

# THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité  
**Statistiques Mathématiques**

Présentée par : CLAIRE COIFFARD

Pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI**

Sujet de la thèse

**Ensembles fractals engendrés par des processus aléatoires**

Sous la direction du Professeur : PAUL DEHEUVELS

Soutenue le 30 novembre 2009

devant le jury composé de

M. Berthet	Rapporteur
M. Biau	Examineur
M. Deheuvels	Directeur
Mlle Guillou	Examinatrice
M. Hoffmann	Examineur
M. Yor	Président

Rapporteurs : M. Beirlant, M. Berthet.



## Remerciements

Je voudrais adresser mes premiers remerciements au professeur Deheuvels, mon directeur de thèse. De chacune de nos entrevues, je ressortais avec de nouvelles perspectives de recherche, de nouvelles pistes à explorer dans la jungle mathématique. Dès le début, vous avez su aiguïser ma curiosité, de façon à rendre cette thèse passionnante. Merci d'avoir répondu si pertinemment à mes interrogations sans que je n'eusse parfois besoin de les exprimer.

Je remercie chaleureusement mes rapporteurs, le professeur Beirlant et le professeur Berthet, d'avoir lu avec tant d'attention ce manuscrit et de m'avoir fait des remarques qui me furent et me seront très utiles.

Je suis très honorée que M. Biau, Mlle Guillou, M. Hoffman et M. Yor aient accepté de faire partie de mon jury. Merci pour votre disponibilité.

J'adresse également toute ma gratitude au professeur Pieczynski pour m'avoir proposé la voie universitaire, voie souvent ignorée des élèves ingénieurs. Merci pour votre soutien et votre confiance.

Un grand merci à toutes les personnes que j'ai rencontrées au bureau 8A27. À ceux qui m'ont accueillie, Pierre, Jean-Baptiste, Omar, Olivier F. (pour ces conseils philosophiques), Julien C. (pour son enthousiasme) et Gwladys (pour sa bonne humeur). Un grand merci à Clara (pour son soutien), Olive (pour ses blagues cachées dans le bureau) et Jeanne (pour tous les rires que nous avons partagés). Et enfin aux « petits nouveaux », Aurélie, Manu et Sarah à qui je souhaite une thèse très réussie.

Je pense aussi aux doctorants de l'autre bureau, Salim, Tarek, Nabil, Issam, Amadou, Lahcen, FX, Mamadou, Noureddine, Aboubacar, Boris, Mory et j'en oublie, pour les conversations toujours agréables que nous avons eues dans les couloirs de la fac.

Je voudrais également remercier les professeurs et maître de conférences du LSTA, et en particulier Olivier et Jérôme (pour leurs leçons de cinéma), Philippe (pour ses conseils professionnels et touristiques) et Gérard (pour sa passion et son engouement si

communicatifs).

Je remercie également Louise Lamart pour sa disponibilité avec nous, ses doctorants !  
Merci également à Anne Durande et Pascal Epron.

Cette thèse a reçu un soutien considérable de la part de la JM-team, merci à vous !  
Je tiens aussi à remercier ma famille et en particulier mes parents et mes trois frères  
qui ont fait ce que je suis. Merci pour votre soutien infailible, vos relectures et surtout  
votre enthousiasme vis-à-vis de mon travail.

Enfin, je remercie Julien qui a la lourde tâche de me supporter au quotidien même si  
ces remerciements sont peu de choses à côté de ce qu'il m'apporte.

## Résumé

Nous nous intéressons dans cette thèse aux ensembles fractals engendrés par des processus aléatoires. Nous introduisons dans un premier chapitre le concept de *fractale* et les notions qui lui sont associées telles que la mesure et la dimension de Hausdorff. Nous étudions ensuite les *oscillations du processus de Wiener multivarié indexé par une classe de fonctions*. Leur convergence pour la distance de Hausdorff vers un ensemble limite défini va nous amener à introduire un ensemble de points exceptionnels. Ce sont les points pour lesquels les fonctions d'oscillations du processus de Wiener indexé par une classe de fonctions visitent infiniment souvent une certaine fonction de l'ensemble limite. Nous calculons alors la dimension de Hausdorff de cet ensemble. Nous orientons ensuite notre recherche vers l'étude des *espacements uniformes* de  $[0, 1]^d$ . Nous étudions l'ensemble des points appartenant infiniment souvent à de grands espacements et nous montrons que c'est un ensemble fractal dont nous donnons la dimension de Hausdorff. Enfin, nous proposons dans un dernier chapitre deux conjectures, l'une sur la mesure de Hausdorff exacte d'un ensemble de points engendré par les espacements uniformes, et l'autre portant sur l'étude du *processus empirique uniforme des espacements*.

## Abstract

The aim of this thesis is to study fractal sets generated by random processes. We will first introduce the concept of *fractal* and main related notions such as Hausdorff measure and Hausdorff dimension. We will next study the oscillations of the multivariate Wiener process indexed by a class of functions. The convergence, for the Hausdorff metric, to a specific limit set will lead us to introduce a set of exceptional points. These are points for which the oscillation functions of the Wiener process indexed by a class of functions will visit infinitely often a function of the limit set. We will compute the Hausdorff dimension of this set. Then we direct our research towards the study of uniform spacings of  $[0, 1]^d$ . We study the set of points infinitely often belonging to large spacings, and show that it is a fractal set which we give the Hausdorff dimension. Finally, we will conjecture two results, the first one on exact Hausdorff measure of a set generated by uniform spacings and the second one based on the study of *empirical process of spacings*.



# Table des matières

<b>0</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>Objets Fractals</b>	<b>29</b>
1.1	Dimension de Hausdorff . . . . .	30
1.2	Propriétés de la mesure et de la dimension de Hausdorff . . . . .	32
1.2.1	Mesure de Hausdorff . . . . .	32
1.2.2	Dimension de Hausdorff . . . . .	33
1.3	Méthodes de calcul de la dimension de Hausdorff . . . . .	34
1.4	Autres définitions de la dimension . . . . .	38
1.4.1	La box dimension (dimension de boîte) . . . . .	38
1.4.2	Mesure et dimension de Tricot . . . . .	41
1.5	Exemples de fractales . . . . .	42
1.5.1	Ensemble de Cantor . . . . .	42
1.5.2	Le mouvement Brownien . . . . .	43
<b>2</b>	<b>Module de continuité</b>	<b>49</b>
2.1	Introduction . . . . .	49
2.2	Premiers résultats . . . . .	55
2.2.1	Démonstration de la partie (b) du Théorème 2.2.1 . . . . .	57
2.2.2	Démonstration de la partie (a) du Théorème 2.2.1 . . . . .	61
2.3	Résultats pour des topologies plus fortes . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Processus indexés par des fonctions</b>	<b>73</b>
3.1	Introduction . . . . .	73

3.2	Démonstration de la borne supérieure . . . . .	80
3.3	Démonstration de la borne inférieure . . . . .	85
3.4	Pour le processus empirique uniforme . . . . .	105
3.4.1	Préliminaires . . . . .	106
3.4.2	Démonstration de la borne supérieure . . . . .	108
3.4.3	Démonstration de la borne inférieure . . . . .	112
3.5	Conclusion . . . . .	112
3.5.1	Topologie non uniforme . . . . .	112
3.5.2	Vitesses de convergence . . . . .	114
3.5.3	Nouvelle démonstration . . . . .	116
3.5.4	Application statistique . . . . .	118
<b>4</b>	<b>Espacements multivariés</b>	<b>121</b>
4.1	Introduction . . . . .	121
4.2	Espacements multi-dimensionnels blocs . . . . .	123
4.3	Démonstration du Théorème 4.2.2 . . . . .	124
4.3.1	Borne supérieure pour $\dim V(c)$ . . . . .	124
4.3.2	Borne inférieure pour $\dim L(c)$ . . . . .	128
4.4	Espacements multi-dimensionnels . . . . .	134
<b>5</b>	<b>Propositions de perspectives sur l'étude des espacements</b>	<b>139</b>
5.1	Mesure de Hausdorff exacte . . . . .	139
5.2	Processus empirique des espacements . . . . .	146
5.2.1	Introduction . . . . .	146
5.2.2	Oscillations exceptionnelles . . . . .	151
5.2.3	Conclusion . . . . .	153
	<b>Conclusion</b>	<b>155</b>
	<b>Annexes</b>	<b>159</b>
	<b>A Processus de Wiener</b>	<b>161</b>
	<b>B Convergences d'ensembles</b>	<b>167</b>

<b>C</b>	<b>Classes de Vapnik-Červonenkis</b>	<b>171</b>
<b>D</b>	<b>Topologies et inégalité isopérimétrique</b>	<b>173</b>
	D.1 Topologies sur des espaces fonctionnels . . . . .	173
	D.2 Inégalité isopérimétrique . . . . .	174
<b>E</b>	<b>Espaces Hilbertiens et processus gaussiens</b>	<b>177</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>180</b>



# Lexique

## Abréviations

p.s.	presque sûrement (en anglais a.s pour « almost surely »).
i.s.	infiniment souvent (en anglais i.o. pour « infinitely often »).
i.i.d	indépendantes et identiquement distribuées.
R.K.H.S	Reproducing Kernel Hilbert Space (signifiant <i>Espace de Hilbert à noyau autoreproduisant</i> ).
f.d.r.	fonction de répartition.
C.L.T.	Central Limit Theorem (Théorème limite central).

## Notations

$\sim$	Équivalence asymptotique.
$\stackrel{d}{=}$	Égalité en distribution.
$\mathbb{1}_A$	Indicatrice sur $A$ .

