Realizabilidad clásica : una introducción

Étienne Miquey

ENS Lyon, FING

20 de Diciembre 2013

Correspondencia pruebas/programas

Correspondencia de Curry-Howard

Teoría de la demostración	Prog. funcional
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

- Matemáticas constructivas: lógica intuicionista
- Correspondencia estricta:

```
let stupid n =
          if n=n+1 then 27 else true
```

Correspondencia pruebas/programas

Correspondencia de Curry-Howard

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \to B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \to B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

- Matemáticas constructivas: lógica intuicionista
- Correspondencia estricta:

```
let stupid n =
            if n=n+1 then 27 else true
```

Correspondencia pruebas/programas

Correspondencia de Curry-Howard

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \to B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \to B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

- Matemáticas constructivas: lógica intuicionista
- Correspondencia estricta:

```
let stupid n =
          if n=n+1 then 27 else true
```

Correspondencia pruebas/programas

Correspondencia de Curry-Howard

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

- Matemáticas constructivas: lógica intuicionista
- Correspondencia estricta:

```
let stupid n =
           if n=n+1 then 27 else true
```

Correspondencia pruebas/programas

Correspondencia de Curry-Howard

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

- Matemáticas constructivas: lógica intuicionista
- Correspondencia estricta:

```
let stupid n =
          if n=n+1 then 27 else true
```

Correspondencia pruebas/programas

Correspondencia de Curry-Howard

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

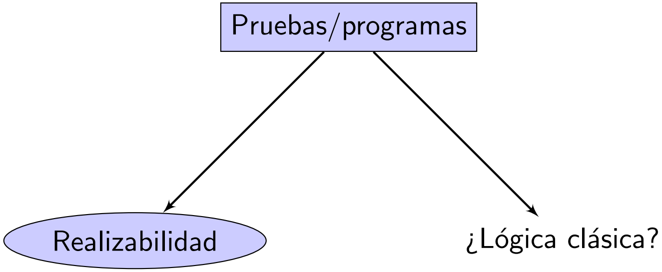
- Matemáticas constructivas: lógica intuicionista
- Correspondencia estricta:

```
let stupid n =
          if n=n+1 then 27 else true
```

Correspondencia pruebas/programas

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{Pruebas/programas}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{¿Demasiado estricta?} & & \text{¿Lógica clásica?}
\end{tikzcd}
$$

Relajamiento: realizabilidad



Relajamiento: realizabilidad

Realizadores

- $t \Vdash \mathrm{Nat}$ si $t \succ \overline{n}$
- $t \Vdash A \Rightarrow B$ si $u \Vdash A$ implica $(t)u \Vdash B$

- Términos cerrados: no contexto
- Definición puramente computacional: no sintaxis
- Relación $t \Vdash A$ indecidible

Relajamiento: realizabilidad

Realizadores

- $t \Vdash \mathrm{Nat}$ si $t \succ \overline{n}$
- $t \Vdash A \Rightarrow B$ si $u \Vdash A$ implica $(t)u \Vdash B$

- Términos cerrados: no contexto
- Definición puramente computacional: no sintaxis
- Relación $t \Vdash A$ indecidible

Lógica clásica

Griffin, 1990

$$\texttt{call/cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

- Lógica intuicionista + Ley de Peirce = Lógica clásica
- Curry-Howard clásico :
  - Añadir un operador de control
  - Añadir la regla de tipaje correspondiente
- Problema: análisis de los programas

Lógica clásica

Griffin, 1990

$$\texttt{call/cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

- Lógica intuicionista + Ley de Peirce = Lógica clásica
- Curry-Howard clásico :
  - Añadir un operador de control
  - Añadir la regla de tipaje correspondiente
- Problema: análisis de los programas

Lógica clásica

Griffin, 1990

$$\texttt{call/cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

- Lógica intuicionista + Ley de Peirce = Lógica clásica
- Curry-Howard clásico :
  - Añadir un operador de control
  - Añadir la regla de tipaje correspondiente
- Problema: análisis de los programas

Lógica clásica

Griffin, 1990

$$\texttt{call/cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

- Lógica intuicionista + Ley de Peirce = Lógica clásica
- Curry-Howard clásico :
  - Añadir un operador de control
  - Añadir la regla de tipaje correspondiente
- Problema: análisis de los programas

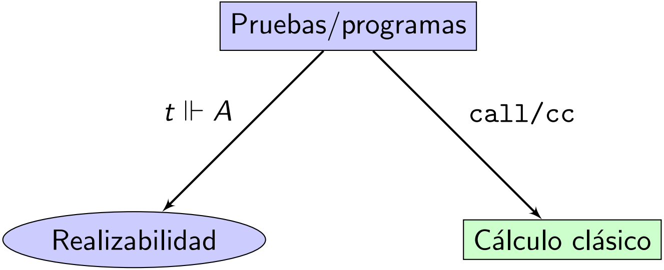
Lógica clásica

Griffin, 1990

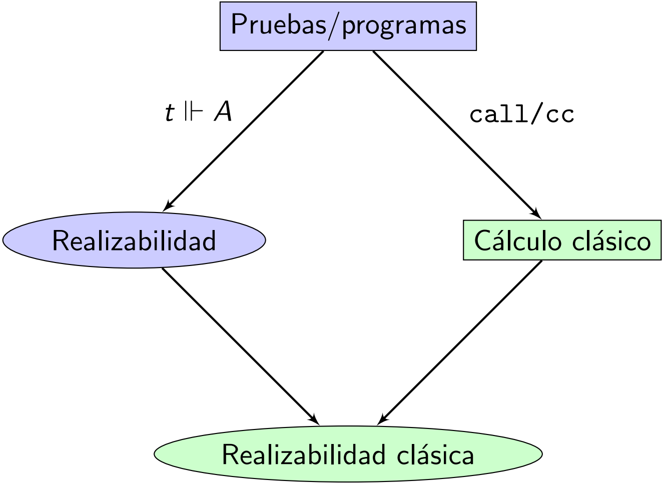
$$\texttt{call/cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

- Lógica intuicionista + Ley de Peirce = Lógica clásica
- Curry-Howard clásico :
  - Añadir un operador de control
  - Añadir la regla de tipaje correspondiente
- Problema: análisis de los programas

