Una prueba constructiva del axioma de elección dependiente en lógica clásica

Hugo Herbelin[1], Étienne Miquey[1,2]

[1]Team πr^2 (INRIA), PPS, Université Paris-Diderot
[2]Fac. de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay

8 de Marzo 2016

Situación inicial

Correspondencia pruebas/programas

Correspondencia de Curry-Howard

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

- Matemáticas constructivas : lógica **intuicionista**
- **Axioma de elección** válido !
- Martin-Löf : sistema más expresivo, ofrece una prueba sencilla

Correspondencia pruebas/programas

Correspondencia de Curry-Howard

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

- Matemáticas constructivas : lógica **intuicionista**
- **Axioma de elección** válido !
- Martin-Löf : sistema más expresivo, ofrece una prueba sencilla

Correspondencia pruebas/programas

Correspondencia de Curry-Howard

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

- Matemáticas constructivas : lógica **intuicionista**
- **Axioma de elección** válido !
- Martin-Löf : sistema más expresivo, ofrece una prueba sencilla

Correspondencia pruebas/programas

Correspondencia de Curry-Howard

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \to B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \to B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

- Matemáticas constructivas : lógica **intuicionista**
- **Axioma de elección** válido !
- Martin-Löf : sistema más expresivo, ofrece una prueba sencilla

Correspondencia pruebas/programas

Correspondencia de Curry-Howard

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

- Matemáticas constructivas : lógica **intuicionista**
- **Axioma de elección** válido !
- Martin-Löf : sistema más expresivo, ofrece una prueba sencilla

Teoría de tipos de Martin-Löf (1973)

Intuiciones :

- Separación entre los lenguajes de **términos** (testigos) y de **pruebas**
- Ya que el testigo se puede extraer, porqué no exigirlo con la prueba ?

  $\looparrowright$ **suma fuerte/dependiente** : $(t, p) : \exists x A(x)$

Teoría de tipos de Martin-Löf (1973)

Intuiciones :

- Separación entre los lenguajes de **términos** (testigos) y de **pruebas**
- Ya que el testigo se puede extraer, porqué no exigirlo con la prueba ?

  $\looparrowright$ **suma fuerte/dependiente** : $(t, p) : \exists x A(x)$

Teoría de tipos de Martin-Löf (1973)

Ingredientes

$$\frac{\Gamma, a : A \vdash p : B}{\Gamma \vdash \lambda a.p : A \to B} \to_I \qquad \frac{\Gamma, x : T \vdash p : A}{\Gamma \vdash \lambda x.p : \forall x^T A} \forall_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A[t/x] \quad \Gamma \vdash t : T}{\Gamma \vdash (t, p) : \exists x^T A} \exists_I \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \exists x^T A(x)}{\Gamma \vdash \mathtt{prf}\, p : A(\mathtt{wit}\, p)} \exists_E$$

Teoría de tipos de Martin-Löf (1973)

Ingredientes

$$\frac{\Gamma, a : A \vdash p : B}{\Gamma \vdash \lambda a.p : A \to B} \to_I \qquad \frac{\Gamma, x : T \vdash p : A}{\Gamma \vdash \lambda x.p : \forall x^T A} \forall_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A[t/x] \quad \Gamma \vdash t : T}{\Gamma \vdash (t, p) : \exists x^T A} \exists_I \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \exists x^T A(x)}{\Gamma \vdash \mathtt{prf}\ p : A(\mathtt{wit}\ p)} \exists_E$$

Axioma de elección

$$AC_A : \forall x^A \exists y^B P(x,y) \to \exists f^{A\to B} \forall x^A P(x, f(x))$$

$$\begin{array}{rcl} AC_A & := & \lambda H.(\lambda x.\,\mathtt{wit}(Hx), \lambda x.\,\mathtt{prf}(Hx)) \\ & : & \forall x^A \exists y^B P(x,y) \to \exists f^{A\to B} \forall x^A P(x, f(x)) \end{array}$$

Teoría de tipos de Martin-Löf (1973)

Ingredientes

$$\frac{\Gamma, a : A \vdash p : B}{\Gamma \vdash \lambda a.p : A \to B} \to_I \qquad \frac{\Gamma, x : T \vdash p : A}{\Gamma \vdash \lambda x.p : \forall x^T A} \forall_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A[t/x] \quad \Gamma \vdash t : T}{\Gamma \vdash (t, p) : \exists x^T A} \exists_I \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \exists x^T A(x)}{\Gamma \vdash \mathtt{prf}\, p : A(\mathtt{wit}\, p)} \exists_E$$

Axioma de elección

$$AC_A : \forall x^A \exists y^B P(x,y) \to \exists f^{A \to B} \forall x^A P(x, f(x))$$

$$\begin{array}{rcl} AC_A & := & \lambda H.(\lambda x.\, \mathtt{wit}(Hx), \lambda x.\, \mathtt{prf}(Hx)) \\ & : & \forall x^A \exists y^B P(x,y) \to \exists f^{A \to B} \forall x^A P(x, f(x)) \end{array}$$

Teoría de tipos de Martin-Löf (1973)

Ingredientes

$$\frac{\Gamma, a : A \vdash p : B}{\Gamma \vdash \lambda a.p : A \to B} \to_I \qquad \frac{\Gamma, x : T \vdash p : A}{\Gamma \vdash \lambda x.p : \forall x^T A} \forall_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A[t/x] \quad \Gamma \vdash t : T}{\Gamma \vdash (t, p) : \exists x^T A} \exists_I \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \exists x^T A(x)}{\Gamma \vdash \mathtt{prf}\ p : A(\mathtt{wit}\ p)} \exists_E$$

Axioma de elección

$$AC_A : \forall x^A \exists y^B P(x,y) \to \exists f^{A\to B} \forall x^A P(x, f(x))$$

$$\begin{array}{rcl} AC_A & := & \lambda H.(\lambda x.\ \mathtt{wit}(Hx), \lambda x.\ \mathtt{prf}(Hx)) \\ & : & \forall x^A \exists y^B P(x,y) \to \exists f^{A\to B} \forall x^A P(x, f(x)) \end{array}$$

Teoría de tipos de Martin-Löf (1973)