$ E $	Mesure de Lebesgue de $E \subset \mathbb{R}$ .
$\text{vol}(E)$	Mesure de Lebesgue de $E \subseteq \mathbb{R}^d, d > 1$ .
$\ E\ $	Plus grande distance euclidienne possible entre deux éléments de $E \subseteq \mathbb{R}^d, d > 1$ .
$\partial E$	Frontière de $E$ .
$\overset{\circ}{E}$	Ouverture de $E$ .
$\#E$	Cardinal de $E$ .
$\mathbb{E}X$	Espérance de la variable aléatoire $X$ .
$\text{Var}X$	Variance de la variable aléatoire $X$ .

D'autre part, dans la suite de la thèse, pour un processus  $\{P(t), t \in [0, 1]\}$ , lorsque nous étudions les oscillations du processus, nous noterons pour tout  $h > 0, t \in [0, 1 - h]$  et  $s \in [0, 1]$ ,

$$\Delta P(h, t; s) = P(t + hs) - P(t).$$

Nous donnons ici un récapitulatif de certains ensembles exceptionnels étudiés afin de faciliter le lecteur dans la compréhension des notations. Pour toute fonction  $f \in \mathbb{K}_0^1$  et toute fonctionnelle  $\Theta_\varphi \in \mathcal{H}_1$  (voir Chapitre 3),

$$L(f) = \left\{ t \in [0, 1] : \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\Delta \alpha_n(h_n, t; \cdot)}{\sqrt{2h_n \log(1/h_n)}} - f \right\| = 0 \right\},$$

$$L'(f) = \left\{ t \in [0, 1] : \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\Delta \alpha_n(h_n, t; \cdot)}{\sqrt{2h_n d \log(1/h_n)}} - f \right\| = 0 \right\},$$

$$R(f) = \left\{ t \in [0, 1] : \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\Delta a_n(h_n, t; \cdot)}{\sqrt{2h_n \log(1/h_n)}} - f \right\| = 0 \right\},$$

$$T(f) = \left\{ t \in [0, 1) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\Delta\gamma_n(h_n, t; \cdot)}{\sqrt{2h_n \log(1/h_n)}} - f \right\| = 0 \right\},$$

$$S(f) = \left\{ t \in [0, 1) : \liminf_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta W(h, t; \cdot)}{\sqrt{2h \log(1/h)}} - f \right\| = 0 \right\},$$

$$L(\Theta_\varphi) = \left\{ \mathbf{z} \in [0, 1)^d : \liminf_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\mathbf{z}; \cdot) - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} = 0 \right\},$$

et enfin

$$S(\Theta_\varphi) = \left\{ \mathbf{z} \in [0, 1)^d : \liminf_{h \rightarrow 0} \|\Theta_{h, \mathbf{z}} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} = 0 \right\}.$$



# Chapitre 0

## Introduction générale

### A. Position du problème

#### i) Processus empirique uniforme

Considérons  $\{X_i : i \geq 1\}$  une suite de variables aléatoires, indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi  $F$ . Pour tout  $n \geq 1$ , la fonction de répartition empirique d'ordre  $n$  est notée

$$F_n^X(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \leq x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Un des résultats fondamentaux de la statistique asymptotique est le théorème de Glivenko-Cantelli (1933) qui montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^X(x) - F(x)| = 0 \quad \text{p.s.}$$

Il nous assure la convergence de la fonction de répartition empirique vers la fonction de répartition théorique. Nous ne savons rien néanmoins de sa vitesse de convergence. À cet effet, nous introduisons le processus empirique de répartition

$$\alpha_n^X(x) = n^{1/2}(F_n^X(x) - F(x)) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nous pouvons nous contenter d'étudier le *processus empirique uniforme* défini par

$$\alpha_n(t) = n^{1/2}(F_n(t) - t) \quad t \in [0, 1],$$

généralisé par des variables aléatoires, indépendantes,  $U_1, \dots, U_n$ , uniformément distribuées sur  $(0, 1)$  et où

$$F_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{U_i \leq t} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En effet, grâce à la transformation de quantile nous avons l'égalité  $\alpha_n^X(t) = \alpha_n(F^X(t))$ . Ne pouvant ici donner qu'une liste exhaustive des résultats obtenus sur le processus empirique uniforme, nous exposerons les résultats utiles pour la suite de la thèse. Ceux-ci concernent les lois fonctionnelles limites du logarithme itéré. Dans toute la suite du document, nous noterons  $\log_j t = \log(\log_{j-1} t \wedge e)$ , pour  $j \geq 2$  et  $t \geq 0$ .

Notons  $AC(0, 1)$  l'ensemble des fonctions absolument continues sur  $(0, 1)$  et  $\dot{f}(s)$  la dérivée de Lebesgue de  $f \in AC(0, 1)$ . L'ensemble de Strassen est noté

$$\mathbb{K}_0^1 = \left\{ f \in AC(0, 1) : f(0) = 0, \int_0^1 \dot{f}^2(s) ds \leq 1 \right\}.$$

Plus généralement, on note, pour tout  $c \geq 0$ ,

$$\mathbb{K}_0^c = \left\{ f \in AC(0, 1) : f(0) = 0, \int_0^1 \dot{f}^2(s) ds \leq c \right\}. \quad (0.0.1)$$

Finkelstein [53] a montré que la suite de fonctions  $\{(2 \log_2 n)^{-1/2} \alpha_n(\cdot)\}$  est presque sûrement relativement compacte dans  $B(0, 1)$  et son ensemble limite est

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathbb{K}_0^1 : f(1) = 0 \right\}.$$

REMARQUE 1. D'après le formalisme exposé p. 167, on peut dire aussi que la suite  $(2 \log_2 n)^{-1/2} \alpha_n$  recouvre maximalelement  $\mathcal{F}$  dans  $B(0, 1)$ .

Dans la lignée du théorème de Finkelstein, nous nous intéressons ici aux lois limites fonctionnelles des accroissements du processus empirique uniforme. Notons pour tout  $n \geq 1$  et  $0 < h < 1$ ,

$$\Delta \alpha_n(h, t; s) = \alpha_n(t + hs) - \alpha_n(t)$$

pour  $0 \leq s \leq 1$  et  $0 \leq t \leq 1 - h$ .  $\Delta \alpha_n(h, t; \cdot)$  correspond à un *incrément* ou *accroissement* de  $\alpha_n$ , de *taille*  $h$ , au point  $t$ . C'est en fonction de sa *taille* que l'on qualifie un accroissement de *petit*, *moyen* ou *grand*.

La suite  $\{h_n : n \geq 1\}$  désigne une suite de constantes positives, susceptible de vérifier certaines des conditions ci-dessous.

- 
- (H1)  $h_n \downarrow 0, nh_n \uparrow \infty$  et  $0 < h_n < 1$  pour  $n \geq 1$ ,  
(H2)  $nh_n/\log_2 n \rightarrow \infty$ ,  
(H3)  $nh_n/\log n \rightarrow c \in (0, \infty)$ ,  
(H4)  $nh_n/\log n \rightarrow 0$ ,  
(H5)  $nh_n/\log n \rightarrow \infty$ ,  
(H6)  $nh_n/\log n \rightarrow c \in [0, \infty]$ ,  
(H7)  $\log(1/h_n)/\log_2 n \rightarrow \infty$ ,  
(H8)  $\log(1/h_n)/\log_2 n \rightarrow d \in [0, \infty)$ ,  
(H9)  $\log(1/h_n)/\log_2 n \rightarrow d \in [0, \infty]$ ,  
(H10)  $(1/h_n) = o(n^{1/2}(\log_2 n)(\log n)^{-3/2})$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Mason [84] établit une version fonctionnelle du logarithme itéré pour le processus empirique de queue. Une extension de son résultat nous dit que sous (H1-2), pour chaque  $t_0 \in [0, 1)$ , la suite de fonctions

$$\{(2h_n \log_2 n)^{-1/2} \Delta \alpha_n(h_n, t_0; \cdot) : n \geq 1\},$$

est presque sûrement relativement compacte dans  $B(0, 1)$  et son ensemble limite est  $\mathbb{K}_0^1$ .

À partir de ce résultat, nous pouvons facilement obtenir toute une famille de lois limites (voir Deheuvels et Mason [38]). Sous (H1-2), pour tout  $t_0 \in [0, 1)$  et toute fonctionnelle  $\Phi : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  continue, nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi \left( (2h_n \log_2 n)^{-1/2} \Delta \alpha_n(h_n, t_0; \cdot) \right) = \sup_{f \in \mathbb{K}_0^1} \Phi(f) \quad \text{p.s.}$$

En prenant  $\Phi(f) = \pm f(1)$ , nous retrouvons la loi classique du logarithme itéré (voir [101]).