Realizabilidad clásica



Realizabilidad clásica



λ_c-cálculo

Términos, pilas, procesos

$\mathcal{B}$: constantes de pilas

$\mathcal{C}$: instrucciones (cuyas **cc**), numerable

Términos	t, u	$::=$	$x \mid \lambda x.t \mid tu \mid \mathbf{k}_\pi \mid \kappa$	$\kappa \in \mathcal{C}$
Pilas	π	$::=$	$\alpha \mid t \cdot \pi$	$(\alpha \in \mathcal{B}, t$ cerrado$)$
Procesos	p, q	$::=$	$t \star \pi$	$(t$ cerrado$)$

KAM

$\vdots$

λ_c-cálculo

Términos, pilas, procesos

$\mathcal{B}$: constantes de pilas

$\mathcal{C}$: instrucciones (cuyas **cc**), numerable

Términos	t, u	$::=$	$x \mid \lambda x.t \mid tu \mid \mathbf{k}_\pi \mid \kappa$	$\kappa \in \mathcal{C}$
Pilas	π	$::=$	$\alpha \mid t \cdot \pi$	$(\alpha \in \mathcal{B}, t$ cerrado$)$
Procesos	p, q	$::=$	$t \star \pi$	$(t$ cerrado$)$

KAM

$$\begin{array}{rrcl}
\textsc{Push}: & (t)u \star \pi & \succ_1 & t \star u \cdot \pi \\
\textsc{Grab}: & \lambda x.t \star u \cdot \pi & \succ_1 & t\{x := u\} \star \pi \\
 \vdots & & &
\end{array}$$

λ_c-cálculo

Términos, pilas, procesos

$\mathcal{B}$: constantes de pilas

$\mathcal{C}$: instrucciones (cuyas $\boldsymbol{c\!c}$), numerable

Términos	t, u	$::=$	$x \mid \lambda x.t \mid tu \mid \mathbf{k}_\pi \mid \kappa$	$\kappa \in \mathcal{C}$
Pilas	π	$::=$	$\alpha \mid t \cdot \pi$	$(\alpha \in \mathcal{B}, t$ cerrado$)$
Procesos	p, q	$::=$	$t \star \pi$	$(t$ cerrado$)$

KAM

$$\begin{array}{rcrcl}
\textsc{Push} & : & (t)u \star \pi & \succ_1 & t \star u \cdot \pi \\
\textsc{Grab} & : & \lambda x.t \star u \cdot \pi & \succ_1 & t\{x := u\} \star \pi \\
\textsc{Save} & : & \boldsymbol{c\!c} \star t \cdot \pi & \succ_1 & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\
\textsc{Restore} & : & \mathbf{k}_\pi \star t \cdot \rho & \succ_1 & t \star \pi
\end{array}$$

λ_c-cálculo

Términos, pilas, procesos

$\mathcal{B}$: constantes de pilas

$\mathcal{C}$: instrucciones (cuyas $\mathbf{cc}$), numerable

Términos	t, u	$::=$	$x \mid \lambda x.t \mid tu \mid \mathbf{k}_\pi \mid \kappa$	$\kappa \in \mathcal{C}$
Pilas	π	$::=$	$\alpha \mid t \cdot \pi$	$(\alpha \in \mathcal{B}, t$ cerrado$)$
Procesos	p, q	$::=$	$t \star \pi$	$(t$ cerrado$)$

KAM

$$\begin{array}{rcrcl}
\textsc{Push} & : & (t)u \star \pi & \succ_1 & t \star u \cdot \pi \\
\textsc{Grab} & : & \lambda x.t \star u \cdot \pi & \succ_1 & t\{x := u\} \star \pi \\
\textsc{Save} & : & \mathbf{cc} \star t \cdot \pi & \succ_1 & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\
\textsc{Restore} & : & \mathbf{k}_\pi \star t \cdot \rho & \succ_1 & t \star \pi
\end{array}$$

λ_c-cálculo

Términos, pilas, procesos

$\mathcal{B}$: constantes de pilas

$\mathcal{C}$: instrucciones (cuyas $\mathbf{c\!\!c}$), numerable

$$\begin{array}{llcll} \textbf{Términos} & t, u & ::= & x \mid \lambda x.t \mid tu \mid \mathbf{k}_\pi \mid \kappa & \kappa \in \mathcal{C} \\ \textbf{Pilas} & \pi & ::= & \alpha \mid t \cdot \pi & (\alpha \in \mathcal{B}, t \text{ cerrado}) \\ \textbf{Procesos} & p, q & ::= & t \star \pi & (t \text{ cerrado}) \end{array}$$

KAM + $\mathcal{C}$ extendido

$$\begin{array}{lccc} \textsc{Save}: & \mathbf{c\!\!c} \star t \cdot \pi & \succ_1 & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\ \vdots & & & \end{array}$$

λ_c-cálculo

Términos, pilas, procesos

$\mathcal{B}$: constantes de pilas

$\mathcal{C}$: instrucciones (cuyas œ), numerable

Términos	t, u	$::=$	$x \mid \lambda x.t \mid tu \mid \mathbf{k}_\pi \mid \kappa$	$\kappa \in \mathcal{C}$
Pilas	π	$::=$	$\alpha \mid t \cdot \pi$	$(\alpha \in \mathcal{B}, t \text{ cerrado})$
Procesos	p, q	$::=$	$t \star \pi$	$(t \text{ cerrado})$

KAM + $\mathcal{C}$ extendido

$$
\begin{array}{llrcl}
\textsc{Save} & : & \text{œ} \star t \cdot \pi & \succ_1 & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\
\textsc{Quote} & : & \mathtt{quote} \star \phi \cdot t \cdot \pi & \succ_1 & t \star \overline{n_\phi} \cdot \pi \\
 & \vdots & & &
\end{array}
$$

λ_c-cálculo

Términos, pilas, procesos

$\mathcal{B}$: constantes de pilas

$\mathcal{C}$: instrucciones (cuyas cc), numerable

$$
\begin{array}{llcll}
\textbf{Términos} & t,u & ::= & x \mid \lambda x.t \mid tu \mid \mathbf{k}_\pi \mid \kappa & \kappa \in \mathcal{C} \\
\textbf{Pilas} & \pi & ::= & \alpha \mid t\cdot\pi & (\alpha \in \mathcal{B}, t \text{ cerrado}) \\
\textbf{Procesos} & p,q & ::= & t \star \pi & (t \text{ cerrado})
\end{array}
$$

