexe lisse munie d'une métrique hermitienne h et $f : \Delta \to X$ une application holomorphe. Pour tout $r \in [0,1[$, il existe $R \geq r \|f'(0)\|_h$ et un biholomorphisme $\psi : D(0,R) \to D(0,r)$ tels que*

$$\|(f \circ \psi)'(0)\|_h = 1, \|(f \circ \psi)'(t)\|_h \leq \frac{1}{1 - \left|\frac{t}{R}\right|^2}$$

pour tout $t \in D(0,R)$.

Démonstration. Soit $z_0 \in \Delta$ tel que $(1 - |z|^2) \|f'(rz)\|_h$ atteigne son maximum en z_0 i.e la norme de la différentielle de $z \to f(rz)$ par rapport à la métrique de Poincaré et h est maximale. Soit $\psi(t) = r\frac{t+Rz_0}{R+\overline{z_0}t} = rg_{z_0}(\frac{t}{R})$, où g_{z_0} est une isométrie pour la métrique de Poincaré. En particulier, $\psi(0) = rz_0$. On a

$$\|(f \circ \psi)'(0)\|_h = |\psi'(0)| \|f'(rz_0)\|_h = (1 - |z_0|^2)\frac{r}{R} \|f'(rz_0)\|_h$$

donc on doit prendre

$$R = r(1 - |z_0|^2) \|f'(rz_0)\|_h \geq r \|f'(0)\|_h .$$

La norme de la différentielle de $f \circ \psi$ en un point t par rapport à la métrique de Poincaré et h est

$$\left(1 - \left|\frac{t}{R}\right|^2\right) \|(f \circ \psi)'(t)\|_h .$$

Puisque g_{z_0} est une isométrie pour la métrique de Poincaré, cette quantité est à un facteur constant près, la norme de la différentielle de $z \to f(rz)$ en $g_{z_0}(\frac{t}{R})$ par rapport aux mêmes métriques. Elle est donc maximale pour $t = 0$. □

Nous pouvons maintenant donner une preuve du théorème annoncé :
Démonstration. Supposons X compacte non hyperbolique. Alors il existe une suite de fonctions holomorphes $f_m : \Delta \to X$ telle que $(\|f'_m(0)\|_h)_m$ ne soit pas bornée. Alors par le lemme précédent, on obtient une suite $g_m : D(0, R_m) \to X$ telle que $R_m \geq \frac{1}{2}\|f'_m(0)\|_h$ et $\|g'_m(z)\|_h \leq \frac{1}{1-|\frac{z}{R_m}|^2}$, $\|g'_m(0)\|_h = 1$ pour tout m et $z \in D(0, R_m)$. Par le théorème d'Ascoli, on en déduit qu'une sous-suite des g_m converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$ vers une application holomorphe $g : \mathbb{C} \to X$ vérifiant $\|g'(z)\|_h \leq \|g'(0)\|_h = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En particulier g est non constante. □

Remarque 2.10 *Sans l'hypothèse de compacité, le théorème est faux. Considérons le domaine de* $\mathbb{C}^2$: $D = \{(z, w)/\, |z| < 1, |wz| < 1$ *et* $|w| < 1$ *si* $z = 0\}$. *D est hyperbolique au sens de Brody : en effet, la projection de D par rapport à la première coordonnée est une application holomorphe sur le disque unité dont les fibres sont des disques. Cependant, la pseudo-distance de Kobayashi est dégénérée. Calculons la pseudo-distance de Kobayashi entre* $(0, 0)$ *et* $(0, w_0)$. *Soit* $f_1(z) = (z, 0), f_2(z) = (\frac{1}{n}, nz), f_3(z) = (\frac{1}{n} + \frac{z}{2}, w_0)$ *définies sur* Δ. $f_1(0) = (0, 0), f_1(\frac{1}{n}, 0), f_2(\frac{w_0}{n}) = (\frac{1}{n}, w_0), f_3(0) = (\frac{1}{n}, w_0), f_3(\frac{-2}{n}) = (0, w_0)$. *Ainsi, quand n tend vers l'infini la somme des distances hyperboliques tend vers 0. On conclut que la pseudo-distance de Kobayashi entre* $(0, 0)$ *et* $(0, w_0)$ *est 0.*

2.3 Applications

Proposition 2.11 *Soit $\mathcal{X} \to S$ une famille de variétés complexes compactes (i.e une submersion holomorphe propre). Alors l'ensemble des $t \in S$ tels que $\mathcal{X}_t$ soit hyperbolique, est ouvert dans S pour la topologie euclidienne.*

Démonstration. Soit $\mathcal{X}_{t_n}$ une suite de fibres non hyperboliques avec $t_n \to t$. Alors par le lemme de Brody, on obtient une suite de fonctions entières $g_n : \mathbb{C} \to \mathcal{X}_{t_n}$ telles que $\|g'_n\| \leq \|g'_n(0)\|_\omega = 1$ où ω est une métrique hermitienne sur $\mathcal{X}$. Alors par le théorème d'Ascoli, on peut extraire une sous-suite convergeant vers $g : \mathbb{C} \to \mathcal{X}_t$ telle que $\|g'(0)\|_\omega = 1$. Donc $\mathcal{X}_t$ n'est pas hyperbolique. □

Ainsi l'hyperbolicité est une condition ouverte pour la topologie euclidienne.

On vient de voir que la réciproque du théorème de Brody est en général fausse. Cependant, sous certaines hypothèses, on peut montrer que le complémentaire d'une sous-variété X de Y est hyperbolique.

Théorème 2.12 *Soit X une hypersurface dans une variété complexe compacte Y munie d'une métrique hermitienne h.*

1) Si $Y \backslash X$ n'est pas hyperbolique, alors il existe une courbe entière g : $\mathbb{C} \to Y$ telle que $g(\mathbb{C}) \subset X$ ou $g(\mathbb{C}) \subset Y \backslash X$ vérifiant $\|g'(z)\|_h \leq \|g'(0)\|_h = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2) Si X et $Y \backslash X$ sont hyperboliques au sens de Brody, alors $Y \backslash X$ est hyperbolique.

Démonstration. Si $Y \backslash X$ n'est pas hyperbolique alors il existe une suite de fonctions $g_m : \Delta_{r_m} \to Y \backslash X$ convergeant uniformément sur les compacts vers une courbe entière $g : \mathbb{C} \to Y$ vérifiant $\|g'(z)\|_h \leq \|g'(0)\|_h = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Supposons $g(0) \in X$. Soit V un voisinage de $g(0)$ dans Y tel que $V \cap X$ soit défini par $f = \prod f_i$. Soit i tel que $f_i(g(0)) = 0$. Par le théorème d'Hurwitz (qui stipule qu'une fonction f, limite d'une suite de fonctions holomorphes, ne s'annulant nulle part, uniformément convergente sur les compacts, s'annule soit partout, soit nulle part) appliqué à $\{f_i \circ g_m\}$ qui ne s'annulent nulle part, on en déduit que $f_i \circ g \equiv 0$. Donc $g(\mathbb{C}) \subset X$. $\square$

On peut également appliquer le théorème de Brody au cas du tore complexe :

Théorème 2.13 *([17]) Soit X une sous-variété d'un tore complexe T. Alors X est hyperbolique si et seulement si X ne contient pas de translaté d'un sous-tore.*

Démonstration. Si X contient un sous-tore alors on aurait une courbe entière $\mathbb{C} \to X$, ce qui contredirait l'hyperbolicité de X par le théorème de Brody.

Réciproquement, si X n'est pas hyperbolique, alors par le théorème de Brody, on obtient une application holomorphe $f : \mathbb{C} \to X$ telle que $\|f'(z)\| \leq 1$ et $\|f'(0)\| = 1$. $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$ où Λ est un réseau, et l'on munit T de la structure hermitienne provenant de $\mathbb{C}^n$. Alors f se relève en une application $(f_1, ..., f_n)$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ le revêtement universel. De plus

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i'|^2 \leq 1.$$

Ainsi, par le théorème de Liouville, les f_i' sont constantes et les f_i linéaires. On peut supposer que $f_i(0) = 0$ donc $f(\mathbb{C}) = F$ est un sous-groupe de X.

L'adhérence de Zariski de F dans X l'est également i.e $\overline{F}^{-1} \subset \overline{F}$ et $\overline{F}.\overline{F} \subset \overline{F}$ ($x \to x^{-1}, x \to xa$ sont des homéomorphismes de X pour la topologie de Zariski). $\square$

3 Hyperbolicité algébrique

3.1 Le cas compact

L'hyperbolicité impose de fortes restrictions géométriques. En particulier elle limite le type de sous-variétés qui peuvent apparaître.

Définition 3.1 *([10]) Soit X une variété lisse complexe compacte munie d'une métrique hermitienne dont la (1,1)-forme positive associée est ω. On dit que X est algébriquement hyperbolique si il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute courbe compacte irréductible on ait*

$$-\chi(\overline{C}) = 2g(\overline{C}) - 2 \geq \varepsilon \deg_\omega(C)$$

où $g(\overline{C})$ est le genre de la normalisation de C, $\chi(\overline{C})$ sa caractéristique d'Euler et $\deg_\omega(C) = \int_C \omega$. (Cette propriété est indépendante de ω).

Proposition 3.2 *([10]) Si X est hyperbolique alors X est algébriquement hyperbolique.*

Démonstration. Si X est hyperbolique il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $k_X(\xi) \geq \varepsilon_0 \|\xi\|_\omega$ pour tout $\xi \in T_X$. Soit $\nu : \overline{C} \to C$ la normalisation. Puisque X est hyperbolique $\overline{C}$ ne peut être rationnelle ou elliptique, donc elle est hyperbolique. On peut la munir de la métrique hyperbolique $k_{\overline{C}}$. Alors la formule de Gauss-bonnet donne :

$$\int_{\overline{C}} d\sigma_{\overline{C}} = \frac{-1}{4} \int_{\overline{C}} curv(k_{\overline{C}}) = -\frac{\pi}{2}\chi(\overline{C})$$

Si $j : C \to X$ est l'inclusion, on a :

$$k_{\overline{C}}(t) \geq k_X((j \circ \nu)_* t) \geq \varepsilon_0 \|(j \circ \nu)_* t\|_\omega$$

donc

$$\int_{\overline{C}} d\sigma_{\overline{C}} \geq \varepsilon_0^2 \int_{\overline{C}} (j \circ \nu)^* \omega = \varepsilon_0^2 \int_C \omega.$$

$\square$

3.2 Le cas logarithmique

Soit $\overline{X}$ une variété complexe lisse et $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux i.e en tout point x de D, on peut trouver des coordonnées $z_1, ..., z_n$ telles que $D = \{z_1...z_l = 0\}$. On appelle $(\overline{X}, D)$ variété logarithmique et on note $X = \overline{X} \backslash D$.

Définition 3.3 *Soit $(\overline{X}, D)$ une variété logarithmique, ω une métrique hermitienne sur $\overline{X}$. On dit que $\overline{X} \backslash D$ est hyperboliquement plongée dans X si il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous $x \in X$, $\xi \in T_{X,x}$*

$$k_X(\xi) \geq \varepsilon \left\| \xi \right\|_\omega .$$

Définition 3.4 *([5]) Soit $(\overline{X}, D)$ une variété logarithmique. Pour chaque courbe $C \subset X, C \nsubseteq D$, soit $\nu : \widetilde{C} \to C$ la normalisation de C. Alors on définit $i(C, D)$ comme le nombre de points distincts dans $v^{-1}(D)$.*

Définition 3.5 *Soit $(\overline{X}, D)$ une variété logarithmique, ω une métrique hermitienne sur $\overline{X}$. $(\overline{X}, D)$ est algébriquement hyperbolique s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$2g(\widetilde{C}) - 2 + i(C, D) \geq \varepsilon \deg_\omega(C)$$

pour toute courbe $C \subset X, C \nsubseteq D$.

Proposition 3.6 *([28]) Soit $(\overline{X}, D)$ une variété logarithmique, ω une métrique hermitienne sur $\overline{X}$, telle que $X = \overline{X} \backslash D$ est hyperbolique et hyperboliquement plongée dans $\overline{X}$. Alors $(\overline{X}, D)$ est algébriquement hyperbolique.*

Démonstration. La preuve est parallèle à celle du cas compact en utilisant la formule de Gauss dans le cas compact qui nous donne que pour une surface de Riemann compacte lisse C et un diviseur $D \subset C$ réduit si $C \backslash D$ est hyperbolique munie de la métrique à courbure constante -1 alors

$$Aire(C \backslash D) = 2\pi(2g(C) - 2 + \deg(D))$$

□

3.3 Hyperbolicité algébrique des hypersurfaces et des complémentaires d'hypersurfaces de l'espace projectif

S. Kobayashi a proposé la conjecture suivante pour les hypersurfaces de l'espace projectif

Conjecture 3.7 *Une hypersurface générique $X_d \subset \mathbb{P}^n$ $(n \geq 3)$ de degré d est hyperbolique pour $d \geq 2n-1$.*

Conjecture 3.8 *$\mathbb{P}^n \backslash X_d$ est hyperbolique pour X_d hypersurface générique de degré $d \geq 2n+1$.*

Dès la dimension 2, cette conjecture est très difficile à montrer donc dans un premier temps il est intéressant de regarder si ces configurations vérifient les propriétés conjecturalement équivalentes à l'hyperbolicité comme l'hyperbolicité algébrique ou mieux la conjecture de Lang

Conjecture 3.9 *([24]) Une variété X est hyperbolique si et seulement si toutes ses sous-variétés (et X elle-même) sont de type général i.e K_X est big.*

Ce travail a été fait dans le cas compact par Clemens [6], Pacienza [27] et Voisin [41], [40], [42] :

Théorème 3.10 *([27]) Toutes les sous variétés d'une hypersurface très générique de degré $d \geq 2n-1, n \geq 4$ et $d \geq 6, n = 3$, dans $\mathbb{P}^n$ sont de type générale.*

Le point de départ de la preuve est une technique développée par Clemens [6], Ein [14] et Voisin [40]. Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle de $\mathbb{P}^n$ de degré d. Alors

Proposition 3.11 *[37] Le fibré vectoriel $T_{\mathcal{X}} \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ est engendré par ses sections globales, où p est la projection $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d} \to \mathbb{P}^n$.*

Démonstration. Considérons des coordonnées globales $(Z_j)_{0 \leq j \leq n}$ (resp. $(a_\alpha)_{|\alpha|=d}$) sur $\mathbb{C}^{n+1}$ (resp. $\mathbb{C}^{N_d+1}$). L'équation de $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d}$ s'écrit alors

$$\sum a_\alpha Z^\alpha = 0$$

où $Z^\alpha = \prod Z_j^{\alpha_j}$. Considérons l'ouvert $U_0 = \{Z_0 \neq 0\} \times \{a_{d0\ldots0} \neq 0\}$ de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d}$. Dans la suite on considère les coordonnées inhomogènes associées.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et un entier j tel que $\alpha_j \geq 1$. Sur U_0 on a le champ de vecteurs

$$V_{\alpha,j} = \frac{\partial}{\partial a_\alpha} - z_j \frac{\partial}{\partial a_{\widehat{\alpha}}}$$

où $z_j = Z_j/Z_0$, $\widehat{\alpha_k} = \alpha_k$ si $k \neq j$ et $\widehat{\alpha_j} = \alpha_j - 1$. Ce champ de vecteurs est tangent à $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X} \cap U_0$ et on peut l'étendre à $\mathcal{X}$ comme champ de vecteurs méromorphes de pole d'ordre 1.

Soit

$$V_0 = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

un champ de vecteurs sur $\mathbb{C}^n$, où $v_j = \sum_k v_k^{(j)} z_k + v_0^{(j)}$ est un polynôme de degré au plus 1 en les z_j. Alors il existe un champ de vecteurs

$$V = \sum_{|\alpha| \leq d} v_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\alpha} + V_0$$

tangent à $\mathcal{X}_0$ qui s'étend à $\mathcal{X}$ comme champ de vecteurs holomorphe. En effet, la condition pour que V soit tangent à $\mathcal{X}_0$ est

$$\sum_\alpha v_\alpha z^\alpha + \sum_{\alpha,j} a_\alpha v_j \frac{\partial z^\alpha}{\partial z_j} = 0$$

et les v_α sont choisis de telle sorte que le coefficient du monôme z_α soit égal à zéro.