Pour un choix différent de normalisation, le comportement limite des accroissements  $\{\Delta \alpha_n(h_n, t; \cdot) : 0 \leq t \leq 1 - h_n\}$  diffère du résultat précédent. En effet, Deheuvels et Mason [38] considèrent la famille de fonctions

$$\mathcal{E}_{h_n} = \{(2h_n \log(1/h_n))^{-1/2} \Delta \alpha_n(h_n, t; \cdot) : 0 \leq t \leq 1 - h_n\}.$$

Ils obtiennent que sous (H1-5-7),

$$\{\mathcal{E}_{h_n} : n \geq 1\} \text{ recouvre complètement } \mathbb{K}_0^1. \quad (0.0.2)$$

REMARQUE 2. Ce théorème équivaut à dire que la suite  $\{\mathcal{E}_{h_n} : n \geq 1\}$  est presque sûrement relativement compacte dans  $B(0, 1)$ . De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous avons, à partir d'un certain rang, les inclusions suivantes,

$$\mathbb{K}_0^1 \subseteq \{(2h_n \log(1/h_n))^{-1/2} \Delta \alpha_n(h_n, t; \cdot) : 0 \leq t \leq 1 - h_n\}^\varepsilon \subseteq (\mathbb{K}_0^1)^{2\varepsilon}.$$

De même que précédemment, nous pouvons obtenir une famille de lois limites. Sous (H1-5-7), pour toute fonctionnelle  $\Phi : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  continue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1 - h_n} \Phi\left((2h_n \log(1/h_n))^{-1/2} \Delta \alpha_n(h_n, t; \cdot)\right) \right\} = \sup_{f \in \mathbb{K}_0^1} \Phi(f) \quad \text{p.s.}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \inf_{0 \leq t \leq 1 - h_n} \Phi\left((2h_n \log(1/h_n))^{-1/2} \Delta \alpha_n(h_n, t; \cdot)\right) \right\} = \inf_{f \in \mathbb{K}_0^1} \Phi(f) \quad \text{p.s.}$$

Remarquons qu'en choisissant  $\Phi(f) = \|f\|$ , nous retrouvons le résultat de Stute [101] sur le module de continuité.

REMARQUE 3. Les résultats de Mason [84] donnant une loi fonctionnelle du logarithme itéré et celui de Deheuvels et Mason [38] donnant le recouvrement complet de  $\mathbb{K}_0^1$  par la suite  $\mathcal{E}_{h_n}, n \geq 1$  ne sont pas incompatibles. En effet, le résultat de Mason [84] est énoncé pour un  $t_0$  fixé *a priori*. Au contraire, celui de Deheuvels et Mason [38], (0.0.2) montre que pour  $\lambda \in (0, 1]$ , il existe *a posteriori* une infinité de  $t_\lambda \in [0, 1]$  tels que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(2h_n \log(1/h_n))^{-1/2} \Delta \alpha_n(h_n, t_\lambda; 1)\| \geq \lambda.$$

De plus, nous pouvons affirmer grâce à (0.0.2), que pour toute fonction  $f \in \mathbb{K}_0^1$ , nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{t \in [0, 1 - h_n]} \left\| \frac{\Delta \alpha_n(h_n, t; \cdot)}{\sqrt{2h_n \log(1/h_n)}} - f \right\| = 0 \quad \text{p.s.} \quad (0.0.3)$$

En d'autres termes, sous (H1-5-7), il est possible pour  $n$  suffisamment grand, d'approcher la fonction  $f$  par une fonction d'accroissement de taille  $h_n$  renormalisée par  $2h_n \log(1/h_n)$ . Il est à noter que le choix de cette fonction d'accroissement est fait *a posteriori* en fonction de  $h_n$ . Il est alors intéressant d'étudier l'ensemble des points  $t \in [0, 1)$  pour lesquels la fonction d'accroissement renormalisée  $(2h_n \log(1/h_n))^{-1/2} \Delta \alpha_n(h_n, t; \cdot)$

---

approche infiniment souvent la fonction  $f$ , lorsque  $n$  tend vers l'infini. Pour cela, nous définissons l'ensemble

$$L(f) = \left\{ t \in [0, 1) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \|(2h_n \log(1/h_n))^{-1/2} \Delta \alpha_n(h_n, t; \cdot) - f\| = 0 \right\}, \quad (0.0.4)$$

ainsi que l'ensemble

$$L_\Lambda^* = \bigcup \left\{ L(f) : f \in \mathbb{K}_0^1, \int_0^1 f^2(s) ds \geq \Lambda^2 \right\}.$$

Deheuvels et Mason [41] ont étudié ces ensembles et ont calculé leurs dimensions de Hausdorff (ou dimensions fractales). Dans la suite, nous noterons  $\dim A$  la dimension de Hausdorff de  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  (voir le Chapitre 1.1). Ils montrent que sous (H1-5-7), pour toute fonction  $f \in \mathbb{K}_0^1$  telle que  $\int_0^1 f^2(s) ds \in (0, 1)$  et tout  $\Lambda \in [0, 1)$ ,  $L(f)$  et  $L_\Lambda$  sont presque sûrement denses dans  $[0, 1]$  et

$$\dim L(f) = 1 - \int_0^1 f^2(s) ds \text{ et } \dim L_\Lambda^* = 1 - \Lambda^2.$$

Par conséquent, nous en déduisons que, sous (H1-5-7), pour tout  $\Lambda \in [0, 1)$ , l'ensemble

$$E(\Lambda) = \left\{ t \in [0, 1) : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \alpha_n(h_n, t; 1)}{\sqrt{2h_n \log(1/h_n)}} \geq \Lambda \right\},$$

est un ensemble dense dans  $[0, 1]$  et  $\dim E(\Lambda) = 1 - \Lambda^2$ . Cela signifie qu'il existe des points parmi  $[0, 1)$  au voisinage desquels se produisent infiniment souvent de grandes oscillations de  $\alpha_n$ . Ce résultat est surprenant car le processus étant engendré à partir de variables uniformément distribuées, nous nous serions attendus à ne pas avoir d'inégalités entre les points de  $[0, 1)$ .

Ce phénomène avait déjà été observé en 1981 par Hawkes [61]. Il étudie dans cet article les espacements uniformes. Soit  $U_1, \dots, U_{n-1}$  un échantillon de  $n - 1$  variables indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Les statistiques d'ordre correspondantes sont notées

$$0 = U_0^{(n-1)} < U_1^{(n-1)} < \dots < U_{n-1}^{(n-1)} < U_n^{(n-1)} = 1.$$

Les *espacements uniformes* d'ordre 1 sont alors définis pour tout  $n \geq 1$  et  $1 \leq i \leq n$ , par

$$D_i^{(n)} = U_i^{(n-1)} - U_{i-1}^{(n-1)}. \quad (0.0.5)$$

Beaucoup de travaux ont été réalisés sur l'étude de espacements uniformes. Citons Pyke [92], Cressie [25], Devroye [43], Beirlant et van Zuijlen [12], Deheuvels [30] et Deheuvels *et al.* [34]. Hawkes [61] montre une loi du logarithme itéré pour les espacements uniformes : Soit  $x \in [0, 1)$  et  $Z_n(x)$  la longueur de l'espacement contenant  $x$ . Alors, avec probabilité 1,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{nZ_n(x)}{\log_2 n} = 1,$$

pour presque tout  $x \in [0, 1)$ . D'autre part, Hawkes [61] nous avons également avec probabilité 1,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_x \frac{nZ_n(x)}{\log n} = 1.$$

Hawkes [61] étudie alors l'ensemble des points exceptionnels suivants.

$$U(c) = \{t \in [0, 1) : \limsup_{n \rightarrow \infty} nZ_n(x)/\log n > c\}.$$

Il montre que pour  $0 \leq c \leq 1$ , avec probabilité 1,  $\dim U(c) = 1 - c$ .

L'étude des espacements uniformes peut également se faire par l'introduction du *processus empirique des espacements*. Nous commençons par définir la fonction de répartition empirique associée aux espacements renormalisés  $nD_1^{(n)}, \dots, nD_n^{(n)}$ .

$$\mathbb{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{nD_i^{(n)} \leq t\}} \quad \text{pour } -\infty < t < \infty.$$

En remarquant la convergence de la loi de  $nD_i^{(n)}$  vers la loi exponentielle standard, on désigne par  $F(t)$ ,  $-\infty \leq t \leq \infty$ , la f.d.r. de la loi exponentielle standard ( $F(t) = 0$  pour  $t < 0$ ,  $F(t) = 1 - e^{-t}$ , pour  $0 \leq t \leq \infty$ ). Le *processus empirique des espacements uniformes* est alors défini par

$$\delta_n(t) = n^{1/2} (\mathbb{F}_n(t) - F(t)) \quad \text{pour } -\infty < t < \infty.$$

Pour faciliter les calculs, il est de coutume d'utiliser un changement de variable, grâce à la fonction de quantile  $G$  de  $F$ , définie par  $G(s) = -\log(1 - s)$ , pour  $0 \leq s < 1$ . (Par convention, on note  $G(1) = \infty$ ). La fonction de répartition empirique modifiée est alors notée  $U_n(s) = \mathbb{F}_n(G(s))$ , pour  $0 \leq s \leq 1$ . Le processus empirique des espacements modifié est alors défini, pour tout  $0 \leq s \leq 1$ , par

$$a_n(s) = n^{1/2}(U_n(s) - s). \tag{0.0.6}$$

---

Un des résultats fondamentaux dans l'étude de ce processus est le résultat d'approximation forte par un processus gaussien obtenu par Beirlant [9]. Il établit l'existence, sur un espace de probabilité convenable, d'une suite de ponts browniens  $B_1, B_2, \dots$  telle que, avec probabilité 1,

$$\sup_{0 \leq s \leq 1} |a_n(s) - \Gamma_n(s)| = O(n^{-1/4}(\log n)^{3/4}) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \quad (0.0.7)$$

où

$$\Gamma_n(s) = B_n(s) - G(s)e^{-G(s)} \int_0^1 B_n(u) dG(u) \text{ pour } 0 \leq s \leq 1. \quad (0.0.8)$$

Dindar [44] obtient une loi limite fonctionnelle pour les fonctions d'accroissements du processus des espacements. Posons pour tout  $n \geq 1$  et  $0 < h < 1$ ,

$$\Delta a_n(h, t; s) = a_n(t + hs) - a_n(t)$$

pour  $0 \leq s \leq 1$  et  $0 \leq t \leq 1 - h$ . D'autre part,  $\beta_n = (2h_n \{\log(1/h_n) + \log_2 n\})^{-1/2}$  pour  $n \geq 1$ . Dindar [44] montre que sous les hypothèses (H1-9-10), la suite de fonctions

$$\{\beta_n \Delta a_n(h_n, t; \cdot) : 0 \leq t \leq 1 - h_n\},$$

recouvre complètement en probabilité l'ensemble  $\mathbb{K}_0^{\frac{d}{d+1}}$  (voir (0.0.1)).