KAM + $\mathcal{C}$ extendido

$$
\begin{array}{lrcl}
\textsc{Save}: & \text{cc} \star t\cdot\pi & \succ_1 & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\
\textsc{Quote}: & \texttt{quote} \star \phi \cdot t \cdot \pi & \succ_1 & t \star \overline{n_\phi} \cdot \pi \\
\textsc{Fork}: & \pitchfork \star t \cdot u \cdot \pi & \succ_1 & t \star \pi \\
\textsc{Fork}: & \pitchfork \star t \cdot u \cdot \pi & \succ_1 & u \star \pi
\end{array}
$$

Aritmética de secundo orden

Lenguaje

Expresiones	e	$::=$	$x \mid f(e_1, \ldots, e_k)$
Formulas	A, B	$::=$	$X(e_1, \ldots, e_k) \mid A \Rightarrow B \mid \forall x A \mid \forall X A$

Abreviaciones :

$$
\begin{array}{rcl}
\bot & \equiv & \forall Z.Z \\
\neg A & \equiv & A \Rightarrow \bot \\
A \wedge B & \equiv & \forall Z((A \Rightarrow B \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
A \vee B & \equiv & \forall Z((A \Rightarrow Z) \Rightarrow (B \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
A \Leftrightarrow B & \equiv & (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \\
\exists x A(x) & \equiv & \forall Z(\forall x(A(x) \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
\exists X A(X) & \equiv & \forall Z(\forall X(A(X) \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
e_1 = e_2 & \equiv & \forall Z(Z(e_1) \Rightarrow Z(e_2))
\end{array}
$$

Aritmética de secundo orden

Lenguaje

Expresiones	e	$::=$	$x \mid f(e_1, \dots, e_k)$
Formulas	A, B	$::=$	$X(e_1, \dots, e_k) \mid A \Rightarrow B \mid \forall x A \mid \forall X A$

Abreviaciones :

$$\begin{array}{rcl}
\bot & \equiv & \forall Z.Z \\
\neg A & \equiv & A \Rightarrow \bot \\
A \wedge B & \equiv & \forall Z((A \Rightarrow B \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
A \vee B & \equiv & \forall Z((A \Rightarrow Z) \Rightarrow (B \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
A \Leftrightarrow B & \equiv & (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \\
\exists x A(x) & \equiv & \forall Z(\forall x (A(x) \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
\exists X A(X) & \equiv & \forall Z(\forall X (A(X) \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
e_1 = e_2 & \equiv & \forall Z(Z(e_1) \Rightarrow Z(e_2))
\end{array}$$

Reglas de tipaje

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : A}\ (x : A) \in \Gamma \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t : \top}\ FV(t) \subset \mathrm{dom}(\Gamma)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash tu : B} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x.t : A \Rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash t : \forall x.A}\ x \notin FV(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : \forall x.A}{\Gamma \vdash t : A\{x := e\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash t : \forall X.A}\ X \notin FV(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : \forall X.A}{\Gamma \vdash t : A\{X(x_1, \ldots, x_k) := B\}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{c\!c} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}$$

Semántica

Intuición

- valor de falsedad $\|A\|$: pilas, oponente a A
- valor de verdad $|A|$: términos, defensor de A
- polo $\perp\!\!\!\perp$: conjunto de procesos, árbitro

$$t \star \pi \succ p_0 \succ \cdots \succ p_n \in \perp\!\!\!\perp ?$$

$\rightsquigarrow \perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción

Valor de verdad definida por **ortogonalidad** :

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Caso particular : $\perp\!\!\!\perp = \emptyset \Rightarrow$ Modelo estándar (verdad/falso)

Semántica

Intuición

- valor de falsedad $\|A\|$: pilas, oponente a A
- valor de verdad $|A|$: términos, defensor de A
- polo $\perp\!\!\!\perp$: conjunto de procesos, árbitro

$$t \star \pi \succ p_0 \succ \cdots \succ p_n \in \perp\!\!\!\perp ?$$

$\rightsquigarrow \perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción

Valor de verdad definida por **ortogonalidad** :

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Caso particular : $\perp\!\!\!\perp = \emptyset \Rightarrow$ Modelo estándar (verdad/falso)

Semántica

Intuición

- valor de falsedad $\|A\|$: pilas, oponente a A
- valor de verdad $|A|$: términos, defensor de A
- polo $\perp\!\!\!\perp$: conjunto de procesos, árbitro

$$t \star \pi \succ p_0 \succ \cdots \succ p_n \in \perp\!\!\!\perp ?$$

$\rightsquigarrow \perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción

Valor de verdad definida por **ortogonalidad** :

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Caso particular : $\perp\!\!\!\perp = \emptyset \Rightarrow$ Modelo estándar (verdad/falso)

Semántica

Intuición

- valor de falsedad $\|A\|$: pilas, oponente a A
- valor de verdad $|A|$: términos, defensor de A
- polo $\perp\!\!\!\perp$: conjunto de procesos, árbitro

$$t \star \pi \succ p_0 \succ \cdots \succ p_n \in \perp\!\!\!\perp?$$

$\rightsquigarrow \perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción

Valor de verdad definida por **ortogonalidad** :

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Caso particular : $\perp\!\!\!\perp = \emptyset \Rightarrow$ Modelo estándar (verdad/falso)

Semántica

Intuición

- valor de falsedad $\|A\|$: pilas, oponente a A
- valor de verdad $|A|$: términos, defensor de A
- polo $\perp\!\!\!\perp$: conjunto de procesos, árbitro

$$t \star \pi \succ p_0 \succ \cdots \succ p_n \in \perp\!\!\!\perp ?$$

$\rightsquigarrow \perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción

Valor de verdad definida por **ortogonalidad** :

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Caso particular : $\perp\!\!\!\perp = \emptyset \Rightarrow$ Modelo estándar (verdad/falso)

Semántica

Intuición

- valor de falsedad $\|A\|$: pilas, oponente a A
- valor de verdad $|A|$: términos, defensor de A
- polo $\perp\!\!\!\perp$: conjunto de procesos, árbitro

$$t \star \pi \succ p_0 \succ \cdots \succ p_n \in \perp\!\!\!\perp ?$$

$\rightsquigarrow \perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción

Valor de verdad definida por **ortogonalidad** :

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Caso particular : $\perp\!\!\!\perp = \emptyset \Rightarrow$ Modelo estándar (verdad/falso)