Ingredientes

$$\frac{\Gamma, a : A \vdash p : B}{\Gamma \vdash \lambda a.p : A \to B}\ \to_I \qquad \frac{\Gamma, x : T \vdash p : A}{\Gamma \vdash \lambda x.p : \forall x^T A}\ \forall_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A[t/x] \quad \Gamma \vdash t : T}{\Gamma \vdash (t, p) : \exists x^T A}\ \exists_I \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \exists x^T A(x)}{\Gamma \vdash \mathrm{prf}\ p : A(\mathtt{wit}\ p)}\ \exists_E$$

Axioma de elección

$$AC_A : \forall x^A \exists y^B P(x,y) \to \exists f^{A\to B} \forall x^A P(x, f(x))$$

$$\begin{array}{rcl} AC_A & := & \lambda H.(\lambda x.\mathtt{wit}(Hx), \lambda x.\mathtt{prf}(Hx)) \\ & : & \forall x^A \exists y^B P(x,y) \to \exists f^{A\to B} \forall x^A P(x, f(x)) \end{array}$$

Teoría de tipos de Martin-Löf (1973)

Ingredientes

$$\frac{\Gamma, a : A \vdash p : B}{\Gamma \vdash \lambda a.p : A \to B} \to_I \qquad \frac{\Gamma, x : T \vdash p : A}{\Gamma \vdash \lambda x.p : \forall x^T A} \forall_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A[t/x] \quad \Gamma \vdash t : T}{\Gamma \vdash (t, p) : \exists x^T A} \exists_I \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \exists x^T A(x)}{\Gamma \vdash \mathtt{prf}\ p : A(\mathtt{wit}\ p)} \exists_E$$

Axioma de elección

$$AC_A : \forall x^A \exists y^B P(x,y) \to \exists f^{A\to B} \forall x^A P(x, f(x))$$

$$\begin{array}{lll} AC_A & := & \lambda H.(\lambda x.\mathtt{wit}(Hx), \lambda x.\mathtt{prf}(Hx)) \\ & : & \forall x^A \exists y^B P(x,y) \to \exists f^{A\to B} \forall x^A P(x, f(x)) \end{array}$$

Lógica clásica y elección

Griffin, 1990

$$\texttt{call/cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

↬ Cálculos con operadores de control : $\lambda\mu$, λ_c , $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$...

Bad news

- Independencia del axioma de elección (Cohen)
- Imposibilidad de lograr una realización recursiva :

$$\forall x \exists y\,(y = 0 \Leftrightarrow \phi(x)) \qquad \Rightarrow \qquad \exists f \forall x\,(f(x) = 0 \Leftrightarrow \phi(x))$$

Elección numerable/dependiente

Enfoque por realizabilidad :

- Berardi-Bezem-Coquand 1998
- Krivine 2003

Lógica clásica y elección

Griffin, 1990

$$\texttt{call/cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

↬ Cálculos con operadores de control : $\lambda\mu$, λ_c , $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$...

Bad news

- Independencia del axioma de elección (Cohen)
- Imposibilidad de lograr una realización recursiva :

$$\forall x \exists y\, (y = 0 \Leftrightarrow \phi(x)) \qquad \Rightarrow \qquad \exists f \forall x\, (f(x) = 0 \Leftrightarrow \phi(x))$$

Elección numerable/dependiente

Enfoque por realizabilidad :

- Berardi-Bezem-Coquand 1998
- Krivine 2003

Lógica clásica y elección

Griffin, 1990

$$\texttt{call/cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

$\looparrowright$ Cálculos con operadores de control : $\lambda\mu$, λ_c , $\bar{\lambda}\mu\tilde{\mu}$...

Bad news

- Independencia del axioma de elección (Cohen)
- Imposibilidad de lograr una realización recursiva :

$$\forall x \exists y\, (y = 0 \Leftrightarrow \phi(x)) \quad \Rightarrow \quad \exists f \forall x\, (f(x) = 0 \Leftrightarrow \phi(x))$$

Elección numerable/dependiente

Enfoque por realizabilidad :

- Berardi-Bezem-Coquand 1998
- Krivine 2003

Une ligera incompatibilidad

Pizarrón : prueba de 0=1.

Une ligera incompatibilidad

$$AC_A := \lambda H.(\lambda x.\,\mathtt{wit}(Hx), \lambda x.\,\mathtt{prf}(Hx))$$

- En lógica clásica :

$$H_0 := \mathtt{callcc}_\alpha(1, \phi(\mathtt{throw}_\alpha(2, p))) : \exists x P(x)$$

- el testigo puede **depender del contexto, y la prueba también !**
- reduciendo un término en distintos contextos, uno podría llegar a una contradicción :

$$\underbrace{(\mathtt{wit}(AC_A\ H)\ 0, \mathtt{prf}(AC_A\ H)\ 0)}_{\exists y P(0,y)} \rightsquigarrow (\mathtt{wit}\ H_0, \mathtt{prf}\ H_0) \rightsquigarrow \underbrace{(1, \overbrace{p}^{P(0,2)})}_{\cancel{\exists y P(x,y)}}$$

$\hookrightarrow$ idea : necesitamos *compartir*...

Une ligera incompatibilidad

$$AC_A := \lambda H.(\lambda x.\,\texttt{wit}(Hx), \lambda x.\,\texttt{prf}(Hx))$$

- En lógica clásica :

$$H_0 := \texttt{callcc}_\alpha(1, \phi(\texttt{throw}_\alpha(2,p)) : \exists x P(x)$$

- el testigo puede **depender del contexto, y la prueba también !**
- reduciendo un término en distintos contextos, uno podría llegar a una contradicción :

$$\underbrace{(\texttt{wit}(AC_A\ H)\ 0, \texttt{prf}(AC_A\ H)\ 0)}_{\exists y P(0,y)} \rightsquigarrow (\texttt{wit}\,H_0, \texttt{prf}\,H_0) \rightsquigarrow \underbrace{(1, \overbrace{p}^{P(0,2)})}_{\cancel{\exists y P(x,y)}}$$

↪ idea : necesitamos *compartir*...