Il est maintenat facile de voir que les champs de vecteurs construits précédemment engendrent $T_{\mathcal{X}} \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. □

On peut alors montrer :

Théorème 3.12 *Soit X une hypersurface très générale de degré $d \geq 2n$ de $\mathbb{P}^n$ et Y une sous-variété de X, avec pour désingularisation $v : \widetilde{Y} \to Y$. Alors*

$$H^0(\widetilde{Y}, K_{\widetilde{Y}} \otimes v^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) \neq 0.$$

Un corollaire est

Corollaire 3.13 *Une hypersurface très générique de degré $d \geq 2n$ dans $\mathbb{P}^n$ est algébriquement hyperbolique.*

Démonstration. Si $C \subset X$ est une courbe avec $\nu : \widetilde{C} \to C$ pour désingularisation. Alors

$$0 \leq \deg(K_{\widetilde{C}} \otimes v^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) = 2g(\widetilde{C}) - 2 - \deg(\widetilde{C}).$$

□

Passons à la preuve du théorème

Démonstration. Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle de degré d et $U \subset \mathbb{P}^{N_d}$ l'ouvert paramétrisant les hypersurfaces lisses. On considère une sous-variété $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, telle que la projection $\mathcal{Y} \to U$ soit dominante de dimension relative k. On considère $\nu : \widetilde{\mathcal{Y}} \to \mathcal{Y}$ une résolution $\mathcal{Y}$. Pour un élément générique $F \in U$, on a :

$$(i)\ K_{\widetilde{Y}_F} \simeq \Omega^{N+k}_{\widetilde{\mathcal{Y}}|\widetilde{Y}_F}$$

par adjonction,

$$(ii)\ \left(\bigwedge^{n-1-k} T_{\mathcal{X}|X_F}\right) \otimes K_{X_F} \simeq \Omega^{N+k}_{\mathcal{X}}{}_{|X_F}$$

et une application

$$(iii)\ \Omega^{N+k}_{\mathcal{X}|X_F}(-1) \to \Omega^{N+k}_{\widetilde{\mathcal{Y}}|\widetilde{Y}_F}(-1).$$

Ainsi, il est suffisant de montrer que

$$\left(\bigwedge^{n-1-k} T_{\mathcal{X}}\right) \otimes \mathcal{O}_{X_F}(d-n-2)$$

est engendré par ses sections globales. Par

$$\left(\bigwedge^{n-k-1} T_{\mathcal{X}}\right) \otimes \mathcal{O}_{X_F}(d-n-2) = \bigwedge^{n-k-1} (T_{\mathcal{X}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{X_F}(d-2n+k-1)$$

il suffit alors de montrer que

$$T_{\mathcal{X}}(1)$$

est globalement engendré car par hypothèses $d \geq 2n \geq 2n+1-k$. $\square$

Le lemme 3.11 permet également de montrer la non-déformabilité des courbes entières dans ces hypersurfaces :

Théorème 3.14 *[8] Soit $U \subset \mathbb{P}^{N_d}$ un ouvert et $\Phi : \mathbb{C} \times U \to \mathcal{X}$ une application holomorphe telle que $\Phi(\mathbb{C} \times \{t\}) \subset X_t$ pour tout $t \in U$. Alors si $d \geq 2n$, le rang de Φ n'est maximal nulle part.*

Autrement dit, si la conjecture de Kobayashi est fausse les courbes entières ne peuvent pas être rangées dans une famille holomorphe définie sur un ouvert de l'espace des modules des hypersurfaces.

Le cas logarithmique a été traité par Chen [5], Pacienza et Rousseau [28]. Tout d'abord introduisons le formalisme lié aux variétés logarithmiques. Soit $\overline{V}$ une variété complexe lisse et D un diviseur à croisements normaux. Soit $V = \overline{V} \backslash D$ le complémentaire de D.

En suivant [21], le fibré cotangent logarithmique $\overline{T}^*_V = T^*_{\overline{V}}(\log D)$ est défini comme le sous-faisceau localement libre du faisceau des 1-formes méromorphes sur $\overline{V}$, dont la restriction à V est T^*_V et en un point $x \in D$ donné par

$$\overline{T}^*_{V,x} = \sum_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{\overline{V},x} \frac{dz_i}{z_i} + \sum_{j=1+1}^{n} \mathcal{O}_{\overline{V},x} dz_j$$

où les coordonnées locales $z_1,..., z_n$ centrées en x sont choisies telles que $D = \{ z_1...z_l = 0\}$.

Son dual, le faisceau tangent logarithmique $\overline{T}_V = T_{\overline{V}}(-\log D)$ est le sous-faisceau localement libre du faisceau $T_{\overline{V}}$, dont la restriction à V est T_V et un un point $x \in D$ donné par

$$\overline{T}_{V,x} = \sum_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{\overline{V},x} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{j=1+1}^{n} \mathcal{O}_{\overline{V},x} \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Rappelons qu'en partant d'un diviseur arbitraire, le théorème des résolutions d'Hironaka [19] garantit qu'on peut le remplacer par un diviseur à croisement normaux après éclatements.

Théorème 3.15 *(Hironaka, [19]) Soit V une variété complexe algébrique irréductible (éventuellement avec des singularités), et $D \subset V$ un diviseur effectif sur V. Il existe un morphisme projectif birationnel*

$$\mu : V' \to V,$$

où V' et lisse et μ a pour diviseur exceptionnel except(μ), tel que

$$\mu^{-1}(D) + except(\mu)$$

est un diviseur à croisements normaux.

On appelle V' une résolution logarithmique de (V, D).

Théorème 3.16 *([28]) Soit X_d une hypersurface très générique de degré $d \geq 2n + 1$ dans $\mathbb{P}^n$. Alors toutes les sous-variétés logarithmiques (Y, D) de $(\mathbb{P}^n, X_d)$ $(D = Y \cap X_d)$ sont de type log-général i.e pour toute résolution $\nu : \widetilde{Y} \to Y$ de (Y, D) le fibré canonique logarithmique $K_{\widetilde{Y}}(\nu^{-1}(D))$ est big.*

Démonstration. Nous allons montrer le résultat plus fort : pour X_d une hypersurface très générique de degré $d \geq 2n+1$ dans $\mathbb{P}^n$ et (Y, D) une sous-variété logarithmique de $(\mathbb{P}^n, X_d)$ de résolution $\nu : \widetilde{Y} \to Y$, on a

$$h^0(\widetilde{Y}, \overline{K}_{\widetilde{Y}} \otimes \nu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) \neq 0.$$

Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle de degré d et $U \subset \mathbb{P}^{N_d}$ l'ouvert paramétrisant les hypersurfaces lisses. On considère une sous-variété irréductible $\mathcal{Y} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d}$, intersectant proprement $\mathcal{X}$, telle que la projection $\mathcal{Y} \to U$ soit dominante de dimension relative k. Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}$ le diviseur induit par $\mathcal{X}$. On considère $\nu : \widetilde{\mathcal{Y}} \to \mathcal{Y}$ une résolution logarithmique de $(\mathcal{Y}, \mathcal{D})$. Pour un élément générique $F \in U$, on a :

$$(i)\ \overline{K}_{\widetilde{Y}_F} \simeq \overline{\Omega}^{N+k}_{\widetilde{\mathcal{Y}}|\widetilde{Y}_F}$$

par adjonction,

$$(ii)\quad \left(\bigwedge^{n-k} T_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d}}(-\log \mathcal{X})_{|\mathbb{P}^n_F} \right) \otimes \overline{K}_{\mathbb{P}^n_F} \simeq \Omega_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d}}(\log \mathcal{X})_{|\mathbb{P}^n_F}$$

et une application

$$(iii)\ \Omega_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d}}(\log \mathcal{X})_{|\mathbb{P}^n_F}(2n+1-k-d) \to \overline{\Omega}^{N+k}_{\widetilde{\mathcal{Y}}|\widetilde{Y}_F}(2n+1+k-d).$$

Ainsi, il est suffisant de montrer que

$$\left(\bigwedge^{n-k} T_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d}}(-\log \mathcal{X})_{|\mathbb{P}^n_F} \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(n-k)$$

est engendré par ses sections globales. Par

$$\left(\bigwedge^{n-k} T_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d}}(-\log \mathcal{X})_{|\mathbb{P}^n_F} \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(n-k) = \bigwedge^{n-k} \left(T_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d}}(-\log \mathcal{X})_{|\mathbb{P}^n_F}(1) \right)$$

il suffit alors de montrer que

$$T_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{N_d}}(-\log \mathcal{X})_{|\mathbb{P}^n_F}(1)$$

est globalement engendré. □

Théorème 3.17 *([28]) Soit X_d une hypersurface très générique de degré $d \geq 2n+1$ dans $\mathbb{P}^n$. Alors $(\mathbb{P}^n, X_d)$ est algébriquement hyperbolique.*

Démonstration. Soit $C \subset \mathbb{P}^n$ une courbe intersectant proprement X_d, $f : \widetilde{C} \to C$ une désingularisation, $D := C \cap X_d$ et $\widetilde{D} = f^{-1}(D)$ alors par la preuve précédente

$$0 \leq \deg(K_{\widetilde{C}}(\widetilde{D}) \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2n-d)) = 2g(\widetilde{C}) - 2 + i(C, X_d) - (d-2n)\deg C.$$

□

4 Courbure négative et lemme d'Ahlfors-Schwarz

Soit L un fibré en droites sur une variété compacte complexe X tel que l'espace des sections $H^0(X, L) \neq 0$ ait pour base $s_0, s_1..., s_N$. On définit alors une application

$$\begin{array}{rcl} \Phi_L & : & X \to \mathbb{P}^N, \\ z & \to & [s_0(z) : ... : s_N(z)]. \end{array}$$

Cette application est holomorphe en dehors des points de base où toutes les sections s'annulent.

Définition 4.1 *Si Φ_L est un plongement holomorphe alors on dit que L est très ample. L est dit ample si L^m est très ample pour un entier $m > 0$.*

Définition 4.2 *Si Φ_{L^m} est un plongement méromorphe alors on dit que L est big.*

Remarque 4.3 *L est big $\Leftrightarrow$ $H^0(X, L \otimes A^{-1}) \neq 0$ pour A fibré en droites ample $\Leftrightarrow$ $H^0(X, L^m) \geq \alpha m^n$ où $\alpha > 0, n = \dim X$.*

On a alors le théorème de Kodaira

Théorème 4.4 *Un fibré en droites sur une variété lisse complexe compacte Kähler X est ample si et seulement si L peut être muni d'une métrique hermitienne lisse à courbure positive.*

Pour un fibré vectoriel E sur X, on dit que E est ample si et seulement si $\mathcal{O}_{P(E^*)}(1)$ est ample sur $P(E^*)$. ($P(E)$ désigne le fibré des droites vectorielles de E)

Une des idées fondamentales est que l'hyperbolicité devrait être liée à des propriétés de négativité de la courbure. Par exemple on a le résultat suivant :

Théorème 4.5 *(Kobayashi, Urata [39]) Soit X une variété complexe compacte lisse dant le fibré cotangent est ample. Alors X est hyperbolique.*

Démonstration. T_X^* est ample donc pour m suffisament grand on a assez de sections de $S^m T_X^*$ pour obtenir une application $g : T_X \to \mathbb{C}^N$ qui envoie la section nulle $0(X)$ sur 0 et est un isomorphisme de $T_X \backslash 0(X)$ sur son image. Si X n'est pas hyperbolique alors par le théorème de Brody, on dispose d'une application $f : \mathbb{C} \to X$ telle que $\|f'(z)\| \leq 1$ et $\|f'(0)\| = 1$. Ainsi $g \circ f'$ est une application entière bornée donc constante et puisque g est un isomorphisme en dehors de la section nulle, on a $f' \equiv 0$ et donc f est constante. C'est une contradiction. $\square$

Lemme 4.6 *(d'Ahlfors-Schwarz) Soit $\gamma(t) = \gamma_0(t)dtd\bar{t}$ une métrique hermitienne singulière sur Δ où $\log \gamma_0$ est une fonction sous-harmonique telle que $i\partial\overline{\partial} \log \gamma_0 \geq A\gamma$ au sens des courants pour $A > 0$. Alors γ peut se comparer avec la métrique de Poincaré ds^2 :*

$$\gamma \leq \frac{2}{A} ds^2.$$

Démonstration. Supposons d'abord γ lisse. Quitte à remplacer γ par $\gamma_r(t) = \gamma(rt)$ et faire tendre $r \to 1$, on peut supposer que γ s'étend à un plus grand disque. Soit $a : \Delta \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $\gamma = a ds^2$. Elle est continue et vaut 0 sur $\partial\Delta$, donc atteint son maximum en $t_0 \in \Delta$, donc

$$\begin{aligned} 0 &\geq i\partial\overline{\partial} \log a(t_0) \\ &= i\partial\overline{\partial} \log \gamma(t_0) - i\partial\overline{\partial} \log \frac{1}{(1-|t|^2)^2}_{|t=t_0} \\ &\geq A\gamma(t_0) - 2\frac{|dt|^2}{(1-|t|^2)^2} = (Aa(t_0) - 2) ds^2 \end{aligned}$$

Donc $Aa(t_0) - 2 \leq 0$ et $a \leq \frac{2}{A}$.
Si γ n'est pas lisse on utilise un argument de régularisation. □

Corollaire 4.7 *Soit X une surface de Riemann munie d'une métrique hermitienne singulière $\gamma(t) = \gamma_0(t)dtd\bar{t}$ telle que $i\partial\overline{\partial} \log \gamma_0 \geq A\gamma$ au sens des courants pour $A > 0$. Alors pour toute application holomorphe $f : \Delta \to X$, $f^*\gamma \leq \frac{2}{A} ds^2$.*

Soit X une variété lisse complexe munie d'une métrique hermitienne ω et $v \in T_{X,x}$. On définit la courbure sectionnelle de ω dans la direction v par $K_\omega([v]) = \sup K_{f^*\omega}(0)$ où la borne supérieure est prise sur toutes les applications holomorphes $f : \Delta \to X$ telles que $f(0) = x$ et v est tangent à $f(\Delta)$, $K_{f^*\omega}$ étant la courbure de Gauss associée à $f^*\omega$. Alors, on a :

Proposition 4.8 *Soit X une variété lisse complexe munie d'une métrique ω à courbure sectionnelle $K_\omega \leq B < 0$. Alors X est hyperbolique.*

5 Espaces de jets et opérateurs différentiels

Soit X une variété complexe de dimension n. On définit le fibré $J_k \to X$ des k-jets de germes de courbes dans X, comme étant l'ensemble des classes d'équivalence des applications holomorphes $f : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ modulo la relation d'équivalence suivante : $f \sim g$ si et seulement si toutes les dérivées $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)$ coïncident pour $0 \leq j \leq k$. L'application projection $J_k \to X$ est simplement $f \to f(0)$. Grâce à la formule de Taylor appliquée à un germe f au voisinage d'un point $x \in X$, on peut identifier $J_{k,x}$ à l'ensemble des $k-$uplets de vecteurs $(f'(0), ..., f^{(k)}(0)) \in \mathbb{C}^{nk}$. Ainsi, J_k est un fibré holomorphe sur X de fibre $\mathbb{C}^{nk}$. On peut voir qu'il ne s'agit pas d'un fibré vectoriel pour $k \geq 2$ (pour $k = 1$, c'est simplement le fibré tangent T_X).

Définition 5.1 *Soit* (X, V) *une variété dirigée i.e* $V \subset T_X$ *est un sous-fibré vectoriel. Le fibré* $J_kV \to X$ *est l'espace des* $k-$*jets de courbes* $f : (\mathbb{C}, 0) \to X$ *tangentes à* V*, c'est-à-dire telles que* $f'(t) \in V_{f(t)}$ *pour* t *au voisinage de* 0*, l'application projection sur* X *étant* $f \to f(0)$.