Le résultat de Deheuvels et Mason [38] exposé plus haut (0.0.2) a été étendu à des versions plus générales. Deheuvels et Mason [39] traitent le cas de processus empiriques indexés par des ensembles. Mason [86] obtient une loi fonctionnelle du logarithme pour le processus empirique uniforme indexé par une classe de fonctions. Ce processus est engendré par un échantillon  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$  de variables aléatoires indépendantes, uniformément distribuées sur  $(0, 1)^d$ . La classe de fonctions  $\mathcal{F}$  vérifie certaines conditions que nous explicitons dans la suite (voir p.55). Mason [86] (voir aussi Einmahl et Mason [49]) définit le processus empirique uniforme local au point  $\mathbf{z} \in [0, 1]^d$  indexé par  $f \in \mathcal{F}$  par

$$\alpha_n(h_n, \mathbf{z}; f) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left\{ f\left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{U}_i}{h_n}\right) - Ef\left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{U}}{h_n}\right) \right\} \quad (0.0.9)$$

Il montre alors que  $\{(2 \log(1/h_n))^{-1/2} \alpha_n(h_n, \mathbf{z}; \cdot), \mathbf{z} \in J\}$  recouvre complètement un certain ensemble  $\mathcal{H}$  que nous définirons par la suite,  $J$  étant un compact de  $\mathbb{R}^d$  d'intérieur non vide.

Nous avons vu que le résultat de Deheuvels et Mason [38] est valable sous (H1-5-7). Ce sont les conditions standard souvent appelées CRS (Csörgő-Révész-Stute). De nombreux résultats ont été obtenus sous des conditions « non-standard » c'est à dire ne vérifiant pas les conditions CRS. Lorsque (H7) n'est pas vérifié, nous sommes dans le cas de ce que nous appelons des *grands espacements*. Nous sommes donc dans le cas où (H8) est vérifié. Deheuvels [31] a obtenu une loi limite fonctionnelle des accroissements du processus empirique lorsque (H8) est vérifié. Plus précisément, il montre que sous (H1-8),  $\{(2h_n \log_2 n)^{-1/2} \Delta \alpha_n(h_n, t; \cdot) : 0 \leq t \leq 1 - h_n\}$  recouvre maximalelement  $\mathbb{K}_0^{d+1}$  et minimalement  $\mathbb{K}_0^d$ . Autrement dit, pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous avons à partir d'un certain rang les inclusions suivantes.

$$\mathbb{K}_0^d \subseteq \{(2h_n \log_2 n)^{-1/2} \Delta \alpha_n(h_n, t; \cdot) : 0 \leq t \leq 1 - h_n\}^\varepsilon \subseteq (K_0^{d+1})^{2\varepsilon}. \quad (0.0.10)$$

Des résultats analogues ont été obtenus pour des *moyens accroissements* (H3) par Mason [84] (voir aussi Deheuvels et Mason [37] et Lucas [81]). Lorsque (H4) est vérifié, nous sommes en présence de *petits accroissements*. Un résultat limite fonctionnel a été établi dans ce cas par Deheuvels [32].

Louani et Lucas [77] ont étudié les fractales aléatoires engendrées par les accroissements du processus empirique uniforme dans le cas de *petits accroissements* (c'est à dire sous (H1-4)) et de *grands accroissements* (c'est à dire sous (H1-8)).

## ii) Processus de Wiener

Soit  $\{W(t) : t \in [0, 1]\}$  la restriction à l'intervalle  $[0, 1]$  d'un processus de Wiener standard. Nous nous intéressons, comme pour le processus empirique uniforme, aux fonctions d'accroissements du processus de Wiener. Celles-ci se définissent, pour  $0 < h < 1$ , par

$$\Delta W(h, t; s) = W(t + hs) - W(t), \text{ pour } 0 \leq s \leq 1 \text{ et } 0 \leq t \leq 1 - h.$$

Nous obtenons des résultats de lois limites fonctionnelles similaires à ceux obtenus pour le processus empirique uniforme. Les calculs étant généralement moins compliqués dans

le cas du processus de Wiener, les résultats relatifs au processus de Wiener ont pour la plupart du temps été découverts avant ceux relatifs au processus empirique uniforme.

En 1985, de Acosta [2] (voir aussi Mueller [88] et Révész [94]) montre que, pour  $0 < h < 1$ , la suite de fonctions

$$\left\{ \frac{\Delta W(h, t; \cdot)}{(2h \log(1/h))^{1/2}} : t \in [0, 1 - h] \right\}$$

recouvre presque sûrement complètement l'ensemble de Strassen, noté plus haut  $\mathbb{K}_0^1$ . Nous en déduisons donc que pour toute fonctionnelle  $\Phi : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  continue,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \Phi \left( (2h \log(1/h))^{-1/2} \Delta W(h, t; \cdot) \right) \right\} = \sup_{f \in \mathbb{K}_0^1} \Phi(f) \quad \text{p.s.}$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \inf_{0 \leq t \leq 1-h} \Phi \left( (2h \log(1/h))^{-1/2} \Delta W(h, t; \cdot) \right) \right\} = \inf_{f \in \mathbb{K}_0^1} \Phi(f) \quad \text{p.s.}$$

Une loi fonctionnelle du logarithme itéré pour le processus de Wiener a été établie en 1993 par Nina Gantert [55]. Plus précisément, elle montre que, pour  $t_0 \in [0, 1)$ , la suite

$$\left\{ \frac{\Delta W(h, t_0; \cdot)}{(2h \log_2(1/h))^{1/2}}, h > 0 \right\},$$

est presque sûrement relativement compacte dans  $B(0, 1)$  et son ensemble limite est  $\mathbb{K}_0^1$ . De la même manière que précédemment, on obtient que pour toute fonctionnelle  $\Phi : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  continue,

$$\limsup_{h \downarrow 0} \Phi \left( (2h \log_2(1/h))^{-1/2} \Delta W(h, t_0; \cdot) \right) = \sup_{f \in \mathbb{K}_0^1} \Phi(f) \quad \text{p.s.}$$

Remarquons que si l'on choisit  $\Phi(f) = \pm f(1)$  on retrouve la loi du logarithme itéré de Lévy [72].

Tous ces résultats ont amené Deheuvels et Mason [40] à considérer l'ensemble

$$S(f) = \left\{ t \in [0, 1) : \liminf_{h \downarrow 0} \left\| \frac{\Delta W(h, t; \cdot)}{(2h \log(1/h))^{1/2}} - f \right\| = 0 \right\},$$

et pour tout  $\Lambda \in [0, 1)$ , l'ensemble

$$S_\Lambda = \bigcup \left\{ S(f) : f \in \mathbb{K}_0^1, \int_0^1 f^2(s) ds \geq \Lambda \right\}.$$

Ils ont établi que pour chaque fonction  $f \in \mathbb{K}_0^1$  telle que  $\int_0^1 \dot{f}^2(s) ds \in (0, 1)$ ,

$$\dim S(f) = 1 - \int_0^1 \dot{f}^2(s) ds \text{ et } \dim S_\Lambda = 1 - \Lambda.$$

À partir de ces résultats, on peut retrouver le théorème antérieur d'Orey et Taylor [90] qui ont étudié l'ensemble des points au voisinage desquels de grandes oscillations du processus de Wiener ont lieu. En particulier, pour  $\Lambda \in [0, 1)$ ,

$$\dim B_\Lambda = \dim \left\{ t \in [0, 1) : \limsup_{h \downarrow 0} \frac{\Delta W(h, t; 1)}{(2h \log(1/h))^{1/2}} \geq \Lambda \right\} = 1 - \Lambda^2.$$

Dindar [46] a généralisé ce résultat au processus de Wiener bivarié

$$\{W(s, t), 0 \leq s, t \leq 1\}.$$

Plus précisément, pour tout  $\Lambda \in [0, 1]$ , il définit l'ensemble

$$F_\Lambda = \left\{ 0 \leq s, t \leq 1 : \limsup_{h \downarrow 0} \frac{|W([s, s+h] \times [t, t+h])|}{(2h^2 \log(1/h^2))^{1/2}} \geq \Lambda \right\},$$

où  $W([s, s+h] \times [t, t+h]) = W(s+h, t+h) - W(s, t+h) - W(s+h, t) + W(s, t)$ . Il calcule la dimension de Hausdorff de cet ensemble et trouve  $\dim F_\Lambda = 2(1 - \Lambda^2)$ . Ce résultat a récemment été généralisé au cas de  $N$  paramètres par Lin et Cheng [76]. Deheuvels et Lifshits [36] généralisent encore ce résultat dans le cas où la norme uniforme est remplacée par une norme dite « consistante ».