Semántica

Intuición

- valor de falsedad $\|A\|$: pilas, oponente a A
- valor de verdad $|A|$: términos, defensor de A
- polo $\perp\!\!\!\perp$: conjunto de procesos, árbitro

$$t \star \pi \succ p_0 \succ \cdots \succ p_n \in \perp\!\!\!\perp ?$$

$\rightsquigarrow \perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción

Valor de verdad definida por **ortogonalidad** :

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Caso particular : $\perp\!\!\!\perp = \emptyset \Rightarrow$ Modelo estándar (verdad/falso)

Semántica

Intuición

- valor de falsedad $\|A\|$: pilas, oponente a A
- valor de verdad $|A|$: términos, defensor de A
- polo $\perp\!\!\!\perp$: conjunto de procesos, árbitro

$$t \star \pi \succ p_0 \succ \cdots \succ p_n \in \perp\!\!\!\perp?$$

$\rightsquigarrow \perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción

Valor de verdad definida por **ortogonalidad** :

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Caso particular : $\perp\!\!\!\perp = \emptyset \Rightarrow$ Modelo estándar (verdad/falso)

Semántica

Intuición

- valor de falsedad $\|A\|$: pilas, oponente a A
- valor de verdad $|A|$: términos, defensor de A
- polo $\perp\!\!\!\perp$: conjunto de procesos, árbitro

$$t \star \pi \succ p_0 \succ \cdots \succ p_n \in \perp\!\!\!\perp ?$$

$\rightsquigarrow$ $\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción

Valor de verdad definida por **ortogonalidad** :

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Caso particular : $\perp\!\!\!\perp = \emptyset \Rightarrow$ Modelo estándar (verdad/falso)

Semántica

Polo

$\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción :

$$\forall p, p' \in \Lambda_c \star \Pi : \quad (p \succ p') \wedge (p' \in \perp\!\!\!\perp) \Rightarrow p \in \perp\!\!\!\perp$$

Valor de verdad (defensores):

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Valor de falsedad (opponentes):

- $\|\forall x A\| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|A\{x := n\}\|$
- $\|\forall X A\| = \bigcup_{\dot{F}:\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\Pi)} \|A\{X := \dot{F}\}\|$
- $\|\dot{F}(e_1, ..., e_k)\| = F([\![e_1]\!], \ldots, [\![e_k]\!])$
- $\|A \Rightarrow B\| = \{t \cdot \pi : t \in |A| \text{ y } \pi \in \|B\|\}$

Semántica

Polo

$\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción :

$$\forall p, p' \in \Lambda_c \star \Pi : \quad (p \succ p') \wedge (p' \in \perp\!\!\!\perp) \Rightarrow p \in \perp\!\!\!\perp$$

Valor de verdad (defensores):

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Valor de falsedad (opponentes):

- $\|\forall x A\| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|A\{x := n\}\|$
- $\|\forall X A\| = \bigcup_{\dot{F} : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\Pi)} \|A\{X := \dot{F}\}\|$
- $\|\dot{F}(e_1, \dots, e_k)\| = F([\![e_1]\!], \dots, [\![e_k]\!])$
- $\|A \Rightarrow B\| = \{t \cdot \pi : t \in |A| \text{ y } \pi \in \|B\|\}$

Semántica

Polo

$\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción :

$$\forall p, p' \in \Lambda_c \star \Pi : \quad (p \succ p') \wedge (p' \in \perp\!\!\!\perp) \Rightarrow p \in \perp\!\!\!\perp$$

Valor de verdad (defensores):

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Valor de falsedad (opponentes):

- $\|\forall x A\| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|A\{x := n\}\|$
- $\|\forall X A\| = \bigcup_{\dot{F} : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\Pi)} \|A\{X := \dot{F}\}\|$
- $\|\dot{F}(e_1, ..., e_k)\| = F([\![e_1]\!], \ldots, [\![e_k]\!])$
- $\|A \Rightarrow B\| = \{t \cdot \pi : t \in |A| \text{ y } \pi \in \|B\|\}$

Semántica

Polo

$\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción :

$$\forall p, p' \in \Lambda_c \star \Pi : \quad (p \succ p') \wedge (p' \in \perp\!\!\!\perp) \Rightarrow p \in \perp\!\!\!\perp$$

Valor de verdad (defensores):

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Valor de falsedad (opponentes):

- $\|\forall x A\| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|A\{x := n\}\|$
- $\|\forall X A\| = \bigcup_{\dot{F} : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\Pi)} \|A\{X := \dot{F}\}\|$
- $\|\dot{F}(e_1, ..., e_k)\| = F([\![e_1]\!], \dots, [\![e_k]\!])$
- $\|A \Rightarrow B\| = \{t \cdot \pi : t \in |A| \text{ y } \pi \in \|B\|\}$

Semántica

Polo

$\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción :

$$\forall p, p' \in \Lambda_c \star \Pi : \quad (p \succ p') \wedge (p' \in \perp\!\!\!\perp) \Rightarrow p \in \perp\!\!\!\perp$$

Valor de verdad (defensores):

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Valor de falsedad (opponentes):

- $\|\forall x A\| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|A\{x := n\}\|$
- $\|\forall X A\| = \bigcup_{\dot{F}:\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\Pi)} \|A\{X := \dot{F}\}\|$
- $\|\dot{F}(e_1, ..., e_k)\| = F([\![e_1]\!], \ldots, [\![e_k]\!])$
- $\|A \Rightarrow B\| = \{t \cdot \pi : t \in |A| \text{ y } \pi \in \|B\|\}$

Semántica

Polo

$\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción :

$$\forall p, p' \in \Lambda_c \star \Pi : \quad (p \succ p') \wedge (p' \in \perp\!\!\!\perp) \Rightarrow p \in \perp\!\!\!\perp$$

Valor de verdad (defensores):

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Valor de falsedad (opponentes):

- $\|\forall x A\| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|A\{x := n\}\|$
- $\|\forall X A\| = \bigcup_{\dot{F} : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\Pi)} \|A\{X := \dot{F}\}\|$
- $\|\dot{F}(e_1, ..., e_k)\| = F([\![e_1]\!], \ldots, [\![e_k]\!])$
- $\|A \Rightarrow B\| = \{t \cdot \pi : t \in |A| \text{ y } \pi \in \|B\|\}$

Semántica

Polo

$\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción

Valor de verdad (defensores):

$$|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in \|A\|, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Valor de falsedad (opponentes):