5.1 Construction

Nous présentons la construction des espaces de jets introduits par J.-P. Demailly dans [10].

Soit (X, V) une variété dirigée. On définit (X', V') par :
i) $X' = P(V)$
ii) $V' \subset T_{X'}$ est le sous-fibré tel que pour chaque point $(x, [v]) \in X'$ associé à un vecteur $v \in V_x \backslash \{0\}$ on a :

$$V'_{(x,[v])} = \{\xi \in T_{X'}; \pi_*\xi \in \mathbb{C}v\}$$

où $\pi : X' \to X$ est la projection naturelle et $\pi_* : T_{X'} \to \pi^* T_X$. Le fibré V' est caractérisé par les deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \quad &\to \quad T_{X'/X} \to V' \xrightarrow{\pi_*} \mathcal{O}_{X'}(-1) \to 0, \\ 0 \quad &\to \quad \mathcal{O}_{X'} \to \pi^* V \otimes \mathcal{O}_{X'}(1) \to T_{X'/X}. \end{aligned}$$

La deuxième suite exacte est une version relative de la suite exacte d'Euler associée au fibré tangent des fibres $P(V_x)$. On définit par récurrence le fibré de k-jets projectivisé $P_kV = X_k$ et le sous-fibré associé $V_k \subset T_{X_k}$ par :
$(X_0, V_0) = (X, V), (X_k, V_k) = (X'_{k-1}, V'_{k-1})$. On a par construction :

$$\dim X_k = n + k(r-1), rang V_k = r := rang V$$

Soit π_k la projection naturelle $\pi_k : X_k \to X_{k-1}$, on notera $\pi_{j,k} : X_k \to X_j$ la composition $\pi_{j+1} \circ \pi_{j+2} \circ ... \circ \pi_k$, pour $j \leq k$.

Par définition, il y a une injection canonique $\mathcal{O}_{P_kV}(-1) \hookrightarrow \pi_k^* V_{k-1}$ et on obtient un morphisme de fibrés en droites

$$\mathcal{O}_{P_kV}(-1) \to \pi_k^* V_{k-1} \overset{(\pi_k)^*(\pi_{k-1})_*}{\longrightarrow} \pi_k^* \mathcal{O}_{P_{k-1}V}(-1)$$

qui admet

$$D_k = P(T_{P_{k-1}V/P_{k-2}V}) \subset P_kV$$

comme diviseur de zéros
Ainsi, on a :

$$\mathcal{O}_{P_kV}(1) = \pi_k^*\mathcal{O}_{P_{k-1}V}(1) \otimes \mathcal{O}(D_k).$$

Remarque 5.2 *Chaque application non constante $f : \Delta_R \to X$ de (X, V) se relève en $f_{[k]} : \Delta_R \to P_kV$. En effet :*
si f n'est pas constante, on peut définir la tangente $[f'(t)]$ (aux points stationnaires $f'(t) = (t - t_0)^s u(t), [f'(t_0)] = [u(t_0)]$) et $f_{[1]}(t) = (f(t), [f'(t)])$.

Nous allons décrire cela par des coordonnées dans des cartes affines :
pour chaque point $x_0 \in X$, il y a des coordonnées locales $(z_1, ..., z_n)$ sur un voisinage U de x_0 telles que les fibres $(V_z)_{z\in U}$ peuvent être définies par des équations linéaires :
$V_z = \{\xi = \sum_{1\leq j\leq n} \xi_j \frac{\partial}{\partial z_j}; \xi_j = \sum_{1\leq k\leq r} a_{jk}(z)\xi_k$, pour $j = r+1, ..., n\}$. Donc la carte affine $\xi_j \neq 0$ de $P(V)_U$ peut être décrite par le système de coordonnées : $(z_1, ..., z_n; \frac{\xi_1}{\xi_j}, ..., \frac{\xi_r}{\xi_j})$

On peut calculer les coordonnées de $f_{[k]}$ dans les cartes affines :
si $f_{[k]} = (F_1, ..., F_N)$ on obtient $f_{[k+1]} = (F_1, ..., F_N, \frac{F'_{s_1}}{F'_{s_r}}, ..., \frac{F'_{s_{r-1}}}{F'_{s_r}})$
où $N = n + k(r - 1)$ et $\{s_1, ..., s_r\} \subset \{1, ..., N\}$. Si $k \geq 1$, $\{s_1, ..., s_r\}$ contient les derniers $r - 1$ indices de $\{1, ..., N\}$ correspondants aux composantes verticales de la projection $P_kV \to P_{k-1}V$, et s_r est un indice tel que $m(F_{s_r}, 0) = m(f_{[k]}, 0)$, où $m(g, t)$ désigne la multiplicité de la fonction g en t.

Il est clair que la suite $m(f_{[k]}, t_0)$ est décroissante au sens large puisque $f_{[k-1]} = \pi_k \circ f_{[k]}$. En fait, on a :

Proposition 5.3 *[10] Soit $f : (\mathbb{C}, 0) \to X$ un germe de courbe non constant tangent à V. Alors pour tout $j \geq 2$, on a $m(f_{[j-2]}, 0) \geq m(f_{[j-1]}, 0)$ et l'inégalité est stricte si et seulement si $f_{[j]}(0) \in D_j$.*

Réciproquement, si $\omega \in P_kV$ est un élément arbitraire et $m_0 \geq ... \geq m_{k-1} \geq 1$ sont des entiers tels que pour tout $j \in \{2, ..., k\}$, $m_{j-2} > m_{j-1}$ si et seulement si $\pi_{j,k}(\omega) \in D_j$, alors il existe un germe de courbe, $f : (\mathbb{C}, 0) \to X$ tangent à V tel que $f_{[k]}(0) = \omega$ et $m(f_{[j]}, 0) = m_j$.

Un point $\omega \in X_k$ est dit régulier s'il existe un germe $f : (\mathbb{C}, 0) \to X$ tel que $f_{[k]}(0) = \omega$ *et* $m_0(f, 0) = m(f_{[1]}, 0) = ... = m(f_{[k-1]}, 0) = 1$. Ceci est possible par la proposition précédente si et seulement si $\pi_{j,k}(\omega) \notin D_j$ *pour* *tout* $j \in \{2, ..., k\}$. On définit donc [10] :

$$\begin{aligned} P_k V^{reg} &= \bigcap_{2 \leq j \leq k} \pi_{j,k}^{-1}(P_j V \backslash D_j), \\ P_k V^{sing} &= \bigcup_{2 \leq j \leq k} \pi_{j,k}^{-1}(D_j) = P_k V \backslash P_k V^{reg}. \end{aligned}$$

Proposition 5.4 *Soit* $f : (\mathbb{C}, 0) \to X$ *un germe de courbe, avec une paramétrisation irréductible et une singularité en* $f(0)$. *Alors on peut désingulariser le germe de courbe par la construction des jets de Demailly, i.e il existe un entier* k *tel que* $m(f_{[k]}, 0) = 1$.

5.2 Opérateurs différentiels sur les jets

D'après [18], on introduit le fibré vectoriel des jets de différentielles, d'ordre k et de degré m, $E_{k,m}^{GG} V^* \to X$ dont les fibres sont les polynômes à valeurs complexes $Q(f', f'', ..., f^{(k)})$ sur les fibres de $J_k V$, de poids m par rapport à l'action de $\mathbb{C}^*$:

$$Q(\lambda f', \lambda^2 f'', ..., \lambda^k f^{(k)}) = \lambda^m Q(f', f'', ..., f^{(k)})$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $(f', f'', ..., f^{(k)}) \in J_k V$.

$E_{k,m}^{GG} V^*$ admet une filtration canonique dont les termes gradués sont

$$Gr^l(E_{k,m}^{GG} V^*) = S^{l_1} V^* \otimes S^{l_2} V^* \otimes ... \otimes S^{l_k} V^*,$$

où $l := (l_1, l_2, ..., l_k) \in \mathbb{N}^k$ vérifie $l_1 + 2l_2 + ... + kl_k = m$. En effet, en considérant l'expression de plus haut degré en les $(f_i^{(k)})$ qui intervient dans l'expression d'un polynôme homogène de poids m, on obtient une filtration intrinsèque :

$$E_{k-1,m}^{GG} V^* = S_0 \subset S_1 \subset ... \subset S_{\left[\frac{m}{k}\right]} = E_{k,m}^{GG} V^*$$

où

$$S_i / S_{i-1} \simeq S^i V^* \otimes E_{k,m-ki}^{GG} V^*.$$

Par récurrence, on obtient bien une filtration dont les termes gradués sont ceux annoncés plus haut.

D'après [10], on définit le sous-fibré $E_{k,m} V^* \subset E_{k,m}^{GG} V^*$, appelé le fibré des jets de différentielles invariants d'ordre k et de degré m, i.e :

$$Q((f \circ \phi)', (f \circ \phi)'', ..., (f \circ \phi)^{(k)}) = \phi'(0)^m Q(f', f'', ..., f^{(k)})$$

pour tout $\phi \in G_k$ le groupe des germes de k-jets de biholomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$. Pour G'_k le sous-groupe de G_k des germes ϕ tangents à l'identité ($\phi'(0) = 1$) on a $E_{k,m}V^* = (E^{GG}_{k,m}V^*)^{G'_k}$.

La filtration canonique sur $E^{GG}_{k,m}V^*$ induit une filtration naturelle sur $E_{k,m}V^*$ dont les termes gradués sont

$$\left(\bigoplus_{l_1+2l_2+...+kl_k=m} S^{l_1}V^* \otimes S^{l_2}V^* \otimes ... \otimes S^{l_k}V^*\right)^{G'_k}.$$

Le lien entre ces espaces d'opérateurs différentiels et les espaces de jets construits précédemment est donné par :

Théorème 5.5 *[10] Supposons que V a un rang $r \geq 2$.*

Soit $\pi_{0,k} : P_kV \to X$, et J_kV^{reg} le fibré des k-jets réguliers i.e $f'(0) \neq 0$.

i) Le quotient J_kV^{reg}/G_k a la structure d'un fibré localement trivial au-dessus de X, et il y a un plongement holomorphe $J_kV^{reg}/G_k \to P_kV$, qui identifie J_kV^{reg}/G_k avec P_kV^{reg}.

ii) Le faisceau image direct $(\pi_{0,k})_*\mathcal{O}_{P_kV}(m) \simeq \mathcal{O}(E_{k,m}V^*)$ peut être identifié avec le faisceau des sections holomorphes de $E_{k,m}V^*$.

iii) Pour tout $m > 0$, le lieu de base du système linéaire $|\mathcal{O}_{P_kV}(m)|$ est égal à P_kV^{sing}. De plus, $\mathcal{O}_{P_kV}(1)$ est relativement big (i.e pseudo-ample) au-dessus de X.

Démonstration. i) Pour $f \in J_kV^{reg}$ on a le relevé $f_{[1]} = (f, [f']) \in P_1V$ et par récurrence un $(k-j)-$jet $f_{[j]}$ et la valeur $f_{[k]}(0)$ est indépendante du choix du représentant pour le k-jet f. Le relèvement commute avec la reparamétrisation donc $(f \circ \phi)_{[k]} = f_{[k]} \circ \phi$ et on a une application bien définie

$$\begin{array}{rcl} J_kV^{reg}/G_k & \to & P_kV^{reg}, \\ f \mod G_k & \to & f_{[k]}(0). \end{array}$$

On peut la décrire explicitement en coordonnées. Prenons des coordonnées locales $(z_1, ..., z_n)$ en $x_0 \in X$ telles que $V_{x_0} = Vect(\frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_r})$. Soit $f = (f_1, ..., f_n)$ un $k-$jet régulier tangent à V. Alors il existe $1 \leq i \leq r$ tel que $f'_i(0) \neq 0$ et une reparamétrisation $t = \phi(\tau)$ telle que $f \circ \phi = g = (g_1, ..., g_n)$ avec $g_i(\tau) = \tau$. On suppose $i = r$. P_kV est une tour à k étages de $\mathbb{P}^{r-1}-$fibrés. Dans les coordonnées inhomogènes correspondantes de ces $\mathbb{P}^{r-1}$, le point $f_{[k]}(0)$ est donné par la collection de dérivées

$$((g'_1(0), ..., g'_{r-1}(0)); (g''_1(0), ..., g''_{r-1}(0)); ...; (g^{(k)}_1(0), ..., g^{(k)}_{r-1}(0))).$$

Ainsi l'application $J_kV^{reg}/G_k \to P_kV^{reg}$ est une bijection et les fibres de ces fibrés isomorphes peuvent être vues comme la réunion de r cartes affines $\mathbb{C}^{(r-1)k}$ associées à chaque choix de i.

ii) Puisque les fibrés P_kV et $E_{k,m}V^*$ sont tous les deux localement triviaux, il suffit d'identifier les sections de $\mathcal{O}_{P_kV}(m)$ sur une fibre P_kV_x avec la fibre $E_{k,m}V_x^*$ pour tout point $x \in X$.

Soit donc σ une section de $\mathcal{O}_{P_kV}(m)$ sur une fibre P_kV_x et $f \in J_kV^{reg}$ un $k-$jet régulier en x. La dérivée $f'_{[k-1]}(0)$ définit un élément de $\mathcal{O}_{P_kV}(-1)$ en $f_{[k]}(0) \in P_kV$. Alors

$$Q(f', f'', ..., f^{(k)}) = \sigma(f_{[k]}(0)).(f'_{[k-1]}(0))^m$$

définit un opérateur complexe holomorphe sur $J_kV_x^{reg}$ invariant par reparamétrisation. $J_kV_x^{reg}$ est le complémentaire d'un sous-espace linéaire de codimension n dans J_kV_x donc Q s'étend holomorphiquement sur $J_kV_x \simeq (\mathbb{C}^r)^k$ par le théorème d'extension de Riemann ($r \geq 2$). Ainsi Q s'écrit comme une série entière convergente

$$Q(f', f'', ..., f^{(k)}) = \sum_{\alpha_1,...,\alpha_k \in \mathbb{N}^r} a_{\alpha_1...\alpha_k}(f')^{\alpha_1}...(f^{(k)})^{\alpha_k}.$$

L'invariance sous l'action de G_k implique en particulier la multihomogénéité de Q, et donc le fait que Q soit un polynôme.

Réciproquement, pour tout ω dans un voisinage de $\omega_0 \in P_kV_x$ on peut montrer l'existence d'une famille holomorphe de germes de courbes f_ω : $(\mathbb{C}, 0) \to X$ telle que $(f_\omega)_{[k]}(0) = \omega$ et $(f_\omega)'_{[k-1]}(0) \neq 0$. Alors $Q \in E_{k,m}V_x^*$ donne une section σ de $\mathcal{O}_{P_kV}(m)$ sur P_kV_x par

$$\sigma(\omega) = Q(f'_\omega, f''_\omega, ..., f_\omega^{(k)})(0)((f_\omega)'_{[k-1]}(0))^{-m}.$$

iii) Si g est la reparamétrisation de f telle que $g_r(\tau) = \tau$, les polynômes invariants $Q(f', f'', ..., f^{(k)}) = f_r'^{2k-1}g_i^{(j)}$ sont des sections de $\mathcal{O}_{P_kV}(2k-1)$ qui séparent les points dans la carte affine $f'_r \neq 0$ de $P_kV_x^{reg}$.

Les sections $f \to f'_1, ..; , f \to f'_r$ s'annulent exactement sur P_kV^{sing}. On peut aussi montrer (cf. [10]) que réciproquement toute section σ de $\mathcal{O}_{P_kV}(m)$ sur une fibre P_kV_x s'annule sur P_kV^{sing}. □

Remarque 5.6 *Il découle du théorème précédent que $\mathcal{O}_{P_kV}(1)$ n'est jamais relativement ample pour $k \geq 2$. Par contre, pour $a \in \mathbb{Z}^k$*

$$\mathcal{O}_{P_kV}(a) = \mathcal{O}_{P_kV}(a_k) \otimes \pi^*_{k-1,k}\mathcal{O}_{P_{k-1}V}(a_{k-1})... \otimes \pi^*_{1,k}\mathcal{O}_{P_1V}(a_1)$$

est relativement ample pour $a_1 \geq 3a_2, ..., a_{k-2} \geq 3a_{k-1}$ et $a_{k-1} > 2a_k > 0$.