## B. Synthèse des travaux

Nous indiquons dans cette partie les résultats originaux obtenus au cours de cette thèse. Les premiers résultats obtenus concernent les oscillations du processus de Wiener multi-paramétré indexé par une classe de fonctions et sont consignés dans le Chapitre 2 de cette thèse. Mason [85] obtient un résultat limite fonctionnel analogue au résultat de Mason [86] pour le processus empirique uniforme (0.0.9) dans le cas d'un processus de Wiener indexé par une classe de fonctions. Ce processus indexé par  $f \in \mathcal{F}$  en  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$

---

est défini comme suit, pour  $0 < h < 1$ ,  $\mathbf{z} \in [0, 1]^d$  et  $f \in \mathcal{F}$  la classe de fonctions considérée.

$$W(h, \mathbf{z}; f) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{u}}{h^{1/d}}\right) dW(\mathbf{u}).$$

Mason [85] a alors montré sous certaines conditions que, pour  $J \in \mathbb{R}^d$  un compact d'intérieur non-vide, la suite

$$\{(2h \log(1/h))^{-1/2} W(h, \mathbf{z}; \cdot) : \mathbf{z} \in J\},$$

recouvre presque sûrement complètement un ensemble  $\mathcal{H}$  que nous définirons plus tard (voir Chapitre 2.2 p. 55). La démonstration est inspirée de celle de Mason [86] et du travail d'Arcones [5; 6] sur les résultats de grandes déviations. Nous donnons la démonstration complète de ce résultat. Dans une deuxième partie, nous étendons les résultats de Ben Arous et Ledoux [13] et de Deheuvels et Lifshits [36]. Nous obtenons ainsi une loi limite en remplaçant la norme uniforme par une norme *semi-consistante* (**Théorème 2.3.1**). L'outil fondamental que nous utilisons dans la démonstration est l'*inégalité isopérimétrique* (p.173) qui permet d'obtenir des résultats de grandes déviations.

Dans le Chapitre 3, nous utilisons les résultats limites fonctionnels obtenus pour les accroissements du processus de Wiener multivarié indexé par des classes de fonctions en prenant une fonctionnelle  $\Theta_\varphi$  appartenant à l'ensemble limite  $\mathcal{H}$  développé au Chapitre 2. Nous étudions alors l'ensemble des points exceptionnels de  $[0, 1]^d$  pour lesquels la fonction d'accroissement du processus considéré s'approche infiniment souvent (au sens de la norme uniforme) de la fonctionnelle  $\Theta_\varphi$ . En termes mathématiques, nous étudions l'ensemble

$$S(\Theta_\varphi) = \left\{ \mathbf{z} \in [0, 1]^d : \liminf_{h \downarrow 0} \|(2h \log(1/h))^{-1/2} W(h, \mathbf{z}; \cdot) - \Theta_\varphi(\cdot)\|_{\mathcal{F}} = 0 \right\}.$$

Nous montrons alors que, pour toute fonctionnelle  $\Theta_\varphi \in \mathcal{H}$  telle que

$$\int_{[0,1]^d} \varphi(\mathbf{u})^2 d\mathbf{u} \in (0, 1),$$

l'ensemble  $S(\Theta_\varphi)$  est presque sûrement dense dans  $[0, 1]^d$  et

$$\dim S(\Theta_\varphi) = d \left( 1 - \int_{[0,1]^d} \varphi(\mathbf{u})^2 d\mathbf{u} \right).$$

Nous considérons également, pour tout  $\Lambda \in [0, 1)$ , l'ensemble

$$S_\Lambda = \bigcup \left\{ L(\Theta_\varphi), \Theta_\varphi \in \mathcal{H}_1, \int_{[0,1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \geq \Lambda^2 \right\},$$

et nous montrons que  $\dim S_\Lambda = d(1 - \Lambda^2)$  (**Théorème 3.1.11**). Enfin, pour terminer ce chapitre, nous établissons un résultat similaire pour les accroissements du processus empirique uniforme indexé par une classe de fonctions dont nous avons exposé le résultat limite fonctionnel démontré par Mason [86] précédemment. Nous obtenons donc une généralisation des résultats de Deheuvels et Mason [41] et de Dindar [44] (voir aussi Deheuvels et Lifshits [36]) (**Théorème 3.4.1**).

Dans le Chapitre 4, nous généralisons les résultats obtenus par Hawkes [61] pour les espacements d'ordre 1, au cadre multivarié. Une première difficulté est de définir un espacement dans ce cadre plus large. Ce travail a été fait dans un premier temps par Deheuvels [30] qui définit des espacements « blocs » qui correspondent aux plus grands pavés ne contenant aucun point de l'échantillon considéré. En utilisant cette définition et dans la continuité de Hawkes [61] et du Chapitre 3, nous considérons l'ensemble des points au voisinage desquels nous avons infiniment souvent de grands espacements. Autrement dit, pour  $\mathbf{z} \in [0, 1]^d$  et en notant  $\chi_n(\mathbf{z})$  l'espacement (en termes de longueur) associé à  $\mathbf{z}$ , nous considérons, pour tout  $0 \leq c \leq 1$ , les ensembles

$$V(c) = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} n\chi_n^d(\mathbf{z}) / \log n > c\},$$

$$L(c) = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} n\chi_n^d(\mathbf{z}) / \log n = c\}.$$

Nous montrons (**Théorème 4.2.2**) que, pour  $0 \leq c \leq 1$ , nous avons presque sûrement

$$\dim V(c) = \dim L(c) = d(1 - c).$$

La démonstration de ce théorème est basée sur le *principe de distribution de masse* (voir p. 36). Nous introduisons une mesure positive sur notre ensemble et ce principe nous permet d'obtenir une borne inférieure pour la dimension de Hausdorff.

Dans une deuxième partie, nous utilisons une définition plus générale des espacements, donnée par Deheuvels *et al.* [34], qui autorise aux espacements de prendre des formes plus générales (comme des boules par exemple). Nous montrons que nous obtenons

---

des résultats similaires en imposant aux « formes autorisées » de satisfaire certaines conditions dites « conditions d'entropie » (**Théorème 4.4.1**).

Enfin, dans le Chapitre 5, nous proposons tout d'abord l'étude de la mesure de Hausdorff exacte des espacements en conjecturant un résultat sous forme de test intégral à la manière de Kôno [70] (**Conjecture 5.1.4**). Ensuite nous portons notre intérêt sur le processus empirique uniforme des espacements  $\{a_n(s) : 0 \leq s \leq 1\}$ , en rappelant (0.0.6). À partir des résultats de Dindar [44], il est naturel d'étudier les ensembles de points exceptionnels du processus empirique uniforme des espacements. Nous nous plaçons sous des conditions standards de la suite  $\{h_n : n \geq 1\}$ . Nous introduisons, pour  $f \in \mathbb{K}_0^1$ , l'ensemble

$$R(f) = \left\{ t \in [0, 1] : \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\beta_n(a_n(t + h_n \cdot) - a_n(t)) - f\| = 0 \right\}.$$

Nous introduisons la condition suivante sur  $\{h_n : n \geq 1\}$ .

$$(H11) \quad 1/h_n = o(n^{1/2}(\log n)^{-1/2}).$$

Nous conjecturons alors que c'est un ensemble fractal et que sous (H1-7-11),

$$\dim R(f) = 1 - \int_0^1 \dot{f}^2(u) du.$$

(**Conjecture 5.2.11**).



# Chapitre 1

## Objets Fractals

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Dimension de Hausdorff</b>	<b>30</b>
<b>1.2</b>	<b>Propriétés de la mesure et de la dimension de Hausdorff</b>	<b>32</b>
1.2.1	Mesure de Hausdorff	32
1.2.2	Dimension de Hausdorff	33
<b>1.3</b>	<b>Méthodes de calcul de la dimension de Hausdorff</b>	<b>34</b>
<b>1.4</b>	<b>Autres définitions de la dimension</b>	<b>38</b>
1.4.1	La box dimension (dimension de boîte)	38
1.4.2	Mesure et dimension de Tricot	41
<b>1.5</b>	<b>Exemples de fractales</b>	<b>42</b>
1.5.1	Ensemble de Cantor	42
1.5.2	Le mouvement Brownien	43

---

Le concept de fractale ou d'objet fractal a été rendu populaire par Mandelbrot en 1975 dans le but d'étudier les processus et les formes irrégulières et fragmentées. Il est difficile de donner une définition qui n'exclue pas des ensembles qui mériteraient d'être vus comme des fractales. La plus courante cependant est celle donnée par Mandelbrot. *Une fractale est un ensemble dont la dimension de Hausdorff est quelconque.* Notons que l'on peut définir d'autres mesures de la dimension que celle de Hausdorff. Ceci sera présenté par la suite.