Une ligera incompatibilidad

$$AC_A := \lambda H.(\lambda x.\,\mathtt{wit}(Hx), \lambda x.\,\mathtt{prf}(Hx))$$

- En lógica clásica :

$$H_0 := \mathtt{callcc}_{\alpha}(1, \phi(\mathtt{throw}_{\alpha}(2, p)) : \exists x P(x)$$

- el testigo puede **depender del contexto, y la prueba también !**
- reduciendo un término en distintos contextos, uno podría llegar a una contradicción :

$$\underbrace{(\mathtt{wit}(AC_A\ H)\ 0, \mathtt{prf}(AC_A\ H)\ 0)}_{\exists y P(0,y)} \rightsquigarrow (\mathtt{wit}\,H_0, \mathtt{prf}\,H_0) \rightsquigarrow \underbrace{(1, \overbrace{p}^{P(0,2)})}_{\cancel{\exists y P(x,y)}}$$

$\hookrightarrow$ idea : necesitamos *compartir*...

Une ligera incompatibilidad

$$AC_A := \lambda H.(\lambda x.\,\mathtt{wit}(Hx), \lambda x.\,\mathtt{prf}(Hx))$$

- En lógica clásica :

$$H_0 := \mathtt{callcc}_\alpha(1, \phi(\mathtt{throw}_\alpha(2, p)) : \exists x P(x)$$

- el testigo puede **depender del contexto, y la prueba también !**
- reduciendo un término en distintos contextos, uno podría llegar a una contradicción :

$$\underbrace{(\mathtt{wit}(AC_A\ H)\ 0, \mathtt{prf}(AC_A\ H)\ 0)}_{\exists y P(0,y)} \rightsquigarrow (\mathtt{wit}\,H_0, \mathtt{prf}\,H_0) \rightsquigarrow \underbrace{(1, \overbrace{p}^{P(0,2)})}_{\cancel{\exists y P(x,y)}}$$

$\looparrowright$ idea : necesitamos *compartir*...

Une ligera incompatibilidad

$$AC_A := \lambda H.(\lambda x.\,\mathtt{wit}(Hx), \lambda x.\,\mathtt{prf}(Hx))$$

- En lógica clásica :

$$H_0 := \mathtt{callcc}_\alpha(1, \phi(\mathtt{throw}_\alpha(2,p))) : \exists x P(x)$$

- el testigo puede **depender del contexto, y la prueba también !**
- reduciendo un término en distintos contextos, uno podría llegar a una contradicción :

$$\underbrace{(\mathtt{wit}(AC_A\ H)\ 0, \mathtt{prf}(AC_A\ H)\ 0)}_{\exists y P(0,y)} \rightsquigarrow (\mathtt{wit}\,H_0, \mathtt{prf}\,H_0) \rightsquigarrow \underbrace{(1, \overbrace{p}^{P(0,2)})}_{\cancel{\exists y P(x,y)}}$$

$\looparrowright$ idea : necesitamos *compartir*...

Hacía una solución ?

- Restricción a la elección numerable :

$$AC_{\mathbb{N}} : \forall x^{\mathbb{N}} \exists y^{B} P(x,y) \rightarrow \exists f^{\mathbb{N}\rightarrow B} \forall x^{\mathbb{N}} P(x, f(x))$$

- Prueba :

Hacía una solución ?

- Restricción a la elección numerable :

$$AC_{\mathbb{N}} : \forall x^{\mathbb{N}} \exists y^B P(x,y) \to \exists f^{\mathbb{N}\to B} \forall x^{\mathbb{N}} P(x, f(x))$$

- Prueba :

$$AC := \lambda H.(\lambda n.\, \mathtt{wit}(Hn), \lambda n.\, \mathtt{prf}(Hn))$$

Hacía una solución ?

- Restricción a la elección numerable :

$$AC_{\mathbb{N}} : \forall x^{\mathbb{N}} \exists y^{B} P(x,y) \to \exists f^{\mathbb{N}\to B} \forall x^{\mathbb{N}} P(x, f(x))$$

- Prueba :

$$\begin{aligned} AC := \lambda H.(\lambda n.&\texttt{if}\ n = 0\ \texttt{then}\ \texttt{wit}\ H\ 0\ \texttt{else} \\ &\texttt{if}\ n = 1\ \texttt{then}\ \texttt{wit}\ H\ 1\ \texttt{else}\ \ldots\ , \\ \lambda n.&\texttt{if}\ n = 0\ \texttt{then}\ \texttt{prf}\ H\ 0\ \texttt{else} \\ &\texttt{if}\ n = 1\ \texttt{then}\ \texttt{prf}\ H\ 1\ \texttt{else}\ \ldots\ ) \end{aligned}$$

Hacía una solución ?

- Restricción a la elección numerable :

$$AC_{\mathbb{N}} : \forall x^{\mathbb{N}} \exists y^{B} P(x,y) \to \exists f^{\mathbb{N}\to B} \forall x^{\mathbb{N}} P(x, f(x))$$

- Prueba :

$$\begin{aligned} AC := \lambda H.\, & \mathtt{let}\, H_0 = H\ 0\, \mathtt{in} \\ & \mathtt{let}\, H_1 = H\ 1\, \mathtt{in} \\ & \dots \\ & (\lambda n.\mathtt{if}\ n = 0\ \mathtt{then}\ \mathtt{wit}\ H_0\ \mathtt{else} \\ & \quad\ \mathtt{if}\ n = 1\ \mathtt{then}\ \mathtt{wit}\ H_1\ \mathtt{else}\ \dots\ , \\ & \ \lambda n.\mathtt{if}\ n = 0\ \mathtt{then}\ \mathtt{prf}\ H_0\ \mathtt{else} \\ & \quad\ \mathtt{if}\ n = 1\ \mathtt{then}\ \mathtt{prf}\ H_1\ \mathtt{else}\ \dots\ ) \end{aligned}$$

Hacía una solución ?

- Restricción a la elección numerable :

$$AC_{\mathbb{N}} : \forall x^{\mathbb{N}} \exists y^{B} P(x,y) \rightarrow \exists f^{\mathbb{N}\rightarrow B} \forall x^{\mathbb{N}} P(x, f(x))$$

- Prueba :

$$AC := \lambda H.\,\texttt{let}\; H_\infty = (H\ 0, H\ 1, \dots, H\ n, \dots)\; \texttt{in}$$
$$(\lambda n.\texttt{nth}\ n\ H_\infty, \lambda n.\texttt{nth}\ n\ H_\infty)$$

Hacía una solución ?