5.3 Métriques sur les k-jets à courbure négative

Définition 5.7 *Soit L un fibré en droites sur une variété complexe lisse X. Une métrique hermitienne singulière sur L est une fonction $\|.\|_h : L \to \mathbb{R}^+$ donnée dans une trivialisation locale quelconque $U \times \mathbb{C} \xrightarrow{u} L_{|U}$ par*

$$\|u(x,\xi)\|_h = |\xi| \, e^{-\phi(x)}$$

où $\phi \in L^1_{loc}(U)$. Son courant de courbure est défini par $\Theta_h(L) = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\phi$ et le lieu singulier de la métrique est l'ensemble des points x tels que ϕ ne soit pas borné sur tout voisinage de x.

Exemple 5.8 *Si $s_0, ..., s_N$ sont des sections holomorphes non nulles de L, on peut définir une métrique singulière sur L par*

$$\|s\|_h^2 = \frac{\left|u^{-1} \circ s\right|^2}{\left|u^{-1} \circ s_0\right|^2 + ... + \left|u^{-1} \circ s_N\right|^2}.$$

Le poids associé est la fonction plurisousharmonique

$$\phi = \frac{1}{2} \log \left(\sum_{j=0}^{N} \left|u^{-1} \circ s_j\right|^2 \right)$$

et le courant associé est donc positif.

Théorème 5.9 *Soit L un fibré en droites sur une variété compacte complexe lisse X munie d'une métrique lisse hermitienne ω. L est big si et seulement si il existe une métrique singulière h sur L telle que $\Theta_h(L) \geq \varepsilon\omega$ pour $\varepsilon > 0$.*

Définition 5.10 *[10] Une métrique singulière h_k de k-jets sur une variété complexe dirigée (X, V) est une métrique sur le fibré en droites $O_{P_kV}(-1)$, telle que la fonction de poids ϕ est telle que $-\phi$ soit quasi-plurisousharmonique. On note $\Sigma_{h_k} \subset P_kV$ le lieu singulier de la métrique i.e l'ensemble des points où ϕ n'est pas localement bornée, et $\Theta_{h_k^{-1}}(O_{P_kV}(1)) = -\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\phi$ le courant de courbure.*
On dit que h_k est à courbure négative au sens des jets s'il existe $\varepsilon > 0$ et une métrique hermitienne ω_k sur TP_kV tels que :

$$\Theta_{h_k^{-1}}(O_{P_kV}(1))(\xi) \geq \varepsilon \left|\xi\right|^2_{\omega_k}, \text{ pour tout } \xi \in V_k$$

Remarque 5.11 *l'inégalité est prise au sens des distributions :*

Comme application du lemmme d'Ahlfors-Schwarz on a :

Théorème 5.12 *[10] Soit (X, V) une variété complexe compacte dirigée. Si (X, V) a une métrique de k-jet avec courbure négative, alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ tangente à V vérifie $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset \Sigma_{h_k}$. En particulier, si $\Sigma_{h_k} \subset P_k V^{sing}$, alors (X, V) est hyperbolique.*

Démonstration. Soit ω_k une métrique hermitienne lisse sur $T_{P_k V}$. Par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\Theta_{h_k^{-1}}(O_{P_k V}(1))(\xi) \geq \varepsilon \left|\xi\right|^2_{\omega_k}, \text{ pour tout } \xi \in V_k.$$

$(\pi_k)_*$ envoie V_k continûment sur $O_{P_k V}(-1)$ et le poids $e^{-\phi}$ de h_k est localement majoré. Donc il existe $C > 0$ telle que

$$\left|(\pi_k)_* \xi\right|^2_{h_k} \leq C \left|\xi\right|^2_{\omega_k}, \text{ pour tout } \xi \in V_k.$$

Ainsi :

$$\Theta_{h_k^{-1}}(O_{P_k V}(1))(\xi) \geq \frac{\varepsilon}{C} \left|(\pi_k)_* \xi\right|^2_{h_k}, \text{ pour tout } \xi \in V_k.$$

Soit $f : \Delta_R \to X$ une application holomorphe non constante tangente à V. On a un morphisme :

$$F = f'_{[k-1]} : T_{\Delta_R} \to f^*_{[k]} O_{P_k V}(-1)$$

et on peut alors construire une métrique

$$\gamma = \gamma_0(t) dt \otimes \overline{dt} = F^* h_k \text{ sur } T_{\Delta_R}.$$

Si $f_{[k]}(\Delta_R) \subset \Sigma_{h_k}$ alors $\gamma \equiv 0$. Sinon $\gamma(t)$ s'annule en les points singuliers de $f_{[k-1]}$ et en les points de $f^{-1}_{[k]}(\Sigma_{h_k})$. En les autres points, la courbure de Gauss de γ vérifie

$$\frac{i\partial\overline{\partial} \log \gamma_0(t)}{\gamma(t)} = \frac{-\pi (f_{[k]})^* \Theta_{h_k}(O_{P_k V}(-1))}{F^* h_k} = \frac{\pi \Theta_{h_k^{-1}}(O_{P_k V}(1))(f'_{[k]}(t))}{\left|f'_{[k-1]}(t)\right|^2_{h_k}} \geq \frac{\varepsilon'}{C}.$$

Le lemme d'Ahlfors-Schwarz implique alors

$$\gamma(t) \leq \frac{2C}{\varepsilon'} \frac{R^{-2} \left|dt\right|^2}{(1 - \frac{|t|^2}{R^2})^2}$$

donc

$$\left|f'_{[k-1]}(t)\right|^2_{h_k} \leq \frac{2C}{\varepsilon'} \frac{R^{-2} \left|dt\right|^2}{(1 - \frac{|t|^2}{R^2})^2}.$$

Si $f : \mathbb{C} \to X$ est une courbe entière tangente à V telle que $f_{[k]}(\mathbb{C}) \nsubseteq \Sigma_{h_k}$ alors on obtient par l'inégalité précédente, en faisant tendre $R \to +\infty$, que $f_{[k-1]}$ est constante donc aussi f. Si $\Sigma_{h_k} \subset P_k V^{sing}$, alors puisque $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset \Sigma_{h_k}$ on obtient $f'(t) = 0$ en tout point et f constante. $\square$

En particulier, l'existence de suffisamment de jets de différentielles globales implique que l'on peut construire une métrique de k-jet avec courbure négative :

Corollaire 5.13 *[10] Supposons qu'il existe des entiers $k, m > 0$ et un fibré en droites ample L sur X tel que*

$$H^0(P_k V, \mathcal{O}_{P_k V}(m) \otimes \pi_{0,k}^* L^{-1}) \simeq H^0(X, E_{k,m} V^* \otimes L^{-1})$$

ait des sections non nulles $\sigma_1, ..., \sigma_N$. Soit $Z \subset P_k V$ le lieu de base de ces sections. Alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ tangente à V vérifie $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset Z$. Autrement dit, pour tout opérateur différentiel P, G_k-invariant à valeurs dans L^{-1}, toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ tangente à V vérifie l'équation différentielle $P(f) = 0$.

Définition 5.14 *[10] Soit A un fibré en droites ample sur une variété complexe compacte X. L'ensemble base des $k-$jets est défini par :*

$$B_k := \bigcap_{m>0} B_{k,m} \subset X_k$$

où $B_{k,m}$ est le lieu de base du fibré $O_{X_k}(m) \otimes \pi_{0,k}^* O(-A)$.

D'après le corollaire précédent toute courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$ vérifie $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset B_k$, donc $f(\mathbb{C}) \subset \bigcap_{k>0} \pi_{k,0}(B_k)$.

Ceci peut-être mis en relation avec la conjecture de Green et Griffiths [18] :

Conjecture 5.15 *Si X est une variété de type général, toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ est algébriquement dégénérée et il existe un sous ensemble algébrique propre $Y \subset X$ contenant toutes les images des courbes entières non constantes.*

5.4 Le théorème de Bloch

Théorème 5.16 *Soit Z un tore complexe et $f : \mathbb{C} \to Z$ une application holomorphe. Alors l'adhérence de Zariski $\overline{f(\mathbb{C})}^{Zar}$ est le translaté d'un sous-tore de Z.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{C} \to Z$ une courbe entière et X l'adhérence de Zariski de $f(\mathbb{C})$. Soit $Z_k = P_k(T_Z)$ le fibré de $k-$jets de Z et X_k l'adhérence de $X_k^{reg} = P_k(T_{X^{reg}})$ dans Z_k. T_Z est trivial donc $Z_k = Z \times R_{n,k}$ où $R_{n,k}$ est une variété rationnelle. Il existe $a \in \mathbb{N}^k$ tel que $\mathcal{O}_{Z_k}(a)$ est relativement très ample i.e il existe $\mathcal{O}_{R_{n,k}}(a)$ très ample tel que $\mathcal{O}_{Z_k}(a) = pr_2^* \ \mathcal{O}_{R_{n,k}}(a)$. Soit $\Phi_k : X_k \to R_{n,k}$ la restriction de la projection $Z \times R_{n,k} \to R_{n,k}$. On a $\mathcal{O}_{X_k}(a) = \Phi_k^* \mathcal{O}_{R_{n,k}}(a)$.

Soit $B_k \subset X_k$ l'ensemble des points $x \in X_k$ tels que la fibre de Φ_k passant par x soit de dimension positive. Supposons $B_k \neq X_k$. Alors $\mathcal{O}_{X_k}(a)$ est big donc peut être muni d'une métrique singulière à courbure positive dont le lieu de dégénérescence est B_k. Alors on a $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset B_k$. Cette inclusion est également vraie si $B_k = X_k$.

Ainsi par tout point $f_{[k]}(t_0)$ il y a un germe de courbe dans la fibre $\Phi_k^{-1}(\Phi_k(f_{[k]}(t_0)), t \to u(t) = (z(t), j_k) \in X_k \subset Z \times R_{n,k}$ avec $u(0) = f_{[k]}(t_0) = (z_0, j_k)$ et $z_0 = f(t_0)$. Alors $(z(t), j_k)$ est l'image de $f_{[k]}(t_0)$ par le relevé d'ordre k de la translation $\tau_s : z \to z + s$ définie par $s = z(t) - z_0$. On a $f(\mathbb{C}) \nsubseteq X^{\text{sing}}$ puisque X est l'adhérence de Zariski de $f(\mathbb{C})$, on choisit donc t_0 tel que $f(t_0) \in X^{reg}$ soit un point régulier. On définit

$$A_k(f) = \{s \in Z : f_{[k]}(t_0) \in P_k(X) \cap P_k(\tau_{-s}(X)).$$

$A_k(f)$ est un sous-ensemble analytique de Z contenant la courbe $t \to s(t) = z(t) - z_0$ passant par 0. Puisque $A_1(f) \supset A_2(f) \supset ... \supset A_k(f) \supset ...$, par Noetherianité la suite devient stationnaire à partir d'un certain rang. Ainsi, il y a une courbe $D(0, r) \to Z, t \to s(t)$ tel que le jet infini j_∞ défini par f en t_0 soit invariant par translation par $s(t)$ pour tout t. Par unicité du prolongement analytique, on conclut que $s(t') + f(t) \in X$ pour tout $t \in \mathbb{C}$ et tout $t' \in D(0, r)$. X étant l'adhérence de Zariski de $f(\mathbb{C})$ et irréductible, on a $s(t') + X = X$. On définit alors

$$W = \{s \in Z; s + X = X\}.$$

W est alors un sous groupe de Z de dimension strictement positive. Soit $p : Z \to Z/W$ l'application quotient. Comme Z/W est un tore de dimension $\dim Z/W < \dim Z$, on conclut par récurrence sur la dimension que la courbe $\widehat{f} = p \circ f : \mathbb{C} \to Z/W$ a son adhérence de Zariski $\widehat{X} = \overline{\widehat{f}(\mathbb{C})}^{Zar} = p(X)$ égal à un translaté $\widehat{s} + \widehat{T}$ d'un sous-tore $\widehat{T} \subset Z/W$. On a alors $X = s + p^{-1}(\widehat{T})$ où $p^{-1}(\widehat{T})$ est un sous-groupe fermé de Z. □

Corollaire 5.17 *Soit X une sous-variété analytique d'un tore complexe Z. Alors X est hyperbolique si et seulement si X ne contient pas de translaté d'un sous-tore.*

Corollaire 5.18 *Soit X une sous-variété analytique d'un tore complexe Z. Si X n'est pas le translaté d'un sous-tore alors toute courbe entière dans X est analytiquement dégénérée.*

Théorème 5.19 *(de Bloch). Soit X une variété complexe compacte Kähler telle que l'irrégularité $q = h^0(X, \Omega^1_X)$ est plus grande que la dimension n de X. Alors toute courbe entière dans X est analytiquement dégénérée.*

Démonstration. Quitte à éclater, on peut supposer X lisse. Alors l'application d'albanese $\alpha : X \to Alb(X)$ envoie X sur une sous-variété propre $Y \subset Alb(X)$ (car $\dim(Y) \leq \dim(X) < \dim Alb(X)$) et Y n'est pas le translaté d'un sous-tore par la propriété universelle de l'application d'Albanese. Alors pour toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ on obtient que $\alpha \circ f : \mathbb{C} \to Y$ est analytiquement dégénérée et donc f elle-même est analytiquement dégénérée. $\square$

6 Le cas des surfaces

La conjecture de Kobayashi prédit :

Conjecture 6.1 *Une surface $X \subset \mathbb{P}^3$ générique de degré $d \geq 5$ est hyperbolique.*

6.1 Construction de surfaces hyperboliques

Le degré le plus petit pour lequel on connaît l'existence d'une surface hyperbolique est 6. C'est un exemple de J. Duval [13].

Nous présentons ici un exemple de degré 8 dû indépendemment à J. Duval et H. Fujimoto.

Considérons la surface $X \subset \mathbb{P}^3$ d'équation

$$P(z_0, z_1, z_2)^2 - Q(z_2, z_3) = 0$$

où P et Q sont des polynômes généraux de degrés respectifs $d \geq 4$ et $2d$. Elle est lisse en dehors de l'ensemble fini $S = \{(z_0, z_1, 0, 0) \in \mathbb{P}^3 / \ P(z_0, z_1, 0) = 0\}$ qui est aussi le lieu d'indétermination de la projection

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ (z_0, z_1, z_2, z_3) & \to & (z_2, z_3). \end{array}$$

Si $\widetilde{X}$ est une désingularisation minimale on obtient une application holomorphe $\widetilde{X} \to \mathbb{P}^1$ qui se factorise en $\widetilde{X} \xrightarrow{u} C \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1$ où C est la courbe hyperelliptique d'équation inhomogène $t^2 = Q(1, z_3)$, l'application u est donnée en coordonnées inhomogènes par

$$u(z_0, z_1, 1, z_3) = (P(z_0, z_1, 1), z_3)$$

et p est le revêtement double $(t, z_3) \to z_3$. Toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ se relève en $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to \widetilde{X}$. Puisque C a pour genre $d - 1 \geq 3$, l'image de $\widetilde{f}$ est contenue dans une fibre $u^{-1}(t, z_3)$ qui est isomorphe à la courbe plane $P(z_0, z_1, 1) = t$. C'est une courbe plane de degré d avec au plus un point singulier qui est un noeud. Son genre est donc supérieur à 2 et $\widetilde{f}$ est constante. La surface de degré $2d$ est donc hyperbolique comme toute petite déformation de X. On obtient donc des exemples de surfaces hyperboliques de tout degré pair $d \geq 8$.

6.2 Le cas générique (d'après Mc Quillan-Demailly-El Goul-Siu-Paun)

Décrivons la méthode, présente dans [10], pour obtenir l'existence de suffisamment de jets de différentielles dans le cas de la dimension 2.