## 1.1 Dimension de Hausdorff

La dimension de Hausdorff est construite à partir d'une mesure, la *mesure de Hausdorff*. Elle a l'avantage d'être définie pour n'importe quelle partie de  $\mathbb{R}^n$ . Cependant, dans de nombreux cas, son calcul se révèle très compliqué. Voyons comment nous la définissons. Pour toute partie  $A$  non vide de  $\mathbb{R}^n$ , définissons le diamètre de  $A$  par  $|A| = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$  où  $|\cdot|$  désigne la distance euclidienne. La famille dénombrable  $\{U_i : i \geq 1\}$  de parties de  $\mathbb{R}^n$  est un  $\delta$ -recouvrement de  $A$  si  $A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} U_i$  et pour tout  $i$ ,  $0 < |U_i| \leq \delta$ . On définit alors la  $s^c$ -mesure de  $A$  pour  $c > 0$  par

$$s^c - mes(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \inf \left\{ \sum_{i \geq 1} |U_i|^c : \{U_i\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } A \right\} \right], \quad (1.1.1)$$

où l'infimum est pris sur toutes les collections de  $\delta$ -recouvrements  $\{U_i : i \geq 1\}$  de  $A$ . Cette mesure correspond à la *mesure de Hausdorff*. On peut remarquer que si  $d > c$ , on a

$$\sum_i |U_i|^d \leq \delta^{d-c} \sum_i |U_i|^c.$$

Nous voyons que si  $s^c - mes(A) < \infty$  alors  $s^d - mes(A) = 0$  pour  $d > c$ . Il y a donc une valeur de  $c$  pour laquelle  $s^c - mes(A)$  passe de  $\infty$  à 0. C'est cette valeur qui correspond à la *dimension de Hausdorff* de  $A$  (aussi appelée parfois *dimension de Hausdorff-Besicovitch*). Nous écrivons :

$$\dim(A) = \inf\{c > 0 : s^c - mes(A) = 0\} = \sup\{c > 0 : s^c - mes(A) = \infty\}. \quad (1.1.2)$$

Les propriétés suivantes sont immédiates :

$$\begin{aligned} s^c - mes(A) > 0 &\Rightarrow \dim(A) \geq c, \\ s^c - mes(A) = 0 &\Rightarrow \dim(A) \leq c. \end{aligned}$$

REMARQUE 4. Nous pouvons utiliser des recouvrements particuliers, qui mèneront aussi à la dimension de Hausdorff. Utilisons par exemple des boules sphériques. Nous

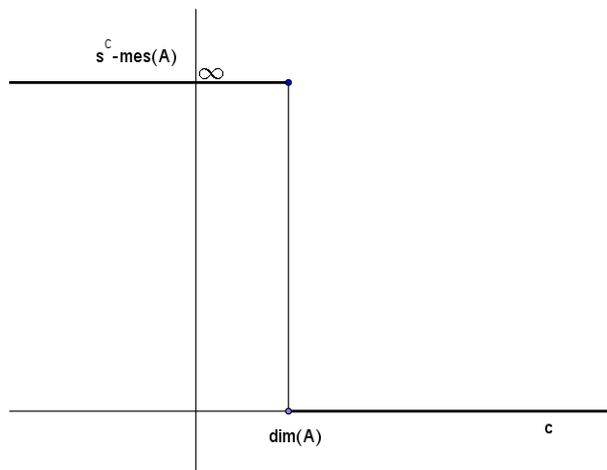


FIG. 1.1 – saut de la mesure

définissons une nouvelle mesure :

$$s_b^c - mes(A) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum |B_i|^c : \{B_i\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } A \text{ par des boules} \right\}.$$

Il est clair que  $s^c - mes(A) \leq s_b^c - mes(A)$ . Mais par ailleurs, si  $\{U_i\}$  est un  $\delta$ -recouvrement de  $A$ , on prend pour  $B_i$  une boule de rayon  $|U_i| < \delta$  contenant  $U_i$ . La collection  $\{B_i\}$  ainsi choisie est également un  $\delta$ -recouvrement de  $A$ . Mais  $\sum |B_i|^c \leq \sum (2|U_i|)^c = 2^c \sum |U_i|^c$ . On obtient donc que

$$s^c - mes(A) \leq s_b^c - mes(A) \leq 2^c \times s^c - mes(A).$$

Cela implique que le saut de  $\infty$  à 0 est le même pour les deux mesures : les dimensions définies sont donc bien équivalentes.

Nous pouvons aussi utiliser les intervalles binaires. Pour une simplicité d'écriture, plaçons nous dans le cas où  $A$  est un sous-ensemble de  $[0, 1)$ . Les intervalles binaire s'écrivent de la forme  $[r2^{-k}, (r+1)2^{-k}]$ , où  $k \geq 0$  est un entier et  $r = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ .

La « net mesure » est définie par

$$s_b^n - mes(A) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum |U_i|^c : \{U_i\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement} \right. \\ \left. \text{par intervalles binaires} \right\}.$$

De la même manière que précédemment nous pouvons voir que

$$s^c - mes(A) \leq s_n^c - mes(A) \leq 2^{c+1} \times s^c - mes(A).$$

Cette nouvelle mesure redonne à nouveau la même dimension. L'intérêt de cette mesure est que deux intervalles binaires sont soit disjoints, soit inclus l'un dans l'autre. Nous pouvons donc nous restreindre à des recouvrements d'intervalles binaires disjoints. Cela représente un net avantage par rapport à la mesure de Hausdorff.

## 1.2 Propriétés de la mesure et de la dimension de Hausdorff

### 1.2.1 Mesure de Hausdorff

Voyons dans un premier temps les principales propriétés de la mesure de Hausdorff. On peut vérifier qu'il s'agit bien d'une mesure et en particulier que  $s^c - mes(\emptyset) = 0$ . De plus, si  $\{A_i\}$  est une collection dénombrable de boréliens disjoints, alors,

$$s^c - mes\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} s^c - mes(A_i), \quad (1.2.1)$$

et de manière plus générale, pour toute collection dénombrable  $\{A_i\}$  d'ensembles, nous avons l'inégalité :

$$s^c - mes\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} s^c - mes(A_i). \quad (1.2.2)$$

Nous allons voir que les propriétés d'échelle que nous connaissons bien pour les longueurs et les surfaces sont encore valables pour la mesure de Hausdorff.

**Proposition 1.2.1.** *Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  et  $\lambda > 0$  alors*

$$s^c - \text{mes}(\lambda A) = \lambda^c \times s^c - \text{mes}(A), \quad (1.2.3)$$

où  $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$

*Démonstration.* Si  $\{U_i\}$  est un  $\delta$ -recouvrement de  $A$  alors  $\{\lambda U_i\}$  est un  $\lambda\delta$ -recouvrement de  $\lambda A$ . Ainsi,

$$s^c - \text{mes}(\lambda A) \leq \liminf_{\lambda\delta \rightarrow 0} \sum |\lambda U_i|^c = \liminf_{\lambda\delta \rightarrow 0} \lambda^c \sum |U_i|^c \leq \lambda^c \times s^c - \text{mes}(A).$$

En remplaçant  $\lambda$  par  $1/\lambda$  nous obtenons l'inégalité dans l'autre sens. □

Nous obtenons un résultat similaire pour des transformations plus générales.

**Proposition 1.2.2.** *Soit  $A \in \mathbb{R}^n$  et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction qui vérifie la condition de Hölder, c'est à dire telle que*

$$|f(x) - f(y)| \leq \gamma |x - y|^\alpha \quad (x, y) \in A,$$

pour des constantes  $\gamma > 0$  et  $\alpha > 0$ . Alors, pour tout  $c > 0$ ,

$$s^{c/\alpha} - \text{mes}(f(A)) \leq \gamma^{c/\alpha} \times s^c - \text{mes}(A).$$

*Démonstration.* Soit  $\{U_i\}$  est un  $\delta$ -recouvrement de  $A$ . Nous avons alors l'inégalité  $|f(A \cap U_i)| \leq \gamma |U_i|^\alpha$ . Donc,  $\{f(A \cap U_i)\}$  est un  $\epsilon$ -recouvrement de  $f(A)$ , où  $\epsilon = \gamma\delta^\alpha$ . Ainsi,

$$\sum_i |f(A \cap U_i)|^{c/\alpha} \leq \gamma^{c/\alpha} \sum_i |U_i|^c,$$

ce qui nous permet de conclure. □

REMARQUE 5. Dans la condition de Hölder, si  $\alpha = 1$ ,  $f$  est dite *lipschitzienne*.

## 1.2.2 Dimension de Hausdorff

Il est possible de vérifier qu'une courbe lisse (continûment dérivable) a une dimension 1, une surface lisse a une dimension 2 et de même pour les plus grandes dimensions. De plus,

$$\text{si } A \subseteq B, \text{ alors, } \dim(A) \leq \dim(B). \quad (1.2.4)$$

Nous pouvons aussi montrer que si  $\{A_i\}$  est une suite dénombrable d'ensembles, alors  $\dim(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \{\dim(A_i)\}$ . En effet, d'une part nous avons  $\dim(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \dim(A_j)$  pour tout  $j$ . D'autre part, si  $c > \dim(A_i)$  pour tout  $i$ , alors  $s^c - \text{mes}(A_i) = 0$  et donc  $s^c - \text{mes}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$  ce qui donne l'autre partie de l'égalité.

Les propriétés de transformation de la dimension de Hausdorff découlent directement des résultats analogues pour la mesure de Hausdorff donnés proposition 1.2.2.