- Restricción a la elección numerable :

$$AC_{\mathbb{N}} : \forall x^{\mathbb{N}} \exists y^{B} P(x,y) \to \exists f^{\mathbb{N}\to B} \forall x^{\mathbb{N}} P(x, f(x))$$

- Prueba :

$$AC := \lambda H.\, \texttt{let}\, H_{\infty} = \texttt{cofix}^{0}_{fn}(H\ n, f(S(n)))\, \texttt{in}$$
$$(\lambda n.\texttt{nth}\ n\ H_{\infty}, \lambda n.\texttt{nth}\ n\ H_{\infty})$$

Hacía una solución ?

- Restricción a la elección numerable :

$$AC_{\mathbb{N}} : \forall x^{\mathbb{N}} \exists y^{B} P(x,y) \to \exists f^{\mathbb{N}\to B} \forall x^{\mathbb{N}} P(x,f(x))$$

- Prueba :

$$AC := \lambda H.\, \texttt{let}\; H_\infty = \texttt{cofix}^0_{fn}(H\ n, f(S(n)))\;\texttt{in}$$
$$(\lambda n.\texttt{nth}\ n\ H_\infty, \lambda n.\texttt{nth}\ n\ H_\infty)$$

- Se puede adaptar sencillamente a la elección dependiente
- La prueba es intuicionista !

Elemento pertubador

a.k.a. *Dónde empiezan la aventura*

La receta : dPA^{ω}

Ref : Hugo Herbelin (LICS'12)

A Constructive Proof of Dependent Choice, Compatible with Classical Logic

Un sistema formal :

- **clásico** : $p, q ::= \ldots \mid \texttt{catch}_{\alpha}\, p \mid \texttt{throw}_{\alpha}\, p$
- con **tipos dependientes** :
  - fórmulas : $A, B ::= \ldots \mid [a : A] \to B \mid t = u,$
  - términos : $t, u ::= \ldots \mid \texttt{wit}\, p,$
  - pruebas : $p, q ::= \ldots \mid \texttt{prf}\, p$
- una **compartimentación**
- call-by-value y **sharing** : $p, q ::= \ldots \mid \texttt{let}\, a = q\, \texttt{in}\, p$
- con constructores inductivos y **coinductivos** : $p, q ::= \ldots \mid \texttt{ind}\, t\, \texttt{of}\, [p \mid (x, a).q] \mid \texttt{cofix}^{t}_{bn}\, p$
- **pereza** para el cofix

La receta : dPA^ω

Ref : Hugo Herbelin (LICS'12)

A Constructive Proof of Dependent Choice, Compatible with Classical Logic

Un sistema formal :

- **clásico** : $p, q ::= \ldots \mid \texttt{catch}_\alpha\, p \mid \texttt{throw}_\alpha\, p$
- con **tipos dependientes** :
  - fórmulas : $A, B ::= \ldots \mid [a : A] \to B \mid t = u$,
  - términos : $t, u ::= \ldots \mid \texttt{wit}\, p$,
  - pruebas : $p, q ::= \ldots \mid \texttt{prf}\, p$
- una **compartimentación**
- call-by-value y **sharing** : $p, q ::= \ldots \mid \texttt{let}\, a = q\, \texttt{in}\, p$
- con constructores inductivos y **coinductivos** : $p, q ::= \ldots \mid \texttt{ind}\, t\, \texttt{of}\, [p \mid (x, a).q] \mid \texttt{cofix}^t_{bn}\, p$
- **pereza** para el cofix

La receta : *dPA^{ω}*

Ref : Hugo Herbelin (LICS'12)

A Constructive Proof of Dependent Choice, Compatible with Classical Logic

Un sistema formal :

- **clásico** : $p, q ::= \ldots \mid \texttt{catch}_{\alpha}\, p \mid \texttt{throw}_{\alpha}\, p$
- con **tipos dependientes** :
  - fórmulas : $A, B ::= \ldots \mid [a : A] \to B \mid t = u$,
  - términos : $t, u ::= \ldots \mid \texttt{wit}\, p$,
  - pruebas : $p, q ::= \ldots \mid \texttt{prf}\, p$
- una **compartimentación** :

Definición : *Negative-elimination-free*

Valores : $V ::= a \mid () \mid \lambda x.p \mid \lambda a.p \mid (t, p) \mid (V, V) \mid \iota_i(V)$

- call-by-value y **sharing** : $p, q ::= \ldots \mid \texttt{let}\, a = q\, \texttt{in}\, p$
- con constructores inductivos y **coinductivos** :
  $p, q ::= \ldots \mid \texttt{ind}\, t\, \texttt{of}\, [p \mid (x, a).q] \mid \texttt{cofix}^{t}_{bn}\, p$
- **pereza** para el $\texttt{cofix}$

La receta : dPA^ω

Ref : Hugo Herbelin (LICS'12)

A Constructive Proof of Dependent Choice, Compatible with Classical Logic

Un sistema formal :

- **clásico** : $p, q ::= \dots \mid \texttt{catch}_\alpha\, p \mid \texttt{throw}_\alpha\, p$
- con **tipos dependientes** :
  - fórmulas : $A, B ::= \dots \mid [a : A] \to B \mid t = u$,
  - términos : $t, u ::= \dots \mid \texttt{wit}\, p$,
  - pruebas : $p, q ::= \dots \mid \texttt{prf}\, p$
- una **compartimentación** :

Definición : *Negative-elimination-free*

$$N, M ::= \dots \mid \lambda a.p \mid (N, N) \mid \iota_i(N) \mid \texttt{prf}\, N \mid \texttt{let}\, a = M\, \texttt{in}\, N \mid \dots$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : \exists x^T A(x) \quad p\ \mathrm{Nef}}{\Gamma \vdash \texttt{prf}\, p : A(\texttt{wit}\, p)} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \exists x^T A(x) \quad \Gamma, x : T, a : A \vdash q : B}{\Gamma \vdash \texttt{dest}\, p\, \texttt{as}\, ((x, a))\, \texttt{in}\, q : B}$$

- call-by-value y **sharing** : $p, q ::= \dots \mid \texttt{let}\, a = q\, \texttt{in}\, p$
- con constructores inductivos y **coinductivos** :

La receta : dPA^{ω}

Ref : Hugo Herbelin (LICS'12)

A Constructive Proof of Dependent Choice, Compatible with Classical Logic

Un sistema formal :