Dans le cas des surfaces lisses de type général on obtient par Riemann-Roch [20] :

$$\chi(X, S^m T_X^* \otimes \mathcal{O}(-A)) = \frac{m^3}{6}(c_1^2 - c_2) + O(m^2),$$

puis par le théorème d'annulation de Bogomolov $h^2(X, S^m T_X^* \otimes \mathcal{O}(-A)) = 0$ pour m suffisamment grand donc :

$$h^0(X, S^m T_X^* \otimes \mathcal{O}(-A)) \geq \frac{m^3}{6}(c_1^2 - c_2) + O(m^2).$$

Il en résulte que pour $c_1^2 - c_2 > 0$, $\mathcal{O}_{X_1}(1)$ est big et donc

$$B_1 := \bigcap_{m>0} Bs(\mathcal{O}_{X_1}(m) \otimes O(-A))$$

est un sous-ensemble algébrique propre de X_1. Malheureusement pour les surfaces de $\mathbb{P}^3$ les techniques d'ordre 1 sont insuffisantes car

$$c_1^2 = d(d-4) < c_2 = d(d^2 - 4d + 6).$$

Pour obtenir de meilleures estimations la stratégie est d'étudier les jets de plus grand ordre. Malheureusement, il est difficile de trouver une décomposition simple des fibrés $E_{k,m}T_X^*$ pour pouvoir calculer leur caractéristique d'Euler. Cependant, pour $k = 2$ et sur une surface on a la filtration simple :

$$Gr^{\bullet}E_{2,m}T_X^* = \bigoplus_{0 \leq j \leq \frac{m}{3}} S^{m-3j}T_X^* \otimes K_X^j.$$

Ceci donne

$$\chi(X, E_{2,m}T_X^*) = \frac{m^4}{648}(13c_1^2 - 9c_2) + O(m^3).$$

En utilisant à nouveau le théorème d'annulation de Bogomolov on obtient :

$$h^0(X, E_{2,m}T_X^* \otimes \mathcal{O}(-A)) \geq \frac{m^4}{648}(13c_1^2 - 9c_2) + O(m^3).$$

Par conséquent $O_{X_2}(1)$ est big et $O_{X_2}(-1)$ admet une métrique singulière non triviale à courbure négative sur X_2 dès que $13c_1^2 - 9c_2 > 0$. Pour les surfaces X de $\mathbb{P}^3$ de degré $d \geq 15$, on obtient alors des opérateurs différentiels globaux d'ordre 3 s'annulant sur un diviseur ample. Alors par le théorème 5.12, toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ vérifie $f_{[2]}(\mathbb{C}) \subset Z \subsetneq X_2$. Tout le problème maintenant consiste à montrer que $f : \mathbb{C} \to X$ vérifie suffisamment d'équations différentielles algébriquement indépendantes.

6.2.1 La stratégie de Demailly-El Goul

La stratégie de Demailly-El Goul est alors de trouver des conditions numériques pour que le fibré $O_{X_2}(1)$ en restriction à une composante irréductible quelconque Z de B_2 qui se projette sur X_1 soit à nouveau big. Ces conditions sont vérifiées pour une surface très générique de degré $d \geq 21$. Alors par une nouvelle application du théorème 5.12, on aura $f_{[2]}(\mathbb{C}) \subset Z_1 \subsetneq Z \subsetneq X_2$. Et par un argument de dimension, on obtient que $f_{[1]} : \mathbb{C} \to X_1$ est algébriquement dégénérée. Un théorème très élaboré de McQuillan [26] est alors invoqué :

Théorème 6.2 *Soit $f : \mathbb{C} \to X$ une feuille d'un multi-feuilletage algébrique sur une surface de type général. Alors $f : \mathbb{C} \to X$ est algébriquement dégénérée.*

Par application de ce théorème, puisque $f_{[1]}(\mathbb{C})$ est dans une feuille d'un feuilletage algébrique d'une surface $Z \subsetneq X_1$, on obtient que $f : \mathbb{C} \to X$ est algébriquement dégénérée pour $X \subset \mathbb{P}^3$ très générique de degré $d \geq 21$. Mais pour de telles surfaces Xu [43] a montré qu'elles ne contenaient pas de courbes elliptiques ou rationnelles. Elles sont donc hyperboliques.

Remarque 6.3 *Comme le remarque J.P. Demailly dans [10], l'une des motivations principales pour l'étude des jets de différentielles $E_{k,m}T_X^*$ dans les questions d'hyperbolicité est la propriété de positivité du fibré gradué $Gr^\bullet E_{k,m}T_X^*$ par opposition au cas des jets de Green-Griffiths. Par exemple, on voit facilement que dans le cas d'une surface $X \subset \mathbb{P}^3$ de degré d, $S^m T_X^*$ est la seule partie de $Gr^\bullet E_{2,m}T_X^*$ qui n'est pas ample lorsque d est suffisamment grand à m fixé.*

6.2.2 Une nouvelle méthode (d'après Siu-Paun)

Les techniques décrites ici ont l'avantage de donner une méthode pour montrer l'hyperbolicité sans faire appel au résultat de Mc Quillan (mais avec une borne sur le degré moins bonne) très utile si l'on s'intéresse à la dimension supérieure et si l'on fait quand même appel à ce résultat, d'améliorer le degré minimal (qui devient $d \geq 18$). L'idée est de généraliser les techniques décrites dans le paragraphe 3.3 (cf. Proposition 3.11) aux espaces de jets.

Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle de $\mathbb{P}^3$ de degré d, et $J_2(\mathcal{X})$ la variété des 2-jets de $\mathcal{X}$. On considère alors la sous-variété des jets verticaux $J_2^v(\mathcal{X}) \subset J_2(\mathcal{X})$ i.e des jets tangents aux fibres de la projection $\pi_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^{N_d}$. On définit l'ensemble algébrique affine $\Sigma_0 := \{(z, a, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \in J_2^v(\mathcal{X}) / \xi^{(1)} \wedge \xi^{(2)} = 0\}$. Remarquons que si le 2-jet d'un germe de courbe holomorphe $u : (\mathbb{C}, 0) \to \mathcal{X}$ est dans Σ_0 alors l'image de u est contenue dans une section hyperplane de $\mathcal{X}$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 6.4 *Le fibré vectoriel $T_{J_2^v(\mathcal{X})} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(7) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(*)$ est engendré par ses sections globales sur $J_2^v(\mathcal{X}) \backslash \Sigma$ où Σ est l'adhérence de Σ_0 dans $J_2^v(\mathcal{X})$.*

La démonstration consiste, comme dans la proposition précédente, à construire explicitement les champs de vecteurs méromorphes cette fois-ci sur les espaces de jets.

L'hypersurface $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^{N_d}$ est donnée par l'équation

$$\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha Z^\alpha = 0, \text{ where } [a] \in \mathbb{P}^{N_d} \text{ and } [Z] \in \mathbb{P}^3.$$

On se donne des coordonnées globales sur $\mathbb{C}^4$ et $\mathbb{C}^{N_d+1}$ et on considère l'ouvert $\Omega_0 := (Z_0 \neq 0) \times (a_{0d00} \neq 0) \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^{N_d}$. En coordonnées inhomogènes sur Ω_0 l'équation de $\mathcal{X}$ est

$$\mathcal{X}_0 := (z_1^d + \sum_{|\alpha| \leq d,\ \alpha_1 < d} a_\alpha z^\alpha = 0).$$

Alors l'équation de $J_2^v(\mathcal{X}_0)$ dans $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^{N_d} \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ est

$$\sum_{|\alpha|\leq d,\ a_{d00}=1} a_\alpha z^\alpha = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{|\alpha|\leq d,\ a_{d00}=1} a_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial z_j} \xi_j^{(1)} = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{|\alpha|\leq d,\ a_{d00}=1} a_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial z_j} \xi_j^{(2)} + \sum_{j,k=1}^{3} \sum_{|\alpha|\leq d,\ a_{d00}=1} a_\alpha \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial z_j \partial z_k} \xi_j^{(1)} \xi_k^{(1)} = 0 \tag{3}$$

On considère un champ de vecteurs

$$V = \sum_{|\alpha|\leq d,\ \alpha_1<d} v_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\alpha} + \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j,k} w_{j,k} \frac{\partial}{\partial \xi_j^{(k)}}$$

sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^{N_d} \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$. Alors les conditions pour que V soit tangent à $J_2^v(\mathcal{X}_0)$ sont

$$\sum_{|\alpha|\leq d,\ \alpha_1<d} v_\alpha z^\alpha + \sum_{j=1}^{3} \sum_{|\alpha|\leq d,\ a_{d00}=1} a_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial z_j} v_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{|\alpha|\leq d,\ \alpha_1<d} v_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial z_j} \xi_j^{(1)} + \sum_{j,k=1}^{3} \sum_{|\alpha|\leq d,\ a_{d00}=1} a_\alpha \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial z_j \partial z_k} v_j \xi_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{3} \sum_{|\alpha|\leq d,\ a_{d00}=1} a_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial z_j} w_j^{(1)} = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha|\leq d,\ \alpha_1<d} \Big(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial z^\alpha}{\partial z_j} \xi_j^{(2)} + \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial z_j \partial z_k} \xi_j^{(1)} \xi_k^{(1)}\Big) v_\alpha \\ & + \sum_{j=1}^{3} \sum_{|\alpha|\leq d,\ a_{d00}=1} a_\alpha \Big(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial z_j \partial z_k} \xi_k^{(2)} + \sum_{k,l=1}^{3} \frac{\partial^3 z^\alpha}{\partial z_j \partial z_k \partial z_l} \xi_k^{(1)} \xi_l^{(1)}\Big) v_j \\ & + \sum_{|\alpha|\leq d,\ a_{d00}=1} \Big(\sum_{j,k=1}^{3} a_\alpha \frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial z_j \partial z_k} (w_j^{(1)} \xi_k^{(1)} + w_k^{(1)} \xi_j^{(1)}) + \sum_{j=1}^{3} a_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial z_j} w_j^{(2)}\Big) \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

Le premier ensemble de champs de vecteurs tangents à $J_2^v(\mathcal{X}_0)$ que l'on peut construire sont les suivants. On note $\delta_j \in \mathbb{N}^3$ le multi-indice dont la j-ème composante est 1 et les autres 0.

Pour $\alpha_1 \geq 3$:

$$V_\alpha^{300} := \frac{\partial}{\partial a_\alpha} - 3z_1 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-\delta_1}} + 3z_1^2 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-2\delta_1}} - z_1^3 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-3\delta_1}}.$$

For $\alpha_1 \geq 2, \alpha_2 \geq 1$:

$$\begin{aligned} V_\alpha^{210} \quad : &= \frac{\partial}{\partial a_\alpha} - 2z_1 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-\delta_1}} - z_2 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-\delta_2}} + \\ &+ z_1^2 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-2\delta_1}} + 2z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-\delta_1-\delta_2}} - z_1^2 z_2 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-2\delta_1-\delta_2}}. \end{aligned}$$

For $\alpha_1 \geq 1, \alpha_2 \geq 1, \alpha_3 \geq 1$:

$$\begin{aligned} V_\alpha^{111} \quad : &= \frac{\partial}{\partial a_\alpha} - z_1 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-\delta_1}} - z_2 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-\delta_2}} - z_3 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-\delta_3}} \\ &+ z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-\delta_1-\delta_2}} + z_1 z_3 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-\delta_1-\delta_3}} \\ &+ z_2 z_3 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-\delta_2-\delta_3}} - z_1 z_2 z_3 \frac{\partial}{\partial a_{\alpha-\delta_1-\delta_2-\delta_3}}. \end{aligned}$$

On obtient des champs de vecteurs similaires en permutant les z_i et en changeant les indices α comme indiqué par la permutation. L'ordre des pôles est égal à 3.

Une autre famille de champs de vecteurs est donnée par le lemme suivant. Considérons une matrice complexe 3×3, $A = (A_j^k) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ and let $\widetilde{V} := \sum_{j,k} w_j^{(k)} \frac{\partial}{\partial \xi_j^{(k)}}$, where $w^{(k)} := A\xi^{(k)}$, for $k = 1, 2$.

Lemme 6.5 *Il existe des polynômes* $v_\alpha(z, a) := \sum_{|\beta| \leq 3} v_\beta^\alpha(a) z^\beta$ *où chaque coefficient* v_β^α *a pour degré au plus 1 en les* (a_γ) *tel que*

$$V := \sum_\alpha v_\alpha(z, a) \frac{\partial}{\partial a_\alpha} + \widetilde{V}$$

est tangent à $J_2^v(\mathcal{X}_0)$ *en tout point.*

La démonstration se réduit à de l'algèbre linéaire en écrivant les équations de l'espace tangent à $J_2^v(\mathcal{X}_0)$.

Finalement pour engendrer toutes les directions il ne reste plus qu'à considérer $V = \sum_{|\alpha| \leq 2} v_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\alpha}$ et les conditions pour que V soit tangent à $J_2^v(\mathcal{X}_0)$:

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} v_\alpha z^\alpha = 0$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{|\alpha|\leq d,\ \alpha_1<d} v_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial z_j}\xi_j^{(1)} = 0$$

$$\sum_{|\alpha|\leq 2}(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial z^\alpha}{\partial z_j}\xi_j^{(2)} + \sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial z_j \partial z_k}\xi_j^{(1)}\xi_k^{(1)})v_\alpha = 0$$

En notant $W_{jk} := \xi_j^{(1)}\xi_k^{(2)} - \xi_k^{(1)}\xi_j^{(2)}$ l'opérateur Wronskien. Puisqu'on cherche l'engendrement global en dehors de Σ, on peut supposer $W_{12} \neq 0$. Alors on résout le système précédent avec pour inconnues $v_{000}, v_{100}, v_{010}$. Par la règle de Cramer, on voit que chacune des trois quantités précédentes est une combinaison linéaire des $v_\alpha, |\alpha| \leq 2, \alpha \neq (000), (100), (010)$ avec pour coefficients des fonctions rationnelles en $z, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}$. Le calcul donne un ordre au maximum égal à 7 pour les pôles.

Pour obtenir, l'hyperbolicité des surfaces génériques de $\mathbb{P}^3$, il reste à utiliser ce résultat pour construire suffisamment d'équations différentielles vérifiées par une courbe entière non-constante dans une telle surface. L'idée est que l'on peut considérer un opérateur différentiel de Green-Griffiths comme une fonction holomorphe sur l'espace des jets. Pour obtenir un nouvel opérateur différentiel il nous suffit alors de différentier cette fonction holomorphe par les champs de vecteurs que nous venons de construire.

Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle de $\mathbb{P}^3$ de degré d. On a vu que pour un degré $d \geq 15$, on pouvait construire des opérateurs différentiels invariants globaux i.e des sections globales de $E_{2,m}T^*_{\mathcal{X}_a} \otimes K^{-t}_{\mathcal{X}_a}$. Par semi-continuité, on obtient l'existence d'un ouvert de Zariski $U_d \subset \mathbb{P}^{N_d}$, tel que pour tout $a \in U_d$, il existe un diviseur irréductible et réduit $\mathcal{Y}_a = (P_a = 0) \subset (\mathcal{X}_a)_2$ où

$$P_a \in H^0((\mathcal{X}_a)_2, \mathcal{O}_{(\mathcal{X}_a)_2}(m_1, m_2) \otimes K^{-t}_{\mathcal{X}_a})$$

tel que la famille des sections (P_a) varie de manière holomorphe avec a. On peut alors voir la famille de sections (P_a) comme une fonction holomorphe $\mathcal{P} : J_2^v(\mathcal{X})_{U_d} \to \mathbb{C}$ qui est polynômiale de degré $m = m_1 + m_2$ sur chaque fibre de $\pi : J_2^v(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$. En prenant la différentielle de cette fonction avec un des champs de vecteurs construits plus haut on obtient une section de $\mathcal{O}_{(\mathcal{X}_a)_2}(m_1, m_2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(7 - t(d-4))$. Ainsi, par la propriété d'engendrement global précédente, on peut construire, en dehors de Σ et du lieu au-dessus des points où tous les coefficients de $\mathcal{P}$, vue comme fonction de $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$, sont nuls, un opérateur différentiel non-nul. Pour conclure à la dégénérescence algébrique de toute courbe entière il reste à contrôler l'ordre des pôles pour garantir que le nouvel opérateur différentiel s'annule bien sur un diviseur ample.