**Proposition 1.2.3.** *Soit  $A \in \mathbb{R}^n$  et supposons que*

$$|f(x) - f(y)| \leq \gamma |x - y|^\alpha \quad (x, y \in A).$$

Alors,  $\dim f(A) \leq (1/\alpha) \dim A$

*Démonstration.* Si  $c > \dim A$ , alors, par la proposition 1.2.2,

$$s^{c/\alpha} - \text{mes}(f(A)) \leq \gamma^{c/\alpha} \times s^c - \text{mes}(A) = 0.$$

Donc  $\dim f(A) \leq c/\alpha$ . □

Il en découle directement le corollaire suivant :

**Corollaire 1.2.4.** *Soit  $A \in \mathbb{R}^n$ .*

- *Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  est lipschitzienne alors  $\dim f(A) \leq \dim A$ ,*
- *Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  est bi-lipschitzienne, i.e.*

$$\gamma_1 |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq \gamma_2 |x - y| \quad (x, y \in A),$$

*où  $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \infty$ , alors  $\dim f(A) = \dim A$ .*

## 1.3 Méthodes de calcul de la dimension de Hausdorff

Une technique que nous utiliserons souvent pour calculer la dimension de Hausdorff d'un ensemble consiste à encadrer la dimension (avec les deux bornes égales). La borne supérieure est assez simple à obtenir. En effet, nous avons vu que si  $s^c - \text{mes}(A) = 0$

alors  $\dim(A) \leq c$ . Donc pour montrer que  $\dim(A) \leq c$ , il suffit pour tout  $\delta > 0$  de construire une famille de  $\delta$ -recouvrements  $\{U_i(\delta) : i \geq 0\}$  particuliers de  $A$  tel que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i \geq 1} |U_i(\delta)|^c = 0.$$

Par contre, montrer que  $\dim(A) \geq c$  s'avère beaucoup plus compliqué. Un outil très utile pour les bornes inférieures est le lemme suivant donné par Orey et Taylor [90]. Voici une version améliorée donnée dans le ‘‘Lemma 3.5’’ de Deheuvels et Mason [41].

**Lemme 1.3.1.** *Soit  $A \in [0, 1]^d$  tel que  $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$ , où  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$  est une suite décroissante pour l'inclusion, de la forme  $E_m = \bigcup_{k=1}^{M_m} I_{m,k}$  où  $\{I_{m,k} : 1 \leq k \leq M_m\}$  est une collection de pavés disjoints de  $\mathbb{R}^d$ , tels que*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \max_{1 \leq k \leq M_m} |I_{m,k}| \right] = 0 \text{ et } \lim_{m \rightarrow \infty} M_m = \infty. \quad (1.3.1)$$

Supposons maintenant qu'il existe deux constantes  $\Delta > 0$  et  $\delta > 0$  telles que, pour tout pavé  $I \subseteq [0, 1]^d$ , tel que  $|I| \leq \Delta$ , il existe une constante  $m(I)$  telle que, pour tout  $m \geq m(I)$ ,

$$M_m(I) := \#\{I_{m,k} \subseteq I : 1 \leq k \leq M_m\} \leq \delta |I|^c M_m, \quad (1.3.2)$$

alors, on obtient l'inégalité  $s^c - \text{mes}(A) > 0$ .

*Démonstration.* Considérons un  $\delta$ -recouvrement  $\bigcup_{i=1}^N I_i \supseteq A$  de  $A$ .

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{M_m} I_{m,k} \right\},$$

les  $I_i$  étant les intervalles ouverts tels que  $|I_i| \leq \delta$  pour  $i = 1, \dots, N$ . Ainsi, pour tout  $I_i$  et tout  $m \geq m_0 := \max_{1 \leq i \leq N} m(I_i)$  nous obtenons l'inégalité

$$\#\{I_{m,k} \subseteq I_i : 1 \leq k \leq M_m\} \leq \delta |I_i|^c M_m.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^N \#\{I_{m,k} \subseteq I_i : 1 \leq k \leq M_m\} \leq \delta \sum_{i=1}^N |I_i|^c M_m.$$

Puisqu'il existe  $m_1$  tel que pour tout  $m > m_1$ ,  $\bigcup_{k=1}^{M_m} I_{m,k} \subseteq \bigcup_{i=1}^N I_i$ , les intervalles  $I_{m,k}$  qui ne sont inclus dans aucun des  $I_i = (c_i, d_i)$  pour  $i = 1, \dots, N$  doivent contenir au

moins un point parmi  $c_1, \dots, c_N, d_1, \dots, d_N$ . Les  $I_{m,k}, k = 1, \dots, M_m$  étant disjoints, nous avons

$$\sum_{i=1}^N \#\{I_{m,k} \subseteq I_i : 1 \leq k \leq M_m\} \geq M_m - 2N.$$

Ainsi, pour tout  $m \geq \max\{m_0, m_1\}$  tel que  $M_m \geq 4N$ , nous obtenons l'inégalité

$$\sum_{i=1}^N |I_i|^c \geq \delta^{-1}(1 - 2NM_m^{-1}) \geq 1/2\delta^{-1} > 0. \quad (1.3.3)$$

Le raisonnement étant effectué pour un  $\delta$ -recouvrement  $\bigcup_{i=1}^N I_i$  quelconque de  $A$ , le résultat (1.3.3) est vrai pour le recouvrement optimal. Donc  $s^c - \text{mes}(A) > 0$ .  $\square$

Une autre méthode est le « *principe de distribution de masse* ». Soit  $\mu$  une mesure positive finie sur  $A$ . Pour  $c$  fixé, supposons qu'il existe  $\gamma > 0$  et  $\delta > 0$  tels que  $\mu(U) \leq \gamma|U|^c$  pour tout ensemble  $U$  avec  $|U| \leq \delta$ . Alors,

$$s^c - \text{mes}(A) \geq \mu(A)/\gamma.$$

En effet, si  $\{U_i\}$  est un recouvrement de  $A$ , alors

$$0 < \mu(A) = \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq \gamma \sum_i |U_i|^c.$$

Il suffit donc de prendre l'infimum et la limite pour avoir le résultat cherché. Le principe de masse est simple, mais la condition  $\mu(U) \leq \gamma|U|^c$  peut être compliquée à satisfaire. En fait, cette condition n'a besoin d'être valide que pour des boules suffisamment petites, centrées sur chaque point de  $A$ .

**Proposition 1.3.2.** *Soit  $\mu$  une mesure positive sur  $\mathbb{R}^n$ , soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  un borélien et soit  $0 < \gamma < \infty$  une constante. Alors, si  $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x))/r^c < \gamma$  pour tout  $x \in A$  alors  $s^c - \text{mes}(A) \geq \mu(A)/\gamma$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $\delta > 0$  posons

$$A_\delta = \{x \in A : \mu(B_r(x)) < (\gamma - \epsilon)r^c \text{ pour tout } 0 < r \leq \delta \text{ et pour } \epsilon > 0\}.$$

Soit  $\{U_i\}$  un  $\delta$ -recouvrement de  $A$  et donc de  $A_\delta$ . Pour tout  $U_i$  contenant un point  $x$  de  $A_\delta$ , la boule  $B$  centrée en  $x$  et de rayon  $|U_i|$  contient  $U_i$ . Par définition,  $\mu(U_i) \leq \mu(B) < \gamma|U_i|^c$  donc

$$\mu(A_\delta) \leq \sum_i \{\mu(U_i) : U_i \text{ intersecte } A_\delta\} \leq \gamma \sum_i |U_i|^c.$$

Et puisque  $A_\delta \rightarrow A$  quand  $\delta \rightarrow 0$  nous obtenons le résultat cherché.  $\square$

Remarquons que l'égalité  $\dim(A) = \lim_{r \rightarrow 0} \log \mu(B_r(x)) / \log r$  découle de cette proposition (si la limite existe). Les deux lemmes suivants sont démontrés dans Falconer [51] p.58.

**Lemme 1.3.3.** *Soit  $[0, 1] = E_0$  et pour tout  $k \geq 1$ ,  $E_k$  est une union finie d'intervalles disjoints fermés. On suppose que  $E_{k-1}$  contient au moins  $m_k$  intervalles de  $E_k$ , séparés par des trous de longueur au moins  $\varepsilon_k$ , où  $0 < \varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$ . Alors*

$$\dim \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \varepsilon_k)}. \quad (1.3.4)$$

*Démonstration.* Voir Falconer [51] p.59.  $\square$

**Lemme 1.3.4.** *Soit  $0 < s < 1$  et soit  $(n_k)_{k \geq 1}$  une suite croissante d'entiers telle que  $n_{k+1} \geq \max\{n_k^k, 3n_k^{1/s}\}$  pour tout  $k$ . Pour tout  $k$ , soit  $H_k \subset \mathbb{R}$  les intervalles de longueur  $n_k^{-1/s}$  également espacés par des trous de longueur  $n_k^{-1} - n_k^{-1/s}$ . Alors,*

$$\dim \bigcap_{k=1}^{\infty} H_k = s \quad (1.3.5)$$

*Démonstration.* Voir Falconer [51] p.60.  $\square$

Le désavantage de la technique de « *distribution de masse* », est de devoir estimer la « *masse* » d'un trop grand nombre de petits ensembles. La méthode du « *potentiel théorique* » permet d'éviter cela. Pour  $c \geq 0$ , le  $c$ -potentiel à un point  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  dû à la distribution de masse  $\mu$  est défini par :

$$\phi^c(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x - y|^c}.$$

La  $c$ -énergie de  $\mu$  est définie par :

$$I^c(\mu) = \int \phi^c(x) d\mu(x) = \iint \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{|x - y|^c}.$$

**Théorème 1.3.5.** *Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^n$ . S'il existe une distribution de masse  $\mu$  sur  $A$  telle que  $I^c(\mu) < \infty$  alors  $s^c - \text{mes}(A) = \infty$  et  $\dim(A) \geq c$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $I^c(\mu) < \infty$  pour une distribution de masse  $\mu$  dont le support est dans  $A$ . Définissons

$$A_1 = \left\{ x \in A : \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x))/r^c > 0 \right\}.$$