- $\|\forall x A\| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|A\{x := n\}\|$
- $\|\forall X A\| = \bigcup_{\dot{F}:\mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\Pi)} \|A\{X := \dot{F}\}\|$
- $\|\dot{F}(e_1, ..., e_k)\| = F(\llbracket e_1 \rrbracket, \ldots, \llbracket e_k \rrbracket)$
- $\|A \Rightarrow B\| = \{t \cdot \pi : t \in |A| \text{ y } \pi \in \|B\|\}$

Notación

$$\begin{array}{lll} t \Vdash A & \text{ssi} & t \in |A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp} \\ t \,|\!\!\Vdash A & \text{ssi} & t \Vdash A \;\; \text{para todo } \perp\!\!\!\perp \end{array}$$

Observaciones

Caso $\perp\!\!\!\perp = \emptyset$ (Modelo degenerado)

- Verdadera igual a la del modelo estándar :

$$\|A\| = \begin{cases} \Lambda & \text{si } [\![A]\!] = 1 \\ \emptyset & \text{si } [\![A]\!] = 0 \end{cases}$$

- Realizable $\Leftrightarrow$ Verdad en el modelo estándar

Caso $\perp\!\!\!\perp \neq \emptyset$

- $t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp \Rightarrow$ para todo A, $\mathbf{k}_\pi t \Vdash A$
- Restricción a las **casi-pruebas**

Observaciones

Caso $\perp\!\!\!\perp = \emptyset$ (Modelo degenerado)

- Verdadera igual a la del modelo estándar :

$$\|A\| = \begin{cases} \Lambda & \text{si } [\![A]\!] = 1 \\ \emptyset & \text{si } [\![A]\!] = 0 \end{cases}$$

- Realizable $\Leftrightarrow$ Verdad en el modelo estándar

Caso $\perp\!\!\!\perp \neq \emptyset$

- $t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp \Rightarrow$ para todo A, $\mathbf{k}_\pi t \Vdash A$
- Restricción a las **casi-pruebas**

Observaciones

Caso $\perp\!\!\!\perp = \emptyset$ (Modelo degenerado)

- Verdadera igual a la del modelo estándar :

$$\|A\| = \begin{cases} \Lambda & \text{si } [\![A]\!] = 1 \\ \emptyset & \text{si } [\![A]\!] = 0 \end{cases}$$

- Realizable $\Leftrightarrow$ Verdad en el modelo estándar

Caso $\perp\!\!\!\perp \neq \emptyset$

- $t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp \Rightarrow$ para todo A, $\mathbf{k}_\pi t \Vdash A$
- Restricción a las **casi-pruebas**

$\mathbf{cc} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

KAM

$$\begin{array}{lclcl} \textsc{Save} & : & \mathbf{cc} \star t \cdot \pi & \succ_1 & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\ \textsc{Restore} & : & \mathbf{k}_\pi \star t \cdot \rho & \succ_1 & t \star \pi \end{array}$$

- ¿$\mathbf{cc} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$?

$\mathbf{cc} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

KAM

$$\begin{array}{lcccc} \textsc{Save} & : & \mathbf{cc} \star t \cdot \pi & \succ_1 & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\ \textsc{Restore} & : & \mathbf{k}_\pi \star t \cdot \rho & \succ_1 & t \star \pi \end{array}$$

- ¿$\mathbf{cc} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$? Consideramos $u \in |(A \Rightarrow B) \Rightarrow A|$, $\pi \in \|A\|$:

$$¿\mathbf{cc} \star u \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp?$$

$\text{œ} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

KAM

$$\begin{array}{lclcl} \textsc{Save} & : & \text{œ} \star t \cdot \pi & \succ_1 & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\ \textsc{Restore} & : & \mathbf{k}_\pi \star t \cdot \rho & \succ_1 & t \star \pi \end{array}$$

- ¿$\text{œ} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$? Consideramos $u \in |(A \Rightarrow B) \Rightarrow A|$, $\pi \in \|A\|$:

$$¿\text{œ} \star u \cdot \pi \ \succ u \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp?$$

$\mathbf{c\!c} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

KAM

$$\begin{array}{lcrcl} \textsc{Save} & : & \mathbf{c\!c} \star t \cdot \pi & \succ_1 & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\ \textsc{Restore} & : & \mathbf{k}_\pi \star t \cdot \rho & \succ_1 & t \star \pi \end{array}$$

- ¿$\mathbf{c\!c} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$? Consideramos $u \in |(A \Rightarrow B) \Rightarrow A|$, $\pi \in \|A\|$:

$$¿\mathbf{c\!c} \star u \cdot \pi \ \succ u \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp ?$$

- ¿$\mathbf{k}_\pi \cdot \pi \in \|(A \Rightarrow B) \Rightarrow A\|$?

$\mathbf{cc} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

KAM

$$\begin{array}{llcl} \textsc{Save} & : & \mathbf{cc} \star t \cdot \pi & \succ_1 & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\ \textsc{Restore} & : & \mathbf{k}_\pi \star t \cdot \rho & \succ_1 & t \star \pi \end{array}$$

- ¿$\mathbf{cc} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$? Consideramos $u \in |(A \Rightarrow B) \Rightarrow A|$, $\pi \in \|A\|$:

$$¿\mathbf{cc} \star u \cdot \pi \;\succ u \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp?$$

- ¿$\mathbf{k}_\pi \Vdash A \Rightarrow B$?