- **clásico** : $p, q ::= \dots \mid \mathtt{catch}_{\alpha}\, p \mid \mathtt{throw}_{\alpha}\, p$
- con **tipos dependientes** :
  - fórmulas : $A, B ::= \dots \mid [a : A] \to B \mid t = u,$
  - términos : $t, u ::= \dots \mid \mathtt{wit}\, p,$
  - pruebas : $p, q ::= \dots \mid \mathtt{prf}\, p$
- una **compartimentación** ,
- call-by-value y **sharing** : $p, q ::= \dots \mid \mathtt{let}\, a = q\, \mathtt{in}\, p$
- con constructores inductivos y **coinductivos** :
  $p, q ::= \dots \mid \mathtt{ind}\, t\, \mathtt{of}\, [p \mid (x, a).q] \mid \mathtt{cofix}^{t}_{bn}\, p$
- **pereza** para el cofix

La receta : dPA^ω

Ref : Hugo Herbelin (LICS'12)

A Constructive Proof of Dependent Choice, Compatible with Classical Logic

Un sistema formal :

- **clásico** : $p, q ::= \ldots \mid \texttt{catch}_\alpha\, p \mid \texttt{throw}_\alpha\, p$
- con **tipos dependientes** :
  - fórmulas : $A, B ::= \ldots \mid [a : A] \to B \mid t = u,$
  - términos : $t, u ::= \ldots \mid \texttt{wit}\, p,$
  - pruebas : $p, q ::= \ldots \mid \texttt{prf}\, p$
- una **compartimentación**
- call-by-value y **sharing** : $p, q ::= \ldots \mid \texttt{let}\, a = q\, \texttt{in}\, p$
- con constructores inductivos y **coinductivos** :
  $p, q ::= \ldots \mid \texttt{ind}\, t\, \texttt{of}\, [p \mid (x, a).q] \mid \texttt{cofix}^t_{bn}\, p$
- **pereza** para el $\texttt{cofix}$

La receta : dPA^ω

Ref : Hugo Herbelin (LICS'12)

A Constructive Proof of Dependent Choice, Compatible with Classical Logic

Un sistema formal :

- **clásico** : $p, q ::= \dots \mid \mathtt{catch}_\alpha\, p \mid \mathtt{throw}_\alpha\, p$
- con **tipos dependientes** :
  - fórmulas : $A, B ::= \dots \mid [a : A] \to B \mid t = u,$
  - términos : $t, u ::= \dots \mid \mathtt{wit}\, p,$
  - pruebas : $p, q ::= \dots \mid \mathtt{prf}\, p$
- una **compartimentación**
- call-by-value y **sharing** : $p, q ::= \dots \mid \mathtt{let}\, a = q\, \mathtt{in}\, p$
- con constructores inductivos y **coinductivos** :
  $p, q ::= \dots \mid \mathtt{ind}\, t\, \mathtt{of}\, [p \mid (x, a).q] \mid \mathtt{cofix}^t_{bn}\, p$
- **pereza** para el cofix

Lenguaje

Términos

$t, u ::= x \mid 0 \mid S(t) \mid \texttt{rec}\ t\ \texttt{of}\ [t \mid (x,y).t] \mid \lambda x.t \mid t\ u \mid \texttt{wit}\ p$

Pruebas

$$
\begin{array}{lcl}
p, q & ::= & a \mid () \mid \iota_i(p) \mid (p_1, p_2) \mid (t, p) \mid \lambda a.p \mid \lambda x.p \\
& \mid & \texttt{case}\ p\ \texttt{of}\ [a_1.p_1 \mid a_2.p_2] \\
& \mid & \texttt{split}\ p\ \texttt{as}\ (a_1, a_2)\ \texttt{in}\ q \\
& \mid & \texttt{dest}\ p\ \texttt{as}\ (x, a)\ \texttt{in}\ q \\
& \mid & \texttt{let}\ a = q\ \texttt{in}\ p \\
& \mid & p\ q \mid p\ t \mid \texttt{exfalso}\ p \\
& \mid & \texttt{cofix}_{bx}^{t}\ p \mid \texttt{ind}\ t\ \texttt{of}\ [p_0 \mid (x,a).p_S] \\
& \mid & \texttt{refl} \mid \texttt{subst}\ p\ q \mid \texttt{prf}\ p \\
& \mid & \texttt{catch}_{\alpha}\ p \mid \texttt{throw}_{\alpha}\ p
\end{array}
$$

Reglas de reducción

Términos :

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{wit}(t,p) & \triangleright & t \\
(\lambda x.t)u & \triangleright & t[u/x] \\
\texttt{rec}\,0\,\texttt{of}\ [t_0 \mid (x,y).t_S] & \triangleright & t_0 \\
\texttt{rec}\,S(t)\,\texttt{of}\ [t_0 \mid (x,y).t_S] & \triangleright & t_S[t/x][\texttt{rec}\,t\,\texttt{of}\ [t_0 \mid (x,y).t_S]/y]
\end{array}
$$

Reglas de reducción

Call-by-value :

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{let}\ a = \iota_i(p)\ \texttt{in}\ q & \triangleright & \texttt{let}\ b = p\ \texttt{in}\ q[\iota_i(b)/a] \\
\texttt{let}\ a = (p_1, p_2)\ \texttt{in}\ q & \triangleright & \texttt{let}\ a_1 = p_1\ \texttt{in}\ \texttt{let}\ a_2 = p_2\ \texttt{in}\ q[(a_1, a_2)/a] \\
\texttt{let}\ a = (t, p)\ \texttt{in}\ q & \triangleright & \texttt{let}\ b = p\ \texttt{in}\ q[(t, b)/a] \\
\texttt{let}\ a = \lambda x.p\ \texttt{in}\ q & \triangleright & q[\lambda x.p/a] \\
\texttt{let}\ a = \lambda b.p\ \texttt{in}\ q & \triangleright & q[\lambda b.p/a] \\
\texttt{let}\ a = ()\ \texttt{in}\ q & \triangleright & q[()/a] \\
\texttt{let}\ a = b\ \texttt{in}\ q & \triangleright & q[b/a] \\
\\
\texttt{case}\ \iota_i(p)\ \texttt{of}\ [a_1.p_1 \mid a_2.p_2] & \triangleright & \texttt{let}\ a_i = p\ \texttt{in}\ p_i \\
\texttt{split}(p_1, p_2)\ \texttt{as}\ (a_1, a_2)\ \texttt{in}\ q & \triangleright & \texttt{let}\ a_1 = p_1\ \texttt{in}\ \texttt{let}\ a_2 = p_2\ \texttt{in}\ q \\
\texttt{dest}(t, p)\ \texttt{as}\ (x, a)\ \texttt{in}\ q & \triangleright & \texttt{let}\ a = p\ \texttt{in}\ q[t/x] \\
\texttt{prf}(t, p) & \triangleright & p \\
(\lambda a.p)q & \triangleright & \texttt{let}\ a = q\ \texttt{in}\ p \\
(\lambda x.p)t & \triangleright & p[t/x] \\
\texttt{subst refl}\ p & \triangleright & p \\
\texttt{ind}\ 0\ \texttt{of}\ [p_0 \mid (x, a).p_S] & \triangleright & p_0 \\
\texttt{ind}\ S(t)\ \texttt{of}\ [p_0 \mid (x, a).p_S] & \triangleright & p_S[t/x][\texttt{ind}\ t\ \texttt{of}\ [p_0 \mid (x, a).p_S]/a]
\end{array}
$$

