Université de Provence **Centre de Mathématiques et d'Informatique**

Master Mathématiques et Applications, 1ère année **Module de Probabilités**

Corrigé de l'Examen Partiel du 5/11/2009

Problème 1 *Intégration*

La propriété de *monotonie* de l'intégrale invoquée à plusieurs reprises ci–dessous est la propriété suivante : $f \le g \Rightarrow \int_\Omega f d\mu \le \int_\Omega g d\mu$.

1. a. On pose $g_n(\omega) = f(\omega)\mathbf{1}_{\{f>n\}}(\omega)$. Si $\mathcal{N} = \{\omega;\ f(\omega) = \infty\}$, le fait que f soit intégrable entraîne que $\mu(\mathcal{N}) = 0$ (en fait l'énoncé dit que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc $\mathcal{N} = \emptyset$, mais notre argument montre que le résultat serait vrai même avec f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$). Pour tout $\omega \notin \mathcal{N}$, dès que $n \ge f(\omega)$, $g_n(\omega) = 0$. Donc pour tout $\omega \notin \mathcal{N}$, $g_n(\omega) \to 0$ quand $n \to \infty$, soit $g_n \to 0$ p. p. En outre $0 \le g_n(\omega) \le f(\omega)$, et f est intégrable. Donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, quand $n \to \infty$,
$$\int_{\{f>n\}} f d\mu = \int_\Omega g_n(\omega)\mu(d\omega) \to 0.$$
En fait on aurait pu invoquer le théorème de convergence monotone, car on a une suite décroissante $\{g_n\}$, majorée la fonction intégrable f.
b. On pose $h_n(\omega) = f(\omega)\mathbf{1}_{\{f\le 1/n\}}(\omega)$. Par définition de h_n, on a l'inégalité $0 \le h_n(\omega) \le 1/n$. Donc $h_n(\omega) \to 0$ quand $n \to \infty$, pour tout $\omega \in \Omega$. En outre $0 \le h_n(\omega) \le f(\omega)$ et f est intégrable, donc par le théorème de convergence dominée (ou par le théorème de convergence monotone, la suite $\{h_n\}$ étant décroissante et majorée par une fonction intégrable), quand $n \to \infty$,
$$\int_{\{f\le 1/n\}} f d\mu = \int_\Omega h_n(\omega)\mu(d\omega) \to 0$$
2. Pour tout ω,
$$0 \le a\mathbf{1}_{\{f>a\}}(\omega) \le f(\omega)\mathbf{1}_{\{f>a\}}(\omega).$$
D'où par monotonie de l'intégrale
$$0 \le a\Lambda_f(a) \le \int_{\{f>a\}} f d\mu \le \int_\Omega f d\mu.$$
Si f est intégrable, le membre de droite de l'inégalité ci–dessus est fini, donc en particulier $a\Lambda_f(a) < \infty$, soit en divisant par $a > 0$, $\Lambda_f(a) < \infty$. En outre, d'après la première partie de la question 1, $\int_{\{f>a\}} f d\mu \to 0$ quand $a \to \infty$, donc a fortiori, $a\Lambda_f(a) \to 0$, quand $a \to \infty$.
3. Si $0 < a < 1/n$, pour tout ω, puisque $f(\omega) \ge 0$,
$$a\mathbf{1}_{\{a<f\le 1/n\}}(\omega) \le f(\omega)\mathbf{1}_{\{a<f\le 1/n\}}(\omega) \le f(\omega)\mathbf{1}_{\{f\le 1/n\}}(\omega),$$
donc par monotonie de l'intégrale,
$$a\left[\Lambda_f(a) - \Lambda_f(1/n)\right] \le \int_{\{f\le 1/n\}} f d\mu.$$

Donc

$$a\Lambda_f(a) \le \int_{\{f\le 1/n\}} f d\mu + a\Lambda_f(1/n),$$

$$0 \le \liminf_{a\to 0} a\Lambda_f(a) \le \limsup_{a\to 0} a\Lambda_f(a) \le \int_{\{f\le 1/n\}} f d\mu,$$

ceci pour tout $n \ge 1$ fixé. En faisant tendre $n \to \infty$, donc $1/n$ vers 0, on en déduit, à l'aide de la seconde partie de la première question, que si f est intégrable,

$$0 \le \liminf_{a\to 0} a\Lambda_f(a) \le \limsup_{a\to 0} a\Lambda_f(a) \le 0,$$

ce qui démontre que $a\Lambda_f(a) \to 0$ quand $a \to 0$.