$\mathbf{c\!c} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

KAM

$$\begin{array}{lcccl} \textsc{Save} & : & \mathbf{c\!c} \star t \cdot \pi & \succ_1 & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\ \textsc{Restore} & : & \mathbf{k}_\pi \star t \cdot \rho & \succ_1 & t \star \pi \end{array}$$

- ¿$\mathbf{c\!c} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$? Consideramos $u \in |(A \Rightarrow B) \Rightarrow A|$, $\pi \in \|A\|$:

$$¿\mathbf{c\!c} \star u \cdot \pi \ \succ u \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp?$$

- ¿$\mathbf{k}_\pi \Vdash A \Rightarrow B$? Consideramos $v \in |A|$, $\pi' \in \|B\|$:

$$\mathbf{k}_\pi \star v \cdot \pi'$$

$\mathbf{cc} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

KAM

$$\begin{array}{lcl} \textsc{Save} : & \mathbf{cc} \star t \cdot \pi \succ_1 t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\ \textsc{Restore} : & \mathbf{k}_\pi \star t \cdot \rho \succ_1 t \star \pi \end{array}$$

- ¿$\mathbf{cc} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$? Consideramos $u \in |(A \Rightarrow B) \Rightarrow A|$, $\pi \in \|A\|$:

$$¿\mathbf{cc} \star u \cdot \pi \succ u \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp ?$$

- ¿$\mathbf{k}_\pi \Vdash A \Rightarrow B$? Consideramos $v \in |A|$, $\pi' \in \|B\|$:

$$\mathbf{k}_\pi \star v \cdot \pi' \succ v \star \pi$$

$\text{œ} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

KAM

$$\begin{array}{lclcl} \textsc{Save} & : & \text{œ} \star t \cdot \pi & \succ_1 & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\ \textsc{Restore} & : & \mathbf{k}_\pi \star t \cdot \rho & \succ_1 & t \star \pi \end{array}$$

- ¿$\text{œ} \Vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$? Consideramos $u \in |(A \Rightarrow B) \Rightarrow A|$, $\pi \in \|A\|$:

$$¿\text{œ} \star u \cdot \pi \succ u \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp ?$$

- ¿$\mathbf{k}_\pi \Vdash A \Rightarrow B$? Consideramos $v \in |A|$, $\pi' \in \|B\|$:

$$\mathbf{k}_\pi \star v \cdot \pi' \succ v \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$$

Realizabilidad vs Tipaje

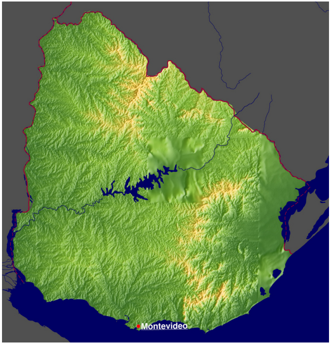
Lema de adecuación

$$\begin{cases} x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash t : A \\ \forall i \in [1,k](t_i \Vdash A_i) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t[t_1/x_1, \ldots, t_k/x_k] \Vdash A$$

Realizabilidad vs Tipaje

Lema de adecuación

$$\begin{cases} x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash t : A \\ \forall i \in [1,k](t_i \Vdash A_i) \end{cases} \Rightarrow \quad t[t_1/x_1, \ldots, t_k/x_k] \Vdash A$$



Especificación

Problema

Dada una formula, ¿se pueden caracterizar todo sus realizadores?

Especificación

Proposición

Los siguientes son equivalentes :

1. $t \Vdash \forall X (X \Rightarrow X)$
2. $t \star u \cdot \pi \succ u \star \pi$ (para todo u, π)

Prueba (1) $\Rightarrow$ (2):

- Sean u, π, definimos

$$\perp\!\!\!\perp = \{p : p \succ u \star \pi\} \qquad S = \{\pi\}$$

$\Rightarrow \; u \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$ entonces $u \Vdash_{\perp\!\!\!\perp} \dot{S}$, $\pi \in \|\dot{S}\|$ y $u \cdot \pi \in \|\forall X (X \Rightarrow X)\|$

$\Rightarrow \; t \star u \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$

Especificación

Proposición

Los siguientes son equivalentes :

1. $t \Vdash \forall X(X \Rightarrow X)$
2. $t \star u \cdot \pi \succ u \star \pi$ (para todo u, π)

Prueba (1) $\Rightarrow$ (2):

- Sean u, π, definimos

$$\perp\!\!\!\perp = \{p : p \succ u \star \pi\} \qquad\qquad S = \{\pi\}$$

$\Rightarrow$ $u \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$ entonces $u \Vdash_{\perp\!\!\!\perp} \dot{S}$, $\pi \in \|\dot{S}\|$ y $u \cdot \pi \in \|\forall X(X \Rightarrow X)\|$

$\Rightarrow$ $t \star u \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$

Especificación

Proposición

Los siguientes son equivalentes :

1. $t \Vdash \forall X(X \Rightarrow X)$
2. $t \star u \cdot \pi \succ u \star \pi$ (para todo u, π)

Prueba (1) $\Rightarrow$ (2):

- Sean u, π, definimos

$$\perp\!\!\!\perp = \{p : p \succ u \star \pi\} \qquad\qquad S = \{\pi\}$$

$\Rightarrow$ $u \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$ entonces $u \Vdash_{\perp\!\!\!\perp} \dot{S}$, $\pi \in \|\dot{S}\|$ y $u \cdot \pi \in \|\forall X(X \Rightarrow X)\|$

$\Rightarrow$ $t \star u \cdot \pi \in \perp\!\!\!\perp$

Especificación

Proposición

Los siguientes son equivalentes :

1. $t \Vdash \forall X(X \Rightarrow X)$
2. $t \star u \cdot \pi \succ u \star \pi$ (para todo u, π)

Prueba (1) $\Rightarrow$ (2):

- Sean u, π, definimos

$$\bot\!\!\!\bot = \{p : p \succ u \star \pi\} \qquad\qquad S = \{\pi\}$$

$\Rightarrow$ $u \star \pi \in \bot\!\!\!\bot$ entonces $u \Vdash_{\bot\!\!\!\bot} \dot{S}$, $\pi \in \|\dot{S}\|$ y $u \cdot \pi \in \|\forall X(X \Rightarrow X)\|$

$\Rightarrow$ $t \star u \cdot \pi \in \bot\!\!\!\bot$

Especificación

Proposición

Los siguientes son equivalentes :

1. $t \Vdash \forall X(X \Rightarrow X)$
2. $t \star u \cdot \pi \succ u \star \pi$ (para todo u, π)

Otra prueba :

- Sean u, π, definimos

$$\perp\!\!\!\perp = \{p : t \star u \cdot \pi \not\succ p\} \qquad S = \{\pi\}$$

$\Rightarrow$ $t \star u \cdot \pi \notin \perp\!\!\!\perp$

$\Rightarrow$ entonces $u \cdot \pi \notin \|S \Rightarrow S\|$ y $u \not\Vdash_{\perp\!\!\!\perp} \dot{S}$

$\Rightarrow$ $u \star \pi \notin \perp\!\!\!\perp$

Especificación

Proposición

Los siguientes son equivalentes :

1. $t \Vdash \forall X(X \Rightarrow X)$
2. $t \star u \cdot \pi \succ u \star \pi$ (para todo u, π)