Reglas de reducción

Lógica clásica :

$$
\begin{array}{lcl}
F[\texttt{exfalso}\, p] & \triangleright & \texttt{exfalso}\, p \\
F[\texttt{throw}_\alpha\, p] & \triangleright & \texttt{throw}_\alpha\, p \\
F[\texttt{catch}_\alpha\, p] & \triangleright & \texttt{catch}_\alpha\, F[p[F/\alpha]] \\
\\
\texttt{exfalso}\,\texttt{exfalso}\, p & \triangleright & \texttt{exfalso}\, p \\
\texttt{exfalso}\,\texttt{throw}_\beta\, p & \triangleright & \texttt{throw}_\beta\, p \\
\texttt{exfalso}\,\texttt{catch}_\alpha\, p & \triangleright & \texttt{exfalso}\, p[\texttt{exfalso}[]/\alpha] \\
\\
\texttt{throw}_\beta\,\texttt{exfalso}\, p & \triangleright & \texttt{exfalso}\, p \\
\texttt{throw}_\beta\,\texttt{throw}_\alpha\, p & \triangleright & \texttt{throw}_\alpha\, p \\
\texttt{throw}_\beta\,\texttt{catch}_\alpha\, p & \triangleright & \texttt{throw}_\beta\, p[\beta/\alpha] \\
\texttt{catch}_\alpha\,\texttt{throw}_\alpha\, p & \triangleright & \texttt{catch}_\alpha\, p \\
\texttt{catch}_\beta\,\texttt{catch}_\alpha\, p & \triangleright & \texttt{catch}_\beta\, p[\beta/\alpha]
\end{array}
$$

Reglas de reducción

Cofix :

- pereza :

$$F_c[] \;::=\; \mathtt{case}[]\,\mathtt{of}\;[a_1.p_1 \mid a_2.p_2] \mid \mathtt{split}[]\,\mathtt{as}\;(a_1,a_2)\;\mathtt{in}\;q \mid \mathtt{dest}[]\,\mathtt{as}\;(x,a)\;\mathtt{in}\;q$$

$$F_c[\mathtt{cofix}^t_{ax}p] \;\triangleright\; \mathtt{let}\;c = \mathtt{cofix}^t_{ax}p\;\mathtt{in}\;F_c[c]$$

- desplegamiento :

$$\mathtt{let}\;a = \mathtt{cofix}^t_{x,b}\;p\;\mathtt{in}\;D[F_c[a]] \;\triangleright\; \mathtt{let}\;a = p[\lambda y.\mathtt{cofix}^y_{bx}p/b][t/x]\;\mathtt{in}\;D[F_c[a]]$$

- control :

$$C[] ::= \mathtt{exfalso}[] \mid \mathtt{throw}_\beta[] \mid \mathtt{catch}_\alpha[]$$

$$\mathtt{let}\;a = \mathtt{cofix}^t_{bx}p\;\mathtt{in}\;C[q] \;\triangleright\; C[\mathtt{let}\;a = \mathtt{cofix}^t_{bx}p\;\mathtt{in}\;q]$$

Reglas de reducción

Fórmulas :

$$
\begin{array}{lcl}
0 = 0 & \triangleright & \top \\
0 = S(u) & \triangleright & \bot \\
S(t) = 0 & \triangleright & \bot \\
S(t) = S(u) & \triangleright & t = u \\
\nu_{fx}^{t} A & \triangleright & A[t/x][\nu_{fx}^{y} A / f(x) = 0]
\end{array}
$$

Tipaje

- Vimos que

$$\texttt{wit}(\texttt{catch}_\alpha\, p) = \text{problemas...}$$

- Vamos a definir una **compartimentación :**

$$\frac{\Gamma \vdash p : \exists x^T A(x) \quad p}{\Gamma \vdash \texttt{prf}\, p : A(\texttt{wit}\, p)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : [a : A] \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash q : A \quad a \notin FV(B) \text{ si } q \text{ no es}}{\Gamma \vdash p\, q : B[q/a]}$$

Negative-elimination-free

$$N, M ::= \ldots \mid \lambda a.p \mid (N, N) \mid \iota_i(N) \mid \texttt{prf}\, N \mid \texttt{let}\, a = M\, \texttt{in}\, N \mid \ldots$$

$\hookrightarrow$ $\texttt{catch}_\alpha, \texttt{throw}_\alpha, \texttt{cofix}^x_{bn}\; p, p\, q, p\, t$ sólo dentro de $\lambda a.p$ o $\lambda x.p$

Tipaje

- Vimos que

$$\mathtt{wit}(\mathtt{catch}_\alpha\, p) = \text{problemas...}$$

- Vamos a definir una **compartimentación :**

$$\frac{\Gamma \vdash p : \exists x^T A(x) \quad p \text{ intuicionista ?}}{\Gamma \vdash \mathtt{prf}\, p : A(\mathtt{wit}\, p)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : [a : A] \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash q : A \quad a \notin FV(B) \text{ si } q \text{ no es intuicionista ?}}{\Gamma \vdash p\, q : B[q/a]}$$