4. On remarque que pour tout ω,

$$\begin{aligned} f(\omega) &\le \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k+1} \mathbf{1}_{\{2^k < f \le 2^{k+1}\}}(\omega) \\ &\le \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k+1} \mathbf{1}_{\{2^k < f\}}(\omega), \end{aligned}$$

soit par monotonie de l'intégrale

$$\int_\Omega f d\mu \le \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k+1} \Lambda_f(2^k).$$

Donc puisque f est positive, si $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^k \Lambda_f(2^k) < \infty$, alors $\int_\Omega |f| d\mu = \int_\Omega f d\mu < \infty$, et f est μ–intégrable.

5. On a pour tout ω

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^k \mathbf{1}_{\{2^k < f \le 2^{k+1}\}}(\omega) \le f(\omega),$$

soit par monotonie de l'intégrale

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^k \left[\Lambda_f(2^k) - \Lambda_f(2^{k+1})\right] \le \int_\Omega f d\mu.$$

On a clairement pour n'importe quelles suites $\{u_k\}$ et $\{v_k\}$,

$$\sum_{k=-N}^{k=N} u_k(v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=-N}^{k=N} (u_k - u_{k-1}) v_k + u_{-N-1} v_{-N} - u_N v_{N+1},$$

soit avec $u_k = 2^k$ et $v_k = \Lambda_f(2^k)$, en remarquant que $2^k - 2^{k-1} = (2-1)2^{k-1} = 2^{k-1}$

$$\sum_{k=-N}^{k=N} 2^k \left[\Lambda_f(2^k) - \Lambda_f(2^{k+1})\right] = \sum_{k=-N}^{k=N} 2^{k-1} \Lambda_f(2^k) + 2^{-N-1} \Lambda_f(2^{-N}) - 2^N \Lambda_f(2^{N+1}).$$

Mais si f est intégrable, grâce aux questions 2 et 3,

$$2^N \Lambda_f(2^{N+1}) = \frac{1}{2} 2^{N+1} \Lambda_f(2^{N+1}) \to 0, 2^{-N-1} \Lambda_f(2^{-N}) = \frac{1}{2} 2^{-N} \Lambda_f(2^{-N}) \to 0,$$

quand $N \to \infty$, donc on peut faire tendre $N \to \infty$ dans l'identité précédente, d'où il résulte exactement

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^k \left[\Lambda_f(2^k) - \Lambda_f(2^{k+1})\right] = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^k \Lambda_f(2^k).$$

On a donc établi que

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^k \Lambda_f(2^k) \leq 2 \int_\Omega f d\mu,$$

donc si f est μ–intégrable, $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^k \Lambda_f(2^k) < \infty$.

Problème 2 *Probabilités*

1. On a $\{\mathrm{Max}(X,Y) \leq x\} = \{X \leq x\} \cap \{Y \leq x\}$ (les deux inclusions sont immédiates, puisque le Max est plus petit ou égal à x si et seulement si X *et* Y sont plus petit ou égaux à x). Donc par l'indépendance de X et de Y,

$$\mathbb{P}(\mathrm{Max}(X,Y) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x) \times \mathbb{P}(Y \leq x).$$

2. Puisque X et Y sont indépendantes, toutes deux exponentielles de paramètres λ, d'après le Corollaire 4.6.5 du cours, la loi du vecteur aléatoire (X,Y) est la probabilité sur $\mathbb{R}_+^2$ de densité $\lambda^2 \exp(-\lambda[x+y])$ par rapport à la mesure de Lebesgue μ_2 sur $\mathbb{R}_+^2$. Donc Δ désignant la diagonale de $\mathbb{R}_+^2$,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \int_\Delta \lambda^2 \exp(-\lambda[x+y])\mu_2(dx, dy) = 0,$$

puisque $\mu_2(\Delta) = 0$.