Cela est garanti par le lemme suivant :

Lemme 6.6 *Soit X une surface projective de type général. Alors*

$$h^0(X, E_{2,m}T_X^* \otimes K_X^{-\delta m}) \geq \varepsilon m^4((18\delta^2 - 10\delta + 13/3)c_1^2 - 3c_2) + O(m^3)$$

où $\varepsilon > 0$ si $0 < \delta < 1/3$.

Puisqu'on différentie moins de m fois, la condition $\delta(d-4) > 7$ est suffisante pour conclure. Cette condition ajoutée à celle de la positivité du coefficient dominant du lemme précédent donne l'hyperbolicité pour un degré suffisamment grand. cependant cette borne est nettement plus grande que celle obtenue par Demailly-El Goul, 21.

Pour obtenir une meilleure borne, utilisons le résultat de McQuillan et la condition numérique obtenue par Demailly-El Goul. On obtient alors une borne inférieure sur l'ordre d'annulation de l'opérateur différentiel.

Proposition 6.7 *[12] Pour $m(13c_1^2 - 9c_2) > 12tc_1^2$, il existe un diviseur $Y_1 \subset X_1$ tel que $im(f_{[1]}) \subset Y_1$.*

Par McQuillan il nous suffit de montrer que pour $f : \mathbb{C} \to X$, $f_{[1]} : \mathbb{C} \to X_1$ est algébriquement dégénérée. Supposons le contraire et donc $f_{[1]} : \mathbb{C} \to X_1$ Zariski dense. Alors par la proposition précédente l'ordre d'annulation de l'opérateur différentiel vérifie

$$t \geq m\frac{13c_1^2 - 9c_2}{12c_1^2}.$$

Par le même raisonnement que précédemment, on obtient la dégénérescence algébrique si

$$m\frac{13c_1^2 - 9c_2}{12c_1^2}(d-4) > 7.$$

Une analyse un peu plus fine montre que $m \geq 6$, ce qui donne $d \geq 18$.

7 Le cas de la dimension 3

Nous présentons ici l'approche développée dans [32], [33], [34] et [35] vers la conjecture de Kobayashi en dimension 3.

7.1 Etude algébrique

On définit : $A_k = \underset{m}{\oplus}(E_{k,m}T^*_X)_x$ l'algèbre des opérateurs différentiels en un point $x \in X$.

Soit $G^{'}_k$ le groupe des reparamétrisations $\phi(t) = t+b_2t^2+...+b_kt^k+O(t^{k+1})$ tangentes à l'identité. $G^{'}_k$ agit sur $(f', f'', ..., f^{(k)})$ par action unipotente. Par exemple pour $k = 3$, on a l'action :

$$(f \circ \phi)' = f'; (f \circ \phi)'' = f'' + 2b_2f'; (f \circ \phi)''' = f''' + 6b_2f'' + 6b_3f'$$

Donc une représentation :

$$G^{'}_3 \hookrightarrow U(3) : \phi \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2 & 1 & 0 \\ 6b_3 & 6b_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer A_k revient donc à déterminer $(\mathbb{C}[(f'), (f''), ..., (f^{(k)})])^{G^{'}_k}$.

En dimension 2, on a $G^{'}_2 = U(2)$. Les invariants par le groupe unipotent sont bien connus (cf.[31]). Ainsi :

$$\begin{aligned} (i)\ A_1 &= \mathbb{C}[f'_1, f'_2], \\ (ii)\ A_2 &= \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}] \text{ où } w_{12} = f'_1f''_2 - f''_1f'_2. \end{aligned}$$

On a la propriété suivante :

Proposition 7.1

$$A_n = A_n[f_1'^{-1}] \cap A_n[f_2'^{-1}]$$

Démonstration. Il suffit de prouver $A_n[f_1'^{-1}] \cap A_n[f_2'^{-1}] \subset A_n$. Soit $F \in A_n[f_1'^{-1}] \cap A_n[f_2'^{-1}]$: $F = \frac{P}{(f'_1)^l} = \frac{Q}{(f'_2)^m}$. Ainsi : $(f'_2)^mP = (f'_1)^lQ$ et $(f'_1)^l$ divise P, donc $F \in \mathbb{C}[f', f'', f''']$. De plus F est invariant par reparamétrisation donc $F \in A_n$. $\square$

Nous étudions maintenant la dimension 3 :

$G^{'}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2 & 1 & 0 \\ 6b_3 & 6b_2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset U(3)$.

Faisons le lien avec la théorie classique des invariants.

$G^{'}_3$ agit sur $\begin{pmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 \end{pmatrix}$ par multiplication à gauche.

Considérons l'action de GL_3 :

$$A \in GL_3, A. \begin{pmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{pmatrix} A^{-1}.$$

Cette action induit une action sur les polynômes $P(f', f'', f''')$ qui commute avec celle de $G_3^{'}$. Ainsi on a une action de GL_3 qui laisse A_3 invariant.
Nous cherchons à déterminer les invariants par $G_3^{'}$ du système de vecteurs (x_1, x_2, x_3) où $x_i = \begin{pmatrix} f_i' \\ f_i'' \\ f_i''' \end{pmatrix}$.

La théorie des invariants fournit le cadre suivant à notre situation.

Définition 7.2 *(cf. [30]) Soit F une forme multi-linéaire en les variables $u_1, ..., u_l$ où les u_i sont des vecteurs d'un espace vectoriel V. Soient $x_1, ..., x_m$ m vecteurs de V. On définit $S^{x_1,\dots,x_m}(F)$, l'espace vectoriel engendré par tous les polynômes obtenus en substituant les variables $x_1, ..., x_m$ aux variables $u_1, ..., u_l$ en permettant les répétitions. Cet espace est clairement invariant sous l'action de Gl_m.*

Soit G un groupe linéaire arbitraire agissant sur un espace vectoriel de dimension n. On considère le problème de trouver les $G-$invariants d'un système de vecteurs de V, i.e les polynômes invariants sous l'action de G dans la somme directe de plusieurs copies de V. Il est clair que l'algèbre de tous les $G-$invariants d'un système de vecteurs est linéairement engendré par les invariants qui sont homogènes en chaque variable. Si f est un tel invariant, sa polarisation complète en est un aussi. Ainsi si l'on est capable de trouver tous les invariants multi-linéaires, alors on obtient tous les invariants homogènes en y substituant de nouvelles variables (en permettant les répétitions).

Définition 7.3 *(cf.[30]) Un ensemble $\{F_\alpha\}$ de formes multi-linéaires G-invariantes est appelé système complet de G-invariants d'un système de m vecteurs si les espaces de polynômes $S^{x_1,\dots,x_m}(F)$ associés aux formes F_α engendrent l'algèbre de tous les G-invariants du système de vecteurs $x_1, ..., x_m$.*

Théorème 7.4 *([30]) Soit V un espace vectoriel de dimension n.*
1) Tout système complet de G-invariants d'un système de n vecteurs est aussi un système complet pour tout nombre de vecteurs.
2) Si $G \subset SL(V)$ alors tout système complet de G-invariants d'un système de $n-1$ vecteurs auquel on ajoute la forme "det" est un système complet de G-invariants pour tout nombre de vecteurs.

On a bien $G_3^{'} \subset SL_3$. Il nous suffit donc de connaitre un système complet de $G_3^{'}$-invariants pour deux vecteurs i.e en dimension 2. Cela nous est donné par le théorème annoncé par J.P. Demailly dont nous donnons ici une démonstration :

Théorème 7.5 *(Demailly) En dimension 2 :*

$$A_3 = \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^1, w_{12}^2][w_{12}]$$

où $w_{12}^i = (f_i')^4 d(\frac{w_{12}}{(f_i')^3}) = f_i'(f_1'f_2''' - f_1'''f_2') - 3f_i^{''}(f_1'f_2'' - f_1''f_2')$
et $(\mathcal{R}) : 3(w_{12})^2 = f_2'w_{12}^1 - f_1'w_{12}^2$.

La démonstration nécessite deux lemmes :

Lemme 7.6 w_{12} *est quadratique sur* $\mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1]$.

Démonstration. Par $(\mathcal{R})$, w_{12} est algébrique sur $\mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1]$ de degré 2 ou 1.
Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q tels que :

$$P(f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1)w_{12} = Q(f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1).$$

Par $(\mathcal{R})$ on remplace w_{12}^2 par $\frac{f_2'w_{12}^1 - 3(w_{12})^2}{f_1'}$ dans P et Q.
Ainsi on obtient une égalité, après multiplication par $(f_1')^m$ avec m suffisamment grand, entre deux polynômes en les variables $\{f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^1\}$ qui sont algébriquement libres. Mais l'un des polynômes a toutes ses puissances en w_{12} impaires et l'autre, paires ; ce qui implique $P = Q = 0$.
Ainsi le degré de w_{12} est 2. □

Lemme 7.7 $\{f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1\}$ *sont algébriquement libres.*

Démonstration. w_{12} est algébrique sur $\mathbb{C}(f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1)$ donc

$$\begin{aligned}\deg .tr(\mathbb{C}(f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1)) &= \deg .tr.(\mathbb{C}(f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1, w_{12})) \\ &\geq \deg .tr(\mathbb{C}(f_1', f_2', w_{12}, w_{12}^1)) = 4.\end{aligned}$$

□

On peut maintenant passer à la démonstration du théorème 7.5 :

Démonstration. D'après la proposition 7.1 on est ramené à déterminer $A_3[f_1'^{-1}] \cap A_3[f_2'^{-1}]$. On considère la reparamétrisation $\phi = f_1^{-1}$ sur la carte

$(f'_1 \neq 0)$. Soit $P \in A_3$. Donc $P(f \circ \phi) = (\phi')^m P(f) \circ \phi$. Remarquons maintenant par le calcul :

$$\begin{aligned}
(f_2 \circ f_1^{-1})' &= \frac{f'_2}{f'_1} \circ f_1^{-1}, \\
(f_2 \circ f_1^{-1})'' &= \frac{w_{12}}{(f'_1)^3} \circ f_1^{-1}, \\
(f_2 \circ f_1^{-1})''' &= \frac{w^1_{12}}{(f'_1)^5} \circ f_1^{-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi $P \in \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w^1_{12}][f_1'^{-1}]$ et donc $A_3[f_1'^{-1}] = \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w^1_{12}][f_1'^{-1}]$.
Par symétrie : $A_3[f_2'^{-1}] = \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w^2_{12}][f_2'^{-1}]$.
L'inclusion

$$\mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w^1_{12}, w^2_{12}] \subset \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w^1_{12}][f_1'^{-1}] \cap \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w^2_{12}][f_2'^{-1}]$$

est immédiate puisque par $(\mathcal{R})$:

$$w^2_{12} \in \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w^1_{12}][f_1'^{-1}] \text{ et } w^1_{12} \in \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w^2_{12}][f_2'^{-1}].$$

Il reste donc à montrer

$$\mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w^1_{12}][f_1'^{-1}] \cap \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w^2_{12}][f_2'^{-1}] \subset \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w^1_{12}, w^2_{12}].$$

Soit $F \in \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w^1_{12}][f_1'^{-1}] \cap \mathbb{C}[f'_1, f'_2, w_{12}, w^2_{12}][f_2'^{-1}]$:

$$F = \frac{P(f'_1; f'_2; w_{12}; w^1_{12})}{(f'_1)^l} = \frac{Q(f'_1; f'_2; w_{12}; w^2_{12})}{(f'_2)^m}$$

Par $(\mathcal{R})$:

$$\begin{aligned}
P(f'_1; f'_2; w_{12}; w^1_{12}) &= P_1(f'_1; f'_2; w^1_{12}; w^2_{12})w_{12} + P_2(f'_1; f'_2; w^1_{12}; w^2_{12}), \\
Q(f'_1; f'_2; w_{12}; w^2_{12}) &= Q_1(f'_1; f'_2; w^1_{12}; w^2_{12})w_{12} + Q_2(f'_1; f'_2; w^1_{12}; w^2_{12})
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&((f'_2)^m P_1(f'_1; f'_2; w^1_{12}; w^2_{12}) - (f'_1)^l Q_1(f'_1; f'_2; w^1_{12}; w^2_{12}))w_{12} \\
&\quad +((f'_2)^m P_2(f'_1; f'_2; w^1_{12}; w^2_{12}) - (f'_1)^l Q_2(f'_1; f'_2; w^1_{12}; w^2_{12})) = 0.
\end{aligned}$$

Or w_{12} est quadratique sur $\mathbb{C}[f'_1, f'_2, w^2_{12}, w^1_{12}]$ donc :

$$(f'_2)^m P_i(f'_1; f'_2; w^1_{12}; w^2_{12}) - (f'_1)^l Q_i(f'_1; f'_2; w^1_{12}; w^2_{12}) = 0, \ i = 1, 2.$$

$\{f'_1, f'_2, w^2_{12}, w^1_{12}\}$ sont algébriquement libres donc :

$$P_i(f'_1; f'_2; w^1_{12}; w^2_{12}) = (f'_1)^l R_i(f'_1; f'_2; w^1_{12}; w^2_{12}).$$

Et le résultat est prouvé. $\square$

On peut maintenant caractériser les opérateurs différentiels d'ordre 3 en dimension 3.

En notant $u_i = \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ u_i^3 \end{pmatrix}$ et en définissant :

$$\begin{aligned} F_1(u_1) &= u_1^1; \\ F_2(u_1, u_2) &= u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_2^1; \\ F_3(u_1, u_2, u_3) &= u_3^1(u_1^1 u_2^3 - u_1^3 u_2^1) - 3u_3^2(u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_2^1). \end{aligned}$$

on obtient que l'ensemble $\{F_1, F_2, F_3\}$ de formes multilinéaires $G_3^{'}$-invariantes est un système complet de $G_3^{'}$-invariants d'un système de 2 vecteurs.
Par application du théorème 7.4 de Popov, on obtient la preuve du théorème suivant et donc, la caractérisation algébrique de l'algèbre A_3 des germes d'opérateurs invariants en dimension 3 :

Théorème 7.8 *En dimension 3 :*

$$A_3 = \mathbb{C}[f_i', w_{ij}, w_{ij}^k, W],\ 1 \leq i < j \leq 3, 1 \leq k \leq 3$$

où $W = \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{vmatrix}$, $w_{ij} = f_i' f_j'' - f_i'' f_j'$,
$w_{ij}^k = (f_k')^4 d(\frac{w_{ij}}{(f_k')^3}) = f_k'(f_i' f_j''' - f_i''' f_j') - 3f_k''(f_i' f_j'' - f_i'' f_j')$.

De plus, $\deg.tr(\mathbb{C}(f_i', w_{ij}, w_{ij}^k, W)) = 7$

Démonstration. Il ne reste qu'à justifier l'assertion sur le degré de transcendance. Mais celle-ci est une conséquence immédiate du théorème 5.5 qui identifie $E_{k,m}T^*_{X,x}$ avec les sections de $O_{P_kV}(m)$ au-dessus de $(\pi_{0,k})^{-1}(x)$. $\square$

Remarque 7.9 *1) Pour tout k, $G_k^{'} \subset SL_k$, donc par le raisonnement précédent pour déterminer A_k en toute dimension il suffit de déterminer A_k en dimension $k-1$.*

2) On a montré que le groupe $G_3^{'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2 & 1 & 0 \\ 6b_3 & 6b_2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset U(3)$ *est un groupe de Grosshans de GL_3 i.e $\mathbb{C}[GL_3]^{G_3^{'}}$ est une algèbre de type fini. De* *plus, ce groupe n'est pas régulier i.e normalisé par un tore maximal car :*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2 & 1 & 0 \\ 6b_3 & 6b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b_2\lambda_1^{-1}\lambda_2 & 1 & 0 \\ 6b_3\lambda_1^{-1}\lambda_3 & 6b_2\lambda_2^{-1}\lambda_3 & 1 \end{pmatrix} \notin G_3^{'}.$$

On ne peut donc pas appliquer le résultat de L. Tan [38] sur la conjecture de Popov-Pommerening pour montrer que $G_3^{'}$ est un sous-groupe de Grosshans.
3) Sans l'utilisation du théorème de Popov, la détermination par un calcul "à la main" des générateurs de A_3 semble difficile.

