AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES

Programme de l'épreuve orale de modélisation, option Probabilités et Statistiques

L'épreuve porte sur un programme commun aux deux options et sur un programme spécifique à chacune d'elles. Les thèmes applicatifs, qui s'appuient sur le programme des épreuves, font l'objet d'une publication annuelle au Bulletin Officiel.

Programme de la partie commune

Le programme de cette partie comprend les méthodes numériques, probabilistes, statistiques et symboliques citées dans les programmes des épreuves écrites et celles citées dans les paragraphes suivants. Ces méthodes pourront donner lieu à une illustration sur machine à l'aide d'un des logiciels mentionnés ci–dessous.

Les candidats devront pouvoir montrer leur capacité:

- à distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques;
- à évaluer le coût et les limitations des algorithmes: complexité, précision numérique;
- à analyser la pertinence des modèles et les différents types d'erreur (expérimentale, de méthode, de calcul);
- à utiliser l'un des logiciels mentionnés ci–dessous pour mettre en évidence les propriétés des modèles mathématiques et des méthodes numériques, probabilistes, statistiques ou symboliques de ce programme.

1. Représentations graphiques de données

   Étude et représentations de fonctions, de courbes et de surfaces (paramétriques et implicites)

   Interpolation polynomiale par morceaux à une variable, interpolation affine par morceaux à deux variables.

   Echantillons, histogrammes.

2. Modèles.

   Probabilités discrètes (tirages uniformes, probabilités conditionnelles).

   Lois de probabilités classiques.

   Problèmes d'évolution:

   - Chaînes de Markov (espaces d'états finis, temps discret).
   - Équations différentielles ordinaires, systèmes dynamiques en dimension deux et trois. Espaces de phases. Étude qualitative.

     ** Exemples de fonctions de Liapounov, application à la stabilité**

3. Validation et précision de résultat.

   Conditionnement des systèmes linéaires.

   Schéma numérique d'Euler pour le problème de Cauchy pour un système différentiel de la forme $X' = f(X, t)$.

   Précisions statistique: intervalle de confiance d'une moyenne.

4. Ajustement de modèles

   Moindres carrés linéaires (expression avec et sans contrainte); exemples non linéaires.

   Modèles linéaires simples en dimension 1, test d'ajustement du ξ^2.

5. Calcul numérique et symbolique

   Utilisation des logiciels Maple ou MaPAD, et Matlab ou Scilab: intégration, différentiation, calcul de sommes et d'intégrales, résolution d'équations algébriques et différentielles.

   Méthode de Monte Carlo pour les intégrales multiples.

Résolution de systèmes d'équations linéaires. **Factorisation LU, algorithme du gradient pour les systèmes linéaires symétriques définis positifs**

Recherche des valeurs propres. **Méthode de Jacobi, méthode de la puissance**

Résolution de systèmes d'équations non linéaires: méthode de Newton, méthode des approximations successives.

Programme de la partie optionnelle: Calcul numérique et symbolique

1. Calcul symbolique sur les polynômes.

   Algorithme d'Euclide. Calcul effectif des résultats, application à l'élimination. Localisation des racines (en particulier suites de Sturm).

   **Exemples d'étude locale de courbes algébriques planes*.*

2. Équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles.

   Aspects numériques du problème de Cauchy. Méthodes à un pas: consistance, stabilité, convergence, notion d'ordre; exemples de méthodes d'ordre élevé et de méthodes implicites.

   Exemples de discrétisation de problèmes aux limites en dimension un. ** Différences finies, éléments finis P1, méthode de Galerkin*.*

   Equations différentielles du second ordre à coefficients polynomiaux.

   ** Fonctions de Bessel, fonctions de Legendre*.*

   Méthode des caractéristiques pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels.

   Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre à coefficients constants et problèmes aux limites associés. *Équations de Laplace, de la chaleur, des ondes**

3. Optimisation et approximation

   Interpolation polynomiale par morceaux.

   Extrema des fonctions réelles de n variables réelles: multiplicateurs de Lagrange.

** Algorithmes de gradient à pas optimal ou à pas constant; algorithme du gradient conjugué pour une application quadratique*.*

Méthode des moindres carrés et applications.

** Programmation linéaire*.*

Programme de la partie optionnelle: Probabilité et Statistique

Utilisation de lois usuelles pour modéliser certains phénomènes aléatoires. ** Exemples: processus de comptage, temps d'attente ou durée de vie, erreurs de mesures.**

Vecteurs aléatoires gaussiens et théorème de limite centrale vectoriel. Théorème de Cochran.

Modèle linéaire gaussien: estimation par la méthode des moindres carrés, test de Student et de Fischer.

Convergence presque sûre, équiintégrabilité et convergence L'. Lemme de Borel–Cantelli et loi forte des grands nombres. Transformée de Laplace. ** Inégalité de Cramer–Chernoff*.*

Fonction de répartition empirique. **Théorème de Glivenko–Cantelli, tests de Kolmogorov–Smirnov*.*

Espérance conditionnelle.

Chaînes de Markov homogènes à espace d'états au plus dénombrable: états transitoires, récurrents. Chaînes irréductibles apériodiques à espace d'états finis. Exemples d'utilisations des théorèmes de convergence des martingales à temps discret (aucune démonstration ne sera exigée). ** Marches aléatoires, ruine du joueur, processus de branchement (par exemple, du type Galton–Watson), évaluation d'actifs financiers, files d'attente.**