Negative-elimination-free

$$N, M ::= \ldots \mid \lambda a.p \mid (N, N) \mid \iota_i(N) \mid \mathtt{prf}\, N \mid \mathtt{let}\, a = M\, \mathtt{in}\, N \mid \ldots$$

$\hookrightarrow$ $\mathtt{catch}_\alpha, \mathtt{throw}_\alpha, \mathtt{cofix}^x_{bn}$ $p, p\,q, p\,t$ sólo dentro de $\lambda a.p$ o $\lambda x.p$

Tipaje

- Vimos que

$$\texttt{wit}(\texttt{catch}_\alpha\, p) = \text{problemas...}$$

- Vamos a definir una **compartimentación :**

$$\frac{\Gamma \vdash p : \exists x^T A(x) \quad p \quad \textit{valor}?}{\Gamma \vdash \texttt{prf}\, p : A(\texttt{wit}\, p)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : [a : A] \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash q : A \quad a \notin FV(B) \text{ si } q \text{ no es } \textit{valor}?}{\Gamma \vdash p\, q : B[q/a]}$$

Primera aproximación :

Valores

$$V ::= a \mid () \mid \lambda x.p \mid \lambda a.p \mid (t, p) \mid (V, V) \mid \iota_i(V)$$

Negative-elimination-free

$$N, M ::= \ldots \mid \lambda a.p \mid (N, N) \mid \iota_i(N) \mid \texttt{prf}\, N \mid \texttt{let}\, a = M\, \texttt{in}\, N \mid \ldots$$

$\looparrowright$ $\texttt{catch}_\alpha, \texttt{throw}_\alpha, \texttt{cofix}^x_{bn}, p, p\, q, p\, t$ sólo dentro de $\lambda a.p$ o $\lambda x.p$

Tipaje

- Vimos que

$$\mathtt{wit}(\mathtt{catch}_\alpha\, p) = \text{problemas...}$$

- Vamos a definir una **compartimentación :**

$$\frac{\Gamma \vdash p : \exists x^T A(x) \quad p \quad \textbf{Nef}}{\Gamma \vdash \mathtt{prf}\, p : A(\mathtt{wit}\, p)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : [a : A] \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash q : A \quad a \notin FV(B) \text{ si } q \text{ no es } \textbf{Nef}}{\Gamma \vdash p\, q : B[q/a]}$$

Negative-elimination-free

$$N, M ::= \ldots \mid \lambda a.p \mid (N, N) \mid \iota_i(N) \mid \mathtt{prf}\ N \mid \mathtt{let}\ a = M\ \mathtt{in}\ N \mid \ldots$$

$\looparrowright$ $\mathtt{catch}_\alpha, \mathtt{throw}_\alpha, \mathtt{cofix}^x_{bn}\ p, p\,q, p\,t$ sólo dentro de $\lambda a.p$ o $\lambda x.p$

Tipaje

$$\frac{(a:A)\in\Gamma}{\Gamma\vdash a:A}\ \textsc{axiom}\qquad \frac{\Gamma\vdash p:A\qquad A\equiv B}{\Gamma\vdash p:B}\ \textsc{conv}\qquad \frac{}{\Gamma\vdash ():\top}\ \top_I\qquad \frac{\Gamma\vdash p:\bot}{\Gamma\vdash \texttt{exfalso}\ p:C}\ \bot_E$$

$$\frac{\Gamma\vdash p_1:A_1\qquad \Gamma\vdash p_2:A_2}{\Gamma\vdash (p_1,p_2):A_1\wedge A_2}\ \wedge_I\qquad \frac{\Gamma\vdash p:A_i}{\Gamma\vdash \iota_i(p):A_1\vee A_2}\ \vee_I^i$$

$$\frac{\Gamma\vdash p:A_1\wedge A_2\qquad \Gamma,a_1:A_1,a_2:A_2\vdash q:B[(a_1,a_2)/a]\qquad a\notin FV(B)\text{ if } p \text{ not N-elimination-free}\qquad a_1,a_2\notin FV(B)}{\Gamma\vdash \texttt{split}\ p\ \texttt{as}\ (a_1,a_2)\ \texttt{in}\ q:B[p/a]}\ \wedge_E$$

$$\frac{p:A_1\vee A_2\quad \Gamma,a_1:A_1\vdash p_1:B[\iota_1(a_1)/a]\quad \Gamma,a_2:A_2\vdash p_2:B[\iota_2(a_2)/a]\quad a\notin FV(B)\text{ if } p \text{ not N-elimination-free}\quad a_1,a_2\notin FV(B)}{\Gamma\vdash \texttt{case}\ p\ \texttt{of}\ [a_1.p_1\,|\,a_2.p_2]:B[p/a]}\ \vee_E$$

$$\frac{\Gamma,a:A\vdash p:B}{\Gamma\vdash \lambda a.p:[a:A]\to B}\ \to_I\qquad \frac{\Gamma\vdash p:[a:A]\to B\quad \Gamma\vdash q:A\quad a\notin FV(B)\text{ if } q \text{ not N-elimination-free}}{\Gamma\vdash p\,q:B[q/a]}\ \to_E$$

$$\frac{\Gamma,\alpha:A^{\perp\!\!\!\perp}\vdash p:A}{\Gamma\vdash \texttt{catch}_\alpha\ p:A}\ \textsc{catch}\qquad \frac{\Gamma\vdash p:A\qquad (\alpha:A^{\perp\!\!\!\perp})\in\Gamma}{\Gamma\vdash \texttt{throw}_\alpha\ p:C}\ \textsc{throw}$$