7.2 Applications géométriques

Il s'agit d'étudier le fibré $E_{3,m}T_X^*$ en dimension 3 pour obtenir sa filtration en représentations irréductibles de Schur qui nous permettra, par un calcul de Riemann-Roch, de calculer sa caractéristique d'Euler. Rappelons que $E_{3,m}T_X^*$ est muni d'une filtration dont les termes gradués sont

$$Gr^\bullet E_{3,m}T_X^* = \left(\bigoplus_{l_1+2l_2+3l_3=m} S^{l_1}T_X^* \otimes S^{l_2}T_X^* \otimes S^{l_3}T_X^* \right)^{G_3'}.$$

D'après la théorie de la représentation, ces termes gradués se décomposent en représentations irréductibles de $Gl(T_X^*)$: les représentations de Schur. La caractérisation algébrique précédente va nous permettre de trouver les représentations irréductibles qui interviennent dans cette décomposition.
Pour cela, on a besoin de la filtration des 3-jets en dimension 2 :

Théorème 7.10 *En dimension 2 on a :*

$$Gr^\bullet E_{3,m}T_X^* = \bigoplus_{0\leq\gamma\leq\frac{m}{5}} \left(\bigoplus_{\{\lambda_1+2\lambda_2=m-\gamma;\ \lambda_1-\lambda_2\geq\gamma;\ \lambda_2\geq\gamma\}} \Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2)}T_X^* \right)$$

Démonstration. On sait que

$$A_3 = \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^1, w_{12}^2][w_{12}]$$

où $w_{12}^i = (f_i')^4 d(\frac{w_{12}}{(f_i')^3}) = f_i'(f_1'f_2''' - f_1'''f_2') - 3f_i''(f_1'f_2'' - f_1''f_2')$
et $3(w_{12})^2 = f_2'w_{12}^1 - f_1'w_{12}^2$.
$A_{3,m}$ est une représentation polynômiale de GL_2. La théorie de la représentation nous dit que $A_{3,m}$ est somme directe de représentations irréductibles qui sont déterminées par les vecteurs de plus haut poids.

Rappelons qu'un vecteur est vecteur de plus haut poids s'il est invariant sous l'action de $U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Ici :

$$V = \{(f_1')^\alpha (w_{12}^1)^\gamma (w_{12})^\beta \ / \ \alpha + 5\gamma + 3\beta = m\}$$

est clairement un ensemble de vecteurs de plus haut poids, de poids

$$(\alpha + \beta + 2\gamma, \beta + \gamma).$$

On en déduit que chaque représentation $\Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2)}$ vérifiant

$$\{\lambda_1 + 2\lambda_2 = m - \gamma; \lambda_1 - \lambda_2 \geq \gamma; \lambda_2 \geq \gamma\}$$

apparaît une et une seule fois dans les représentations déterminées par cet ensemble de vecteurs de plus haut poids. En effet, soit (λ_1, λ_2) un tel couple alors

$$\{\alpha = \lambda_1 - \lambda_2 - \gamma; \beta = \lambda_2 - \gamma\}$$

et (α, β, γ) sont déterminés de manière unique.
On a donc :

$$Gr^\bullet E_{3,m} T_X^* \supset \bigoplus_{0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}} \Big(\bigoplus_{\{\lambda_1 + 2\lambda_2 = m - \gamma; \ \lambda_1 - \lambda_2 \geq \gamma; \ \lambda_2 \geq \gamma\}} \Gamma^{(\lambda_1, \lambda_2)} T_X^* \Big).$$

Pour avoir l'égalité il suffit de montrer que l'ensemble V est l'ensemble de tous les vecteurs de plus haut poids, i.e :

$$V = (A_{3,m})^{U(2)}.$$

Soit $P \in (A_{3,m})^{U(2)}$: $P = P_1 + P_2.w_{12}$, avec $P_i \in \mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^1, w_{12}^2]$.
Soit $u \in U(2)$: $u.P = u.P_1 + (u.P_2).w_{12}$ car $u.w_{12} = w_{12}$.
Donc $u.P = P \Leftrightarrow u.P_i = P_i$ (car w_{12} est quadratique par le lemme 7.6).
Donc pour déterminer $(A_{3,m})^{U(2)}$, il nous suffit de déterminer $\mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^1, w_{12}^2]^{U(2)}$.
Soit : $u = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(2)$:
On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u.f_1' &= f_1'; \\ u.f_2' &= \lambda f_1' + f_2'; \\ u.w_{12}^1 &= w_{12}^1; \\ u.w_{12}^2 &= w_{12}^2 + \lambda w_{12}^1. \end{aligned}$$

Rappelons que $\{f_1', f_2', w_{12}^2, w_{12}^1\}$ sont algébriquement libres par le lemme 7.7, donc déterminer $\mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^1, w_{12}^2]^{U(2)}$ revient à déterminer les invariants du groupe unipotent $U(2)$ qui sont bien connus en théorie classique des invariants (cf.[31] p.87). Donc on a l'égalité :

$$\mathbb{C}[f_1', f_2', w_{12}^1, w_{12}^2]^{U(2)} = \mathbb{C}[f_1', w_{12}^1, f_2'w_{12}^1 - f_1'w_{12}^2] = \mathbb{C}[f_1', w_{12}^1, (w_{12})^2].$$

Finalement on obtient l'inclusion :

$$(A_{3,m})^{U(2)} \subset \mathbb{C}[f_1', w_{12}^1, w_{12}].$$

Par l'unicité de (α, β, γ) vue précédemment on obtient bien :

$$(A_{3,m})^{U(2)} = V.$$

□

On passe maintenant à la preuve du théorème :

Théorème 7.11 *Soit X une variété complexe de dimension 3, alors :*

$$Gr^\bullet E_{3,m}T_X^* = \bigoplus_{0\leq\gamma\leq\frac{m}{5}} \Big(\bigoplus_{\{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=m-\gamma;\ \lambda_i-\lambda_j\geq\gamma,\ i<j\}} \Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}T_X^* \Big)$$

où Γ est le foncteur de Schur.

Démonstration. On suit le même schéma que dans la preuve précédente. Soit

$$V = \{(f_1')^\alpha (w_{12}^1)^\gamma (w_{12})^\beta W^\delta \ / \ \alpha + 5\gamma + 3\beta + 6\delta = m\}.$$

V est un ensemble de vecteurs de plus haut poids de poids

$$(\alpha + \beta + 2\gamma + \delta; \beta + \gamma + \delta; \delta).$$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ vérifiant :

$$(\mathcal{P}) : \{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = m - \gamma, 0 \leq \gamma \leq \frac{m}{5}; \lambda_i - \lambda_j \geq \gamma, i < j\}.$$

Comme précédemment on obtient que chaque représentation $\Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}T_X^*$ où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ vérifie $(\mathcal{P})$ apparaît une et une seule fois dans les représentations déterminées par cet ensemble de vecteurs de plus haut poids. En effet, soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ vérifiant $(\mathcal{P})$.
Alors :

$$\{\alpha = \lambda_1 - \lambda_2 - \gamma;\ \beta = \lambda_2 - \lambda_3 - \gamma;\ \delta = \lambda_3\}$$

et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sont déterminés de manière unique.

Donc on a l'inclusion :

$$Gr^{\bullet}E_{3,m}T_X^* \supset \bigoplus_{0\leq\gamma\leq\frac{m}{5}}\Big(\bigoplus_{\{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=m-\gamma;\ \lambda_i-\lambda_j\geq\gamma,\ i<j\}}\Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}T_X^*\Big).$$

Pour avoir l'égalité il suffit à nouveau de montrer que V est l'ensemble de tous les vecteurs de plus haut poids de $A_{3,m}$ i.e : $V=(A_{3,m})^{U(2)}$.

L'idée importante ici est d'utiliser un argument qui apparait dans la preuve du théorème 7.4 de Popov [30] et permet de voir que le résultat obtenu pour la dimension 2 implique le résultat pour la dimension 3.
Si (x_1,x_2,x_3) est un système de vecteurs en position générale tel que

$$\det(x_1,x_2,x_3)=0$$

alors par l'action de $U(3)$ on se ramène au système $(x_1,x_2,0)$.
Soit $P\in(A_{3,m})^{U(3)}$, un vecteur de plus haut poids. Montrons que

$$P\in\mathbb{C}[f_1',w_{12}^1,w_{12},W]$$

par récurrence sur m. Pour $m=0$, c'est trivial.
Supposons maintenant $(A_{3,p})^{U(3)}\subset\mathbb{C}[f_1',w_{12}^1,w_{12},W]$ pour $p<m$. Montrons que le résultat est vrai pour m. Considérons P_1 la restriction de P à l'hypersurface $(W=0)$. Par l'invariance de P_1 sous l'action de $U(3)$ et la remarque précédente montrant que par $U(3)$ on transforme le système (x_1,x_2,x_3), en position générale, en le système $(x_1,x_2,0)$, on obtient que P_1 ne dépend que des deux premiers vecteurs i.e P_1 est un vecteur de plus haut poids de dinension 2, donc par le théorème 7.10 $P_1\in\mathbb{C}[f_1',w_{12}^1,w_{12}]$.
$P-P_1$ est un polynôme qui s'annule sur l'hypersurface $(W=0)$. Par le Nullstellensatz, on obtient que $(P-P_1)\in\sqrt{(W)}$ donc par l'irréductibilité de W on a :

$$P=P_1+W.P_2.$$

Il est clair que $P_2\in(A_{3,m-6})^{U(3)}$ donc par hypothèse de récurrence

$$P_2\in\mathbb{C}[f_1',w_{12}^1,w_{12},W]$$

et de même pour P.
On en déduit que $(A_{3,m})^{U(3)}\subset\mathbb{C}[f_1',w_{12}^1,w_{12},W]$.
Donc $V=(A_{3,m})^{U(3)}$ par l'unicité de $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$.
Le théorème est démontré. □

Un calcul de type Riemann-Roch fournit alors :

Proposition 7.12 *Soit X une hypersurface lisse de degré d de $\mathbb{P}^4$, alors*

$$\chi(X,E_{3,m}T_X^*)=\frac{m^9}{81648\times10^6}d(389d^3-20739d^2+185559d-358873)+O(m^8)$$

Corollaire 7.13 *Pour $d\geq43$, $\chi(X,E_{3,m}T_X^*)\sim\alpha(d)m^9$ avec $\alpha(d)>0$.*

7.3 Opérateurs différentiels

Pour montrer l'existence d'opérateurs différentiels globaux, on est ramené à un contrôle de la dimension des groupes de cohomologie des fibrés de jets. On se ramène au cas des fibrés en droites de la façon suivante.

Soit X une variété complexe lisse de dimension 3. Notons $Fl(T_X^*)$ la variété des drapeaux de T_X^* i.e des suites de sous-espaces vectoriels emboîtés

$$D = \{0 = E_3 \subset E_2 \subset E_1 \subset E_0 = T_{X,x}^*\}.$$

Soit $\pi : Fl(T_X^*) \to X$. C'est une fibration localement triviale dont la dimension relative est : $N = 1 + 2 = 3$.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ une partition telle que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Notons $\mathcal{L}^\lambda$ le fibré en droites sur $Fl(T_X^*)$ dont la fibre au-dessus du drapeau précédent est $\mathcal{L}_D^\lambda = \bigotimes_{i=1}^{3} \det(E_{i-1}/E_i)^{\otimes \lambda_i}$. D'après le théorème de Bott [2], si $m \geq 0$:

$$\begin{aligned} \pi_*(\mathcal{L}^\lambda)^{\otimes m} &= \Gamma^{m\lambda} T_X^*, \\ \mathcal{R}^q \pi_*(\mathcal{L}^\lambda)^{\otimes m} &= 0 \text{ si } q > 0. \end{aligned}$$

Les fibrés $\Gamma^{m\lambda} T_X^*$ et $(\mathcal{L}^\lambda)^{\otimes m}$ ont donc même cohomologie.

Nous allons montrer le théorème

Théorème 7.14 *Soit X une hypersurface lisse de degré d de $\mathbb{P}^4$, alors*

$$h^2(X, Gr^\bullet E_{3,m} T_X^*) \leq C d(d + 13) m^9 + O(m^8)$$

où C est une constante.

La preuve s'inspire de la démonstration algébrique [1] des inégalités de Morse de Demailly [11] qui stipulent :

Théorème 7.15 *Soit $L = F - G$ un fibré en droites sur une variété compacte Kähler X où F et G sont des fibrés en droites nef. Alors pour $0 \leq q \leq n = \dim X$*

$$h^q(X, L^{\otimes k}) \leq \frac{k^n}{(n-q)!q!} F^{n-q}.G^q + o(k^n).$$

Montrons tout d'abord la proposition

Proposition 7.16 *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ une partition telle que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ et $|\lambda| = \sum \lambda_i > 4(d - 5) + 18$. Alors :*

$$h^2(Fl(T_X^*), \mathcal{L}^\lambda) = h^2(X, \Gamma^\lambda T_X^*) \leq g(\lambda) d(d + 13) + q(\lambda)$$

où $g(\lambda) = \frac{3|\lambda|^3}{2} \prod_{\lambda_i > \lambda_j} (\lambda_i - \lambda_j)$ et de plus q est un polynôme en λ de composantes homogènes de plus haut degré 5.