Otra prueba :

- Sean u, π, definimos

$$\perp\!\!\!\perp = \{p : t \star u \cdot \pi \not\succ p\} \qquad\qquad S = \{\pi\}$$

$\Rightarrow$ $t \star u \cdot \pi \notin \perp\!\!\!\perp$

$\Rightarrow$ entonces $u \cdot \pi \notin \|S \Rightarrow S\|$ y $u \not\Vdash_{\perp\!\!\!\perp} \dot{S}$

$\Rightarrow$ $u \star \pi \notin \perp\!\!\!\perp$

Especificación

Proposición

Los siguientes son equivalentes :

1. $t \Vdash \forall X(X \Rightarrow X)$
2. $t \star u \cdot \pi \succ u \star \pi$ (para todo u, π)

Otra prueba :

- Sean u, π, definimos

$$\perp\!\!\!\perp = \{p : t \star u \cdot \pi \not\succ p\} \qquad\qquad S = \{\pi\}$$

$\Rightarrow$ $t \star u \cdot \pi \notin \perp\!\!\!\perp$

$\Rightarrow$ entonces $u \cdot \pi \notin \|S \Rightarrow S\|$ y $u \not\Vdash_{\perp\!\!\!\perp} \dot{S}$

$\Rightarrow$ $u \star \pi \notin \perp\!\!\!\perp$

Especificación

Proposición

Los siguientes son equivalentes :

1. $t \Vdash \forall X(X \Rightarrow X)$
2. $t \star u \cdot \pi \succ u \star \pi$ (para todo u, π)

Otra prueba :

- Sean u, π, definimos

$$\perp\!\!\!\perp = \{p : t \star u \cdot \pi \not\succ p\} \qquad\qquad S = \{\pi\}$$

$\Rightarrow$ $t \star u \cdot \pi \notin \perp\!\!\!\perp$

$\Rightarrow$ entonces $u \cdot \pi \notin \|S \Rightarrow S\|$ y $u \not\Vdash_{\perp\!\!\!\perp} \dot{S}$

$\Rightarrow$ $u \star \pi \notin \perp\!\!\!\perp$

Modelo de PA2

1. $\lambda z\,.\,z \Vdash \forall x \forall y\,(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
2. $\lambda z\,.\,zu \Vdash \forall x\,(s(x) = 0 \Rightarrow \bot)$
3. si $\mathbb{N} \models \forall x_1 \cdots \forall x_k\,(e_1(x_1,\ldots,x_n) = e_2(x_1,\ldots,x_k))$ entonces

$$\lambda z\,.\,z \Vdash \forall x_1 \cdots \forall x_k\,(e_1(x_1,\ldots,x_n) = e_2(x_1,\ldots,x_k))$$

Problema

$$\mathrm{Nat}(x) = \forall Z(Z(0) \Rightarrow \forall y[Z(y) \Rightarrow Z(s(y))] \Rightarrow Z(x))$$

Para todo n, $\bar{n} \Vdash \mathrm{Nat}(n)$ ... pero no existe t tq $t \Vdash \forall x(\mathrm{Nat}(x))$

Quantificadores relativizados

$\forall^{\mathrm{N}} xA \equiv \forall x(\mathrm{Nat}(x) \Rightarrow A)$ $\exists^{\mathrm{N}} xA \equiv \exists x(\mathrm{Nat}(x) \Rightarrow A)$

Modelo de PA2

1. $\lambda z\,.\,z \Vdash \forall x \forall y\,(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
2. $\lambda z\,.\,zu \Vdash \forall x\,(s(x) = 0 \Rightarrow \bot)$
3. si $\mathbb{N} \models \forall x_1 \cdots \forall x_k\,(e_1(x_1,\ldots,x_n) = e_2(x_1,\ldots,x_k))$ entonces

$$\lambda z\,.\,z \Vdash \forall x_1 \cdots \forall x_k\,(e_1(x_1,\ldots,x_n) = e_2(x_1,\ldots,x_k))$$

Problema

$$\mathrm{Nat}(x) = \forall Z(Z(0) \Rightarrow \forall y[Z(y) \Rightarrow Z(s(y))] \Rightarrow Z(x))$$

Para todo n, $\bar{n} \Vdash \mathrm{Nat}(n)$ ... pero no existe t tq $t \Vdash \forall x(\mathrm{Nat}(x))$

Quantificadores relativizados

$$\forall^{\mathrm{N}} xA \equiv \forall x(\mathrm{Nat}(x) \Rightarrow A) \qquad \exists^{\mathrm{N}} xA \equiv \exists x(\mathrm{Nat}(x) \Rightarrow A)$$

Modelo de PA2

1. $\lambda z\,.\,z \ \Vdash\ \forall x\,\forall y\,(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
2. $\lambda z\,.\,zu \ \Vdash\ \forall x\,(s(x) = 0 \Rightarrow \bot)$
3. si $\mathbb{N} \models \forall x_1 \cdots \forall x_k\,(e_1(x_1,\ldots,x_n) = e_2(x_1,\ldots,x_k))$ entonces

$$\lambda z\,.\,z \ \Vdash\ \forall x_1 \cdots \forall x_k\,(e_1(x_1,\ldots,x_n) = e_2(x_1,\ldots,x_k))$$

Problema

$$\mathrm{Nat}(x) = \forall Z(Z(0) \Rightarrow \forall y[Z(y) \Rightarrow Z(s(y))] \Rightarrow Z(x))$$

Para todo n, $\bar{n} \Vdash \mathrm{Nat}(n)$ ... pero no existe t tq $t \Vdash \forall x(\mathrm{Nat}(x))$

Quantificadores relativizados

$\forall^{\mathrm{N}} xA \equiv \forall x(\mathrm{Nat}(x) \Rightarrow A)$ $\exists^{\mathrm{N}} xA \equiv \exists x(\mathrm{Nat}(x) \Rightarrow A)$

Modelo de PA2

1. $\lambda z\,.\,z \ \Vdash\ \forall x \forall y\,(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
2. $\lambda z\,.\,zu \ \Vdash\ \forall x\,(s(x) = 0 \Rightarrow \bot)$
3. si $\mathbb{N} \models \forall x_1 \cdots \forall x_k\,(e_1(x_1,\ldots,x_n) = e_2(x_1,\ldots,x_k))$ entonces

$$\lambda z\,.\,z \ \Vdash\ \forall x_1 \cdots \forall x_k\,(e_1(x_1,\ldots,x_n) = e_2(x_1,\ldots,x_k))$$