Tipaje

$$\frac{\Gamma, x : T \vdash p : A}{\Gamma \vdash \lambda x.p : \forall x^T A}\ \forall_I \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \forall x^T A \qquad \Gamma \vdash t : T}{\Gamma \vdash pt : A[t/x]}\ \forall_E$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A[t/x] \qquad \Gamma \vdash t : T}{\Gamma \vdash (t,p) : \exists x^T A}\ \exists_I \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \exists x^T A \qquad \Gamma, x : T, a : A \vdash q : B}{\Gamma \vdash \texttt{dest}\ p\ \texttt{as}\ (x,a)\ \texttt{in}\ q : B}\ \exists_E$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : \exists x^T A \qquad p \text{ is N-elimination-free}}{\Gamma \vdash \texttt{prf}\, p : A[\texttt{wit}\, p/x]}\ \exists_E^{\mathrm{PRF}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \texttt{refl} : t = t}\ \textsc{refl} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : t = u \qquad \Gamma \vdash q : A[t/x] \qquad x \notin Dom(\Gamma)}{\Gamma \vdash \texttt{subst}\, p\, q : A[u/x]}\ \textsc{subst}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \mathbb{N} \qquad \Gamma \vdash p : A[0/x] \qquad \Gamma, x : T, a : A \vdash q : A[S(x)/x]}{\Gamma \vdash \texttt{ind}\ t\ \texttt{of}\ [p \mid (x,a).q] : A[t/x]}\ \textsc{ind}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A \qquad \Gamma, a : A \vdash q : B \qquad a \notin FV(B) \text{ if } p \text{ not N-elimination-free}}{\Gamma \vdash \texttt{let}\ a = p\ \texttt{in}\ q : B[p/a]}\ \textsc{cut}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : T \qquad \Gamma, f : T \to \mathbb{N}, x : T, b : \forall y\, f(y) = 0 \vdash p : A \qquad f \text{ positive in } A}{\Gamma \vdash \texttt{cofix}^t_{bx} p : \nu^t_{fx} A}\ \nu_I$$

Tipaje

$$\frac{(x:T)\in\Gamma}{\Gamma\vdash x:T}\qquad\frac{\Gamma,x:U\vdash t:T}{\Gamma\vdash\lambda x.t:U\to T}\qquad\frac{\Gamma\vdash t:U\to T\qquad\Gamma\vdash u:U}{\Gamma\vdash t\,u:T}\qquad\frac{}{\Gamma\vdash 0:\mathbb{N}}\qquad\frac{\Gamma\vdash t:\mathbb{N}}{\Gamma\vdash S(t):\mathbb{N}}$$

$$\frac{\Gamma\vdash t:\mathbb{N}\qquad\Gamma\vdash t_0:U\qquad\Gamma,x:\mathbb{N},y:U\vdash t_S:U}{\Gamma\vdash\mathtt{rec}\ t\ \mathtt{of}\ [t_0\,|\,(x,y).t_S]:U}\qquad\frac{\Gamma\vdash p:\exists x^T A\quad p\text{ is N-elimination-free}}{\Gamma\vdash\mathtt{wit}\,p:T}\,\exists_E^{\mathrm{WIT}}$$

Elección numerable

Elección numerable

$$\begin{aligned} AC_{\mathbb{N}} &:= ?? \\ &: \forall n \exists y P(n,y) \rightarrow \exists f \forall n P(n, f(n)) \end{aligned}$$

Elección numerable

Elección numerable

$$\begin{array}{rcl} AC_{\mathbb{N}} & := & \lambda H.\mathtt{let}\, a = \mathtt{cofix}^0_{bn}\ (Hn, b(S(n))) \\ & & \qquad \mathtt{in}\,(\lambda n.\,\mathtt{wit}(\mathtt{nth}(n,a)), \lambda n.\,\mathtt{prf}(\mathtt{nth}(n,a))) \\ & : & \forall n \exists y P(n,y) \to \exists f \forall n P(n, f(n)) \end{array}$$

dónde

$$\mathtt{nth}(n,a) \quad := \quad \pi_1(\mathtt{ind}\ n\ \mathtt{of}\ [a \mid (x,c).\pi_2(c)])$$

Proof :

↬ pizarrón

Elección numerable

Elección numerable

$$
\begin{array}{rcl}
AC_{\mathbb{N}} & := & \lambda H.\mathtt{let}\, a = \mathtt{cofix}^0_{bn}\ (Hn, b(S(n))) \\
 & & \qquad \mathtt{in}\, (\lambda n.\, \mathtt{wit}(\mathtt{nth}(n,a)), \lambda n.\, \mathtt{prf}(\mathtt{nth}(n,a))) \\
 & : & \forall n \exists y P(n,y) \to \exists f \forall n P(n, f(n))
\end{array}
$$

dónde

$$\mathtt{nth}(n,a) \ := \ \pi_1(\mathtt{ind}\ n\, \mathtt{of}\ [a \mid (x,c).\pi_2(c)])$$

Proof :

$\looparrowright$ pizarrón

Elección dependiente

Elección dependiente

$$
\begin{array}{rcl}
DC & := & ?? \\
 & : & \forall x \exists y P(x,y) \\
 & & \rightarrow \forall x_0 \exists f (f(0) = x_0 \land \forall n P(f(n), f(S(n))))
\end{array}
$$

Elección dependiente

Elección dependiente

$$
\begin{array}{rcl}
DC & := & \lambda H \lambda x_0.\mathtt{let}\, b = \mathtt{s}\, H\, x_0\, \mathtt{in} \\
 & & \qquad\qquad (\lambda n.\, \mathtt{wit}(\mathtt{nth}(n, x_0, b)), \\
 & & \qquad\qquad \mathtt{refl}, \lambda n.\pi_1(\mathtt{prf}(\mathtt{prf}(\mathtt{nth}(n, x_0, b))))) \\
 & : & \forall x \exists y P(x, y) \\
 & & \to \forall x_0 \exists f (f(0) = x_0 \land \forall n P(f(n), f(S(n))))
\end{array}
$$

dónde

$$
\begin{array}{rcl}
\mathtt{s}\, a\, x & := & \mathtt{cofix}^{x}_{bn}\ \mathtt{dest}\, b\, n\, \mathtt{as}\, (y, c)\, \mathtt{in}\, (y, (c, b\, y)) \\
\mathtt{nth}(n, x_0, b) & := & \mathtt{ind}\, n\, \mathtt{of} \\
 & & [b \mid (m, c).(\mathtt{wit}(\mathtt{prf}(c), \pi_2(\mathtt{prf}(\mathtt{prf}(c)))))]
\end{array}
$$

Propiedades ?

Nos gustaría tener las propiedades siguiente :

Subject reduction

Si $\Gamma \vdash p : A$ y $p \triangleright q$, entonces $\Gamma \vdash q : A$.

Normalización

Si $\Gamma \vdash p : A$ entonces p se normaliza.

Correción

$$\nvdash_{dPA^\omega} \bot$$

La respuesta en el próximo capítulo !