Démonstration. On a

$$\mathcal{L}^\lambda = (\mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(3\,|\lambda|)) \otimes (\pi^*\mathcal{O}_X(3\,|\lambda|))^{-1} = F \otimes G^{-1},$$

avec $F = \mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(3\,|\lambda|)$, $G = \pi^*\mathcal{O}_X(3\,|\lambda|)$. $\mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(3\,|\lambda|)$ est positif. En effet, on a la propriété générale [9] que si E est un fibré vectoriel semi-positif i.e $E \geq 0$ alors le fibré en droites correspondant $\mathcal{L}(E)^\lambda$ est aussi semi-positif. Ici, $E = T_X^* \otimes \mathcal{O}_X(2)$ est semi-positif et

$$\mathcal{L}(E)^\lambda \simeq \mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(2\,|\lambda|) \geq 0,$$

donc

$$\mathcal{L}^\lambda \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(3\,|\lambda|) > 0.$$

Soit $Y = Fl(T_X^*)$. Tout d'abord montrons que $H^i(Y, F) = 0$ pour tout $i \geq 1$ et λ telle que $|\lambda| = \sum \lambda_i > 4(d-5) + 18$. Pour cela nous utilisons le théorème d'annulation de Kodaira qui stipule que pour tout fibré en droites A ample sur une variété projective Z complexe $H^i(Z, K_Z \otimes A) = 0$ pour $i > 0$. En effet, regardons à quelles conditions

$$F \otimes K_Y^{-1} > 0.$$

Rappelons [25] que

$$K_Y = \mathcal{L}^{-(5,3,1)} \otimes \pi^*(K_X \otimes \det(T_X^*)^{\otimes 3}) = \mathcal{L}^{-(5,3,1)} \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(4(d-5)).$$

Donc

$$F \otimes K_Y^{-1} = \mathcal{L}^{\lambda+(5,3,1)} \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(3\,|\lambda| - 4(d-5)).$$

Or on a

$$\mathcal{L}^{\lambda+(5,3,1)} \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(2\,|\lambda + (5,3,1)|) = \mathcal{L}^{\lambda+(5,3,1)} \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(2\,|\lambda| + 18) \geq 0.$$

Par conséquent $F \otimes K_Y^{-1} > 0$ si

$$3\,|\lambda| - 4(d-5) > 2\,|\lambda| + 18$$

c'est-à-dire

$$|\lambda| > 4(d-5) + 18.$$

Prenons un diviseur $D = \pi^* E_1 \in |G|$, lisse et irréductible. On a la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_Y(F \otimes G^{-1}) \to \mathcal{O}_Y(F) \to \mathcal{O}_D(F) \to 0.$$

donc la suite exacte longue en cohomologie :

$$0 = H^1(Y, \mathcal{O}_Y(F)) \to H^1(D, \mathcal{O}_D(F)) \to H^2(Y, \mathcal{O}_Y(F \otimes G^{-1}) \to H^2(Y, \mathcal{O}_Y(F)) = 0.$$

Donc
$$h^2(Y, \mathcal{O}_Y(F \otimes G^{-1})) = h^1(D, \mathcal{O}_D(F)).$$
Prenons un deuxième diviseur $D' = \pi^* E_2 \in |G|$, lisse et irréductible, rencontrant D proprement. Soit $Z = D \cap D'$, $F' = F \otimes G$ et $E_3 = E_1 \cap E_2$. On a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_D(F' \otimes G^{-1}) \to \mathcal{O}_D(F') \to \mathcal{O}_Z(F') \to 0.$$

Par adjonction
$$K_D = (K_Y)_{|D} \otimes \mathcal{O}_D(D)$$
donc
$$F'_{|D} \otimes K_D^{-1} = (F \otimes K_Y^{-1})_{|D} > 0.$$
Ainsi

$$h^1(D, \mathcal{O}_D(F)) \leq h^0(Z, \mathcal{O}_Z(F')) = h^0(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G)) \leq h^0(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G^2)).$$

Or comme précédemment

$$\mathcal{O}_Z(F \otimes G^2) \otimes K_Z^{-1} = (F \otimes K_Y^{-1})_{|Z} > 0$$

donc
$$h^0(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G^2)) = \chi(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G^2)).$$
On a
$$\chi(Z, \mathcal{O}_Z(F \otimes G^2)) = \chi(E_3, \Gamma^\lambda T^*_{X|E_3} \otimes \mathcal{O}_{E_3}(9\,|\lambda|)).$$
Par Riemann-Roch, on sait explicitement calculer

$$\chi(X, \Gamma^\lambda T^*_X \otimes \mathcal{O}_X(t)).$$

On a les suites exactes

$$\begin{array}{lll} (1)\ 0 & \to & \Gamma^\lambda T^*_X \otimes \mathcal{O}_X(t - E_1) \to \Gamma^\lambda T^*_X \otimes \mathcal{O}_X(t) \to \Gamma^\lambda T^*_{X|E_1} \otimes \mathcal{O}_{E_1}(t) \to 0 \\ (2)\ 0 & \to & \Gamma^\lambda T^*_{X|E_1} \otimes \mathcal{O}_E(t - E_3) \to \Gamma^\lambda T^*_{X|E_1} \otimes \mathcal{O}_{E_1}(t) \to \Gamma^\lambda T^*_{X|E_3} \otimes \mathcal{O}_{E_3}(t) \to 0. \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rl} & \chi(E_3, \Gamma^\lambda T^*_{X|E_3} \otimes \mathcal{O}_{E_3}(9\,|\lambda|)) = \chi(E_1, \Gamma^\lambda T^*_{X|E_1} \otimes \mathcal{O}_{E_1}(9\,|\lambda|)) \\ & -\chi(E_1, \Gamma^\lambda T^*_{X|E_1} \otimes \mathcal{O}_{E_1}(6\,|\lambda|)) \\ = & (\chi(X, \Gamma^\lambda T^*_X \otimes \mathcal{O}_X(9\,|\lambda|)) - \chi(X, \Gamma^\lambda T^*_X \otimes \mathcal{O}_X(6\,|\lambda|))) \\ & -(\chi(X, \Gamma^\lambda T^*_X \otimes \mathcal{O}_X(6\,|\lambda|)) - \chi(X, \Gamma^\lambda T^*_X \otimes \mathcal{O}_X(3\,|\lambda|))). \end{array}$$

On termine le calcul de Riemann-Roch explicite (par exemple avec le logiciel Maple) et la proposition est démontrée. $\square$

Passons maintenant à la démonstration du théorème 7.14 :

Démonstration. Estimons maintenant

$$h^2(X, Gr^\bullet E_{3,m}T_X^*) = \sum_{0\leq\gamma\leq\frac{m}{5}} \Big(\sum_{\{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=m-\gamma;\ \lambda_i-\lambda_j\geq\gamma,\ i<j\}} h^2(X, \Gamma^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}T_X^*)\Big).$$

Pour m suffisamment grand λ vérifie $|\lambda| = \sum \lambda_i > 4(d-5)+18$. En effet

$$\frac{4m}{5} \leq m-\gamma = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \leq 6\lambda_1$$

donc

$$|\lambda| \geq \lambda_1 \geq \frac{2m}{15}.$$

On applique la proposition 7.16 et par sommation :

$$h^2(X, Gr^\bullet E_{3,m}T_X^*) \leq d(d+13) \sum_{0\leq\gamma\leq\frac{m}{5}} \Big(\sum_{\{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=m-\gamma;\ \lambda_i-\lambda_j\geq\gamma,\ i<j\}} g(\lambda)\Big) + O(m^8).$$

Remarquons qu'à priori la sommation se fait pour $\gamma > 0$ car nos inégalités supposent $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, mais la sommation pour $\gamma = 0$ n'influence pas le terme dominant, c'est un $O(m^8)$.

Il ne reste plus qu'à évaluer $\sum_{0\leq\gamma\leq\frac{m}{5}} \big(\sum_{\{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=m-\gamma;\ \lambda_i-\lambda_j\geq\gamma,\ i<j\}} g(\lambda)\big)$. Ce calcul se fait par Maple :

$$\sum_{0\leq\gamma\leq\frac{m}{5}} \Big(\sum_{\{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=m-\gamma;\ \lambda_i-\lambda_j\geq\gamma,\ i<j\}} g(\lambda)\Big) \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{49403}{252.10^7} m^9.$$

Et le théorème est démontré. $\square$

On peut maintenant montrer le théorème :

Théorème 7.17 *Soit X une hypersurface lisse de degré $d \geq 97$ de $\mathbb{P}^4$ et A un fibré en droites ample, alors il y a des sections globales de $E_{3,m}T_X^* \otimes A^{-1}$ pour m suffisamment grand et toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ doit satisfaire l'équation différentielle correspondante.*

Démonstration. On a

$$h^0(X, E_{3,m}T_X^*) + h^2(X, E_{3,m}T_X^*) \geq \chi(X, E_{3,m}T_X^*)$$

et :

$$\chi(X, E_{3,m}T_X^*) = \frac{m^9}{81648 \times 10^6} d(389d^3 - 20739d^2 + 185559d - 358873) + O(m^8).$$

Par ailleurs

$$h^2(X, E_{3,m}T_X^*) \leq h^2(X, Gr^\bullet E_{3,m}T_X^*) \leq Cd(d+13)m^9 + O(m^8)$$

donc

$$\begin{aligned} h^0(X_3, \mathcal{O}_{X_3}(m)) &= h^0(X, E_{3,m}T_X^*) \\ &\geq m^9\left(\frac{1}{81648 \times 10^6} d(389d^3 - 20739d^2 + 185559d - 358873)\right. \\ &\quad \left. - Cd(d+13)\right) + O(m^8). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à evaluer pour quels degrés

$$\frac{1}{81648 \times 10^6} d(389d^3 - 20739d^2 + 185559d - 358873) - Cd(d+13)$$

est positif. Cela se fait par Maple. On obtient alors que $\mathcal{O}_{X_3}(m)$ est "big" pour $d \geq 97$ donc pour m suffisamment grand :

$$H^0(X_3, \mathcal{O}_{X_3}(m) \otimes \pi_3^* A^{-1}) \simeq H^0(X, E_{3,m}T_X^* \otimes A^{-1}) \neq 0.$$

□

7.4 Dégénérescence des courbes entières

La stratégie est maintenant la même que pour les surfaces. On considère $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^{N_d}$ l'hypersurface universelle d'équation

$$\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha Z^\alpha = 0, \text{ where } [a] \in \mathbb{P}^{N_d} \text{ and } [Z] \in \mathbb{P}^4.$$

La première étape est de montrer un résultat d'engendrement global pour les champs de vecteurs méromorphes avec des pôles d'ordre borné sur l'espace des 3-jets verticaux :

Proposition 7.18 *Soit* $\Sigma_0 := \{(z, a, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}) \in J_3^v(\mathcal{X}) \ / \ \xi^{(1)} \wedge \xi^{(2)} \wedge \xi^{(3)} = 0\}$. *Alors le fibré vectoriel* $T_{J_3^v(\mathcal{X})} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(12) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_d}}(*)$ *est engendré par ses sections globales sur* $J_3^v(\mathcal{X}) \backslash \Sigma$, *où* Σ *est l'adhérence de* Σ_0.

Ensuite, on utilise la méthode qui nous dispense du résultat de Mc Quillan (qui n'existe pas en dimension 3).

Lemme 7.19 *Soit* X *une hypersurface lisse de* $\mathbb{P}^4$ *de degré* d, $0 < \delta < \frac{1}{18}$ *alors* $h^0(X, E_{3,m}T_X^* \otimes K_X^{-\delta m}) \geq \alpha(d, \delta)m^9 + O(m^8)$.

Alors, par les arguments développés précédemment, on obtient la dégénérescence des courbes entières si

$$\delta(d-5) > 12,$$

donc pour $\delta > \frac{12}{(d-5)}$ et $\alpha(d, \delta) > 0$. Ce qui est le cas pour $d \geq 593$.

Références

[1] Angelini F., *An algebraic version of Demailly's asymptotic Morse inequalities*, Proc. Amer. Math. Soc. **124**, 1996, 3265-3269.

[2] Bott R., *Homogeneous vector bundles*, Ann. of Math. **66**, 1957, 203-248.

[3] Brody R., *Compact manifolds in hyperbolicity*, Trans. Amer. Math. Soc. **235** (1978), 213–219.

[4] Chen X., *On the intersection of two plane curves*, Math. Res. Lett. **7** (2000), no. 5-6, 631–641.

[5] Chen X., *On Algebraic Hyperbolicity of Log Varieties*, Commun. Contemp. Math. **6** (2004), no. 4, 513–559. Also available as preprint math.AG/0111051.

[6] Clemens H., *Curves on generic hypersurface*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **19** 1986, 629–636.

[7] Clemens H., Ran Z., *Twisted genus bounds for subvarieties of generic hypersurfaces* Amer. J. Math. **126** (2004), no. 1, 89–120.

[8] Debarre O., Pacienza G., Păun M., *Non-deformability of entire curves in projective hypersurfaces of high degree*, Ann. Inst. Fourier **56** (2006), no. 1, 247–253.

[9] Demailly J.P., *Vanishing theorems for tensor powers of a positive vector bundle*, Proceedings of the Conference Geometry and Analysis on Manifolds held at Katata, Japan (August 1987), edited by T. Sunada, Lecture Notes in Math. 1339, Springer-Verlag

[10] Demailly J.P., *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, Proc. Sympos. Pure Math., vol.62, Amer. Math.Soc., Providence, RI, 1997, 285–360.

[11] Demailly J.P., *L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory*, Transcendental methods in algebraic geometry (Cetraro 1994), Lect. Notes in Math, vol 1464, Springer, Berlin, 1996, 1-97.

[12] Demailly J.P., El Goul J., *Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space*, Amer. J. Math. **122** (2000), 515–546.

[13] Duval J., *Une sextique hyperbolique dans* $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, Math. Ann. **330** (2004), no. 3, 473-476.

[14] Ein L., *Subvarieties of generic complete intersections*, Invent. Math. **94**, (1988) 163–169.

[15] El Goul J., *Logarithmic Jets and Hyperbolicity*, Osaka J.Math. **40**, (2003) 469–491.

[16] Farkas H. M., Kra I., *Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, New-York, 1980, second edition.

[17] Green M., *The hyperbolicity of the complement of 2n+1 hyperplanes in general position in* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *and related results*, Proc. Amer. Math. Soc. 66 (1977), 109-113.

[18] Green M., Griffiths P., *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings*, The Chern Symposium 1979, Proc. Inter. Sympos. Berkeley, CA, 1979, Springer-Verlag, New-York (1980), 41-74.

[19] Hironaka H., *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. of Math. **79**, (1964) 109-326.

[20] Hirzebruch F., *Topological methods in algebraic geometry*, Grundl. Math. Wiss.131, Springer, Heidelberg, (1966).

[21] Iitaka S., *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math. **76**, Springer Verlag, New York, 1982.

[22] Kobayashi S., *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Marcel Dekker, New York, 1970.

[23] Kobayashi S., *Hyperbolic complex spaces*, Springer, 1998.

[24] Lang S., *Introduction to complex hyperbolic spaces*, Springer, 1987.

[25] Manivel L., *Un théorème d'annulation "à la Kawamata-Viehweg"*, manuscripta math. **83**, 1994, 387-404.

[26] McQuillan M., *Holomorphic curves on hyperplane sections of 3-folds*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), 370–392.

[27] Pacienza G.,*Subvarieties of general type on a general projective hypersurface*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no. 7, 2649–2661.

[28] Pacienza G., Rousseau E., *On the logarithmic Kobayashi conjecture*, to appear in J. Reine Angew. Math., 2007.

[29] Păun M., *Vector fields on the total space of hypersurfaces in the projective space and hyperbolicity*, preprint, 2005.

[30] Popov V.L., *Invariant theory*, algebraic geometry vol.4., EMS, Springer-Verlag.

[31] Procesi C., *Classical invariant theory*, Brandeis Lect. Notes 1, (1982).

[32] Rousseau E., *Etude des jets de Demailly-Semple en dimension 3*, Ann. Inst. Fourier **56** (2006), 397-421.

[33] Rousseau E., *Equations différentielles sur les hypersurfaces de l'espace projectif de dimension 4*, J. Math. Pures Appl. **86** (2006), 322-341.

[34] Rousseau E., *Weak analytic hyperbolicity of generic hypersurfaces of high degree in* $\mathbb{P}^4$, Annales Fac. Sci. Toulouse **16** (2007), no.2, 369-383.

[35] Rousseau E., *Weak analytic hyperbolicity of complements of generic surfaces of high degree in projective 3-space*, to appear in Osaka J.Math, 2007.

[36] Royden H., *Remarks on the Kobayashi metric*, Proc. Maryland Conference on several complex variables, Springer Lecture Notes, Vol. 185, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[37] Siu Y.-T., *Hyperbolicity in complex geometry*, The legacy of Niels Henrik Abel, Springer, Berlin, 2004, 543-566.

[38] Tan L., *On the Popov-Pommerening conjecture for groups of type* A_n, Proc. AMS 106 (1989), 611-616.

[39] Urata T., *The hyperbolicity of complex analytic spaces*, Bull. Aichi Univ. Educ., 31, 1982, 65-75.

[40] Voisin C., *On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces*, J. Diff. Geom. **44** (1996), no. 1, 200–213.

[41] Voisin C., *A correction : "On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces"*, J. Diff. Geom. **49** (1998), no. 3, 601–611.

[42] Voisin C., On some problems of Kobayashi and Lang ; algebraic approaches. Current developments in mathematics, 2003, 53–125, Int. Press, Somerville, MA, 2003.

[43] Xu G., *Subvarieties of general hypersurfaces in projective space*, J. Differential Geom. **39** (1994), no. 1, 139–172.

[44] Xu G., *On the complement of a generic curve in the projective plane*, Amer. J. Math. **118** (1996), no. 3, 611–620.

[45] Zaĭdenberg M. G., *The complement to a general hypersurface of degree $2n$ in CP^n is not hyperbolic*. (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. **28** (1987), no. 3, 91–100, 222. (English translation : Siberian Math. J. **28** (1988), no. 3, 425–432.)

rousseau@math.u-strasbg.fr
Université Louis Pasteur,
IRMA,
7, rue René Descartes,
67084 Strasbourg Cédex
France