Problema

$$\mathrm{Nat}(x) = \forall Z(Z(0) \Rightarrow \forall y[Z(y) \Rightarrow Z(s(y))] \Rightarrow Z(x))$$

Para todo n, $\bar{n} \Vdash \mathrm{Nat}(n)$ ... pero no existe t tq $t \Vdash \forall x(\mathrm{Nat}(x))$

Quantificadores relativizados

$\forall^{\mathrm{N}} x A \equiv \forall x(\mathrm{Nat}(x) \Rightarrow A)$ $\qquad$ $\exists^{\mathrm{N}} x A \equiv \exists x(\mathrm{Nat}(x) \Rightarrow A)$

Extracción de testigo

- Lógica intuicionista: $t \Vdash \exists x A(x) \Rightarrow t \succ (n, u)$ donde $u \Vdash A(n)$
- Dificultad: backtrack

Proposición

Sea $A(x)$ decidible y refutable. Si $t \Vdash \exists^{\mathbb{N}} x A(x)$, pues existe $u \cdot \pi$ tq:

$$t \star u \cdot \pi \succ \texttt{stop} \star \hat{n} \cdot \pi$$

donde $A(n)$ es verdad.

Extracción de testigo

- Lógica intuicionista: $t \Vdash \exists x A(x) \Rightarrow t \succ (n, u)$ donde $u \Vdash A(n)$
- Dificultad: backtrack

Proposición

Sea $A(x)$ decidible y refutable. Si $t \Vdash \exists^{\mathbb{N}} x A(x)$, pues existe $u \cdot \pi$ tq:

$$t \star u \cdot \pi \succ \texttt{stop} \star \hat{n} \cdot \pi$$

donde $A(n)$ es verdad.

Extracción de testigo

- Lógica intuicionista: $t \Vdash \exists x A(x) \Rightarrow t \succ (n, u)$ donde $u \Vdash A(n)$
- Dificultad: backtrack

Proposición

Sea $A(x)$ decidible y refutable. Si $t \Vvdash \exists^{\mathrm{N}} x A(x)$, pues existe $u \cdot \pi$ tq:

$$t \star u \cdot \pi \succ \mathtt{stop} \star \hat{n} \cdot \pi$$

donde $A(n)$ es verdad.

Y más...

Especificación de formulas mas complejas :

- Ley de Peirce (a continuación...)
- formulas aritméticas

Modelos de ZF:

- quote sirve para realizar el Axioma de Elección Dependiente

$$\text{QUOTE}: \qquad \mathtt{quote} \star \phi \cdot t \cdot \pi \quad \succ_1 \quad t \star \overline{n_\phi} \cdot \pi$$

- Permite usar técnicas de Forcing (a continuación...)
- Existencia de subconjuntos (muy) patológicos de $\mathbb{R}$:
  - χ_2 no es bien ordenado
  - $\chi_n \hookrightarrow \chi_{n+1}$
  - $\chi_{n+1} \not\twoheadrightarrow \chi_n$
  - $\chi_m \times \chi_n \equiv \chi_{mn}$

Y más...

Especificación de formulas mas complejas :

- Ley de Peirce (a continuación...)
- formulas aritméticas

Modelos de ZF:

- quote sirve para realizar el Axioma de Elección Dependiente

$$\text{QUOTE}: \qquad \texttt{quote} \star \phi \cdot t \cdot \pi \quad \succ_1 \quad t \star \overline{n_\phi} \cdot \pi$$

- Permite usar técnicas de Forcing (a continuación...)
- Existencia de subconjuntos (muy) patológicos de $\mathbb{R}$:
  - χ_2 no es bien ordenado
  - $\chi_n \hookrightarrow \chi_{n+1}$
  - $\chi_{n+1} \not\twoheadrightarrow \chi_n$
  - $\chi_m \times \chi_n \equiv \chi_{mn}$

Y más...

Especificación de formulas mas complejas :

- Ley de Peirce (a continuación...)
- formulas aritméticas

Modelos de ZF:

- quote sirve para realizar el Axioma de Elección Dependiente

$$\text{QUOTE}: \qquad \texttt{quote} \star \phi \cdot t \cdot \pi \quad \succ_1 \quad t \star \overline{n_\phi} \cdot \pi$$

- Permite usar técnicas de Forcing (a continuación...)
- Existencia de subconjuntos (muy) patológicos de $\mathbb{R}$:
  - χ_2 no es bien ordenado
  - $\chi_n \hookrightarrow \chi_{n+1}$
  - $\chi_{n+1} \not\twoheadrightarrow \chi_n$
  - $\chi_m \times \chi_n \equiv \chi_{mn}$

Y más...

Especificación de formulas mas complejas :

- Ley de Peirce (a continuación...)
- formulas aritméticas

Modelos de ZF:

- quote sirve para realizar el Axioma de Elección Dependiente

$$\textsc{Quote}: \qquad \texttt{quote} \star \phi \cdot t \cdot \pi \quad \succ_1 \quad t \star \overline{n_\phi} \cdot \pi$$

- Permite usar técnicas de Forcing (a continuación...)
- Existencia de subconjuntos (muy) patológicos de $\mathbb{R}$:
  - χ_2 no es bien ordenado
  - $\chi_n \hookrightarrow \chi_{n+1}$
  - $\chi_{n+1} \not\twoheadrightarrow \chi_n$
  - $\chi_m \times \chi_n \equiv \chi_{mn}$

Y más...

Especificación de formulas mas complejas :

- Ley de Peirce (a continuación...)
- formulas aritméticas

Modelos de ZF:

- quote sirve para realizar el Axioma de Elección Dependiente

$$\textsc{Quote}: \qquad \texttt{quote} \star \phi \cdot t \cdot \pi \quad \succ_1 \quad t \star \overline{n_\phi} \cdot \pi$$

- Permite usar técnicas de Forcing (a continuación...)
- Existencia de subconjuntos (muy) patológicos de $\mathbb{R}$:
  - χ_2 no es bien ordenado
  - $\chi_n \hookrightarrow \chi_{n+1}$
  - $\chi_{n+1} \not\twoheadrightarrow \chi_n$
  - $\chi_m \times \chi_n \equiv \chi_{mn}$

Gracias por su atención

Algunas preguntas ?