3. Les trois ensembles A, B et $\{X = Y\}$ forment une partition de Ω, donc grâce à la question précédente,

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1.$$

Maintenant comme les lois des v. a. (X,Y) et (Y,X) sont les mêmes (toutes deux la loi précisée à la question précédente), on a clairement que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$, d'où $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$.

4. On a clairement pour tout $x, y \geq 0$,

$$\{x < U, y < V\} = \{x < U, y < V, X < Y\} \cup \{x < U, y < V, Y < X\} \cup \{x < U, y < V, X = Y\},$$

ces trois ensembles étant disjoints. Le troisième est de probabilité nulle, et les deux premiers ont la même probabilité, à nouveau parce que les deux vecteurs aléatoires (X,Y) et (Y,X) ont la même loi. En outre

$$\{x < U, y < V, X < Y\} = \{x < X, X + y < Y\},$$

les deux inclusions étant immédiates. On a donc bien

$$\mathbb{P}(x < U, y < V) = 2\mathbb{P}(x < X, X + y < Y).$$

Remarquons que

$$\mathbb{P}(x < X, X + y < Y) = \mathbb{P}((X,Y) \in D) = \mathbb{P}_{(X,Y)}(D),$$

pourvu que l'on pose

$$D := \{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2,\ s > x \text{ et } t > s + y\}.$$

Donc (la probabilité $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ a été explicitée à la question 2 ci–dessus)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(x < X, X + y < Y) &= \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda s} \left(\int_{s+y}^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \right) ds \\
&= \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda s} e^{-\lambda(s+y)} ds \\
&= e^{-\lambda y} \int_x^\infty \lambda e^{-2\lambda s} ds \\
&= \frac{1}{2} e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y},
\end{aligned}$$

soit

$$\mathbb{P}(x < U, y < V) = e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y}.$$

5. On déduit du résultat précédent tout d'abord que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U > x) = \mathbb{P}(x < U, 0 \le V) = \mathbb{P}(x < U, 0 < V) = e^{-2\lambda x}, \\
\mathbb{P}(V > y) = \mathbb{P}(0 \le U, y < V) = \mathbb{P}(0 < U, y < V) = e^{-\lambda y}
\end{aligned}$$

La seconde égalité de la première ligne exploite le fait que $\{V = 0\} = \{X = Y\}$ est de probabilité nulle, celle de la seconde ligne que $\{U = 0\} = \{X = 0\} \cap \{Y = 0\}$ est également de probabilité nulle. Donc la loi de U est la loi exponentielle de paramètre 2λ, celle de V est la loi exponentielle de paramètre λ. En outre il résulte de ce qui précède que pour tous $x, y \ge 0$,

$$\mathbb{P}(U > x, V > y) = \mathbb{P}(U > x) \times \mathbb{P}(V > y),$$

ce qui suffit, puisque U et V sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, à établir l'indépendance de U et V. Ceci a été démontré en TD. Donnons deux arguments qui l'établissent.

On peut argumenter que $\{\{U > x\},\ x \ge 0\}$ et $\{\{V > y\},\ y \ge 0\}$ constituent deux π–systèmes qui engendrent l'un $\sigma(U)$, l'autre $\sigma(V)$, et donc d'après le Théorème 4.6.3 du cours que l'égalité $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)\ \forall\ A \in \{\{U > x\},\ x \ge 0\},\ B \in \{\{V > y\},\ y \ge 0\}$ entraîne l'indépendance de $\sigma(U)$ et $\sigma(V)$, soit de U et V.

On peut aussi déduire de l'identité établie que les deux probabilités $\mathbb{P}_{(U,V)}$ et $\mathbb{P}_U \times \mathbb{P}_V$ coincident sur le π–système $\{\{(u,v),\ u > x, v > y\},\ x, y \ge 0\}$ qui engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}_+^2$, donc ces deux probabilités coincident par le Théorème 1.4.7, ce qui entraîne l'indépendance de U et V par le théorème 4.6.4.

6. On a $U + V = \text{Max}(X, Y)$. Or $U + V$ est la somme de deux v. a. indépendantes, exponentielles de paramètres resp. λ et 2λ, et $\text{Max}(X, Y)$ est le sup de deux v. a. indépendantes, toutes deux exponentielles de paramètre λ, ce qui justifie l'affirmation de l'énoncé.