Si  $x \in A_1$ , on peut trouver  $\epsilon > 0$  et une suite de nombres  $\{r_i\}$  décroissant vers 0 et telle que  $\mu(B_{r_i}(x)) \geq \epsilon r_i^c$ . Puisque que  $I^c(\mu) < \infty$  alors  $\mu(\{x\}) = 0$ . Ainsi, par continuité de  $\mu$ , en prenant  $q_i$  ( $0 < q_i < r_i$ ) suffisamment petit, nous obtenons que

$$\mu(B_{r_i}(x) \setminus B_{q_i}(x)) \geq \frac{1}{4} \epsilon r_i^c \quad (i = 1, 2, \dots).$$

En prenant si nécessaire des sous-suites, on peut supposer que  $r_{i+1} < q_i$  pour tout  $i$ . Donc les  $B_{r_i}(x) \setminus B_{q_i}(x) = D_i(x)$  sont des anneaux disjoints centrés en  $x$ . Alors, pour  $x \in A_1$ ,

$$\phi^c(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^c} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{D_i} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^c} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4} \epsilon r_i^c r_i^{-c} = \infty,$$

puisque  $|x-y|^{-c} \geq r_i^{-c}$  sur  $D_i$ . Mais puisque  $I^c(\mu) < \infty$ , alors  $\phi^c(x) < \infty$  pour presque tout  $x$ . On en conclut que  $\mu(A_1) = 0$ . Alors, en utilisant la propriété 1.7, nous pouvons écrire que, pour tout  $\gamma > 0$ ,

$$s^c - \text{mes}(A) \geq s^c - \text{mes}(A \setminus A_1) \geq \mu(A \setminus A_1)/\gamma \geq (\mu(A) - \mu(A_1))/\gamma = \mu(A)/\gamma.$$

Donc  $s^c - \text{mes}(A) = \infty$ . □

## 1.4 Autres définitions de la dimension

La dimension de Hausdorff est la plus répandue parmi les notions de dimension connues dans la littérature. Cependant, il existe d'autres définitions de la dimension. Nous allons en présenter quelques-unes dans ce chapitre.

### 1.4.1 La box dimension (dimension de boîte)

La *box dimension* ou *dimension de boîte*, est apparue dans les années 1930 sous les noms de *dimension entropique*, de *densité logarithmique*, ou de *dimension métrique*.

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $N_\delta(A)$  le plus petit nombre d'ensembles de diamètre au plus  $\delta$  qui peuvent couvrir  $A$ . Nous définissons alors la *box dimension inférieure* et la *box dimension supérieure* de  $A$  par, respectivement :

$$\underline{\dim}_B A = \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta},$$

$$\overline{\dim}_B A = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}.$$

Si ces deux valeurs sont égales, nous l'appelons la *box dimension* de  $A$

$$\dim_B A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}.$$

Expliquons brièvement la formule. Si l'on veut couvrir un segment de longueur 1 par des segments de longueur  $\delta$ , nous aurons besoin de  $1/\delta$  segments. Pour un carré de côté 1, il faudra  $1/\delta^2$  carrés de côté  $\delta$ . Pour un cube,  $1/\delta^3$  et ainsi de suite. C'est pour cela que s'il existe un nombre  $d$  tel que  $N_\delta(A) \sim 1/\delta^d$  quand  $\delta \rightarrow 0$ , alors  $d$  est la box dimension de  $A$ . Cela équivaut à ce qu'il existe une constante positive  $k$ , telle que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{N_\delta(A)}{1/\delta^d} = k \text{ ou encore } d = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}.$$

Nous pouvons aussi définir la dimension de manière équivalente en utilisant les maillages. Considérons une collection de cubes du  $\delta$ -maillage de  $\mathbb{R}^n$ . Il s'agit donc de cubes de la forme

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta],$$

où  $m_1, \dots, m_n$  sont des entiers. Soit  $N'_\delta(A)$  le nombre de cubes du  $\delta$ -maillage qui intersectent  $A$ . Ils constituent une collection d'ensembles de diamètre  $\delta\sqrt{n}$  qui recouvre  $A$ , donc

$$N_{\delta\sqrt{n}}(A) \leq N'_\delta(A).$$

Si  $\delta\sqrt{n} < 1$  alors

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(A)}{-\log(\delta\sqrt{n})} \leq \frac{\log N'_\delta(A)}{-\log \sqrt{n} - \log \delta}.$$

Ainsi, en prenant la limite quand  $\delta \rightarrow 0$ ,

$$\dim_B A \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(A)}{-\log \delta}.$$

D'autre part, n'importe quel ensemble de diamètre inférieur à  $\delta$  est inclus dans  $3^n$  cubes de maillage de côté  $\delta$ . (On choisit un cube contenant un point de l'ensemble et on lui adjoint ses cubes voisins). Donc

$$N'_\delta(A) \leq 3^n N_\delta(A).$$

En prenant le logarithme et la limite quand  $\delta \rightarrow 0$  nous obtenons que

$$\dim_B A \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(A)}{-\log \delta}.$$

Ainsi

$$\dim_B A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(A)}{-\log \delta}.$$

Nous pouvons interpréter cette formule comme suit :

Le nombre de cubes de maillages de côté  $\delta$  qui intersectent A est une indication sur la régularité ou l'irrégularité de A. La dimension reflète à quel point les irrégularités augmentent lorsque  $\delta \rightarrow 0$ .

Nous pouvons montrer que la définition de la *box dimension* reste identique si nous prenons pour  $N_\delta(A)$  :

- le plus petit nombre d'ensembles de diamètre au plus  $\delta$  qui recouvrent A ;
- le plus petit nombre de boules fermées de rayon  $\delta$  qui recouvrent A ;
- le plus petit nombre de cubes de côté  $\delta$  qui recouvrent A ;
- le nombre de cubes d'un  $\delta$ -maillage qui recouvrent A ;
- le plus grand nombre de boules disjointes de rayon  $\delta$  dont les centres sont dans A.

En pratique nous utilisons pour  $N_\delta(A)$  la définition qui convient le mieux pour l'exemple traité. La *box dimension* semble plus facile à calculer que la dimension de Hausdorff, mais elle possède néanmoins quelques désavantages. Cela est introduit par la proposition suivante :

**Proposition 1.4.1.** *Soit  $\bar{A}$  la fermeture de A. Alors,*

$$\underline{\dim}_B \bar{A} = \underline{\dim}_B A \text{ et } \overline{\dim}_B \bar{A} = \overline{\dim}_B A.$$

*Démonstration.* Soit  $B_1, \dots, B_k$  une collection finie de boules fermées de rayon  $\delta$ . Si l'ensemble fermé  $\bigcup_{i=1}^k B_i$  contient A, il contient aussi  $\bar{A}$ . Donc le plus petit nombre de boules fermées de rayon  $\delta$  qui recouvrent A est suffisant pour recouvrir  $\bar{A}$ , d'où le résultat.  $\square$

Ainsi, si  $A$  est sous-ensemble dense d'une région ouverte de  $\mathbb{R}^n$ , alors,  $\underline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B A = n$ . Par exemple, si  $A$  est l'ensemble des rationnels de  $[0,1]$ ,  $\overline{A} = [0,1]$  et donc  $\underline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B A = 1$ . Chaque rationnel a une dimension 0 mais l'union est de dimension 1. Nous n'avons donc pas la relation  $\dim_B \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sup_i \dim_B A_i$ .

### 1.4.2 Mesure et dimension de Tricot

Comme nous allons le voir, la dimension de Tricot [105] est un mélange entre la box dimension et la dimension de Hausdorff. Comme pour la mesure de Hausdorff, elle est définie par une mesure. Soit

$$s^c - mes_{T,0}(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \sup \left\{ \sum_i |B_i|^c : \{B_i\} \in D_\delta(A) \right\} \right], \quad (1.4.1)$$

où  $D_\delta(A)$  est l'ensemble des collections de boules disjointes de rayon au plus  $\delta$  dont les centres sont dans  $A$ . Pour l'instant,  $s^c - mes_{T,0}(A)$  n'est pas une mesure. (Le problème est le même que pour la box dimension). Posons alors

$$s^c - mes_T(A) = \inf \left\{ \sum_i s^c - mes_{T,0}(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

On peut vérifier que la  $s^c - mes_T(A)$  est une mesure. Nous pouvons alors définir la *dimension de Tricot* de la même manière que la dimension de Hausdorff par :

$$\dim_T A = \sup \{c : s^c - mes_T(A) = \infty\} = \inf \{c : s^c - mes_T(A) = 0\}.$$

Ici, la propriété manquante à la box dimension est bien vérifiée.

**Proposition 1.4.2.** *Pour toute collection dénombrable  $\{A_i\}$ ,*

$$\dim_T \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sup_i \dim_T A_i.$$

*Démonstration.* Il est clair que  $\dim_T(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sup_i \dim_T A_i$ . D'un autre côté, si nous avons  $\dim_T A_i < c$ , pour tout  $i$ , alors,

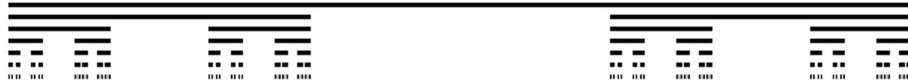
$$s^c - mes_T\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i s^c - mes_T(A_i) = 0,$$

et donc  $\dim_T(\bigcup_i A_i) \leq c$ . □

## 1.5 Exemples de fractales

### 1.5.1 Ensemble de Cantor

L'exemple de fractale le plus connu et le plus facile à construire est l'*ensemble de Cantor*. Il est construit à partir du segment unitaire et une suite d'opérations de suppression. Soit  $A$  l'ensemble de Cantor.  $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$  où les  $E_k$  sont définis de la manière suivante :  $E_0$  est l'intervalle  $[0,1]$ .  $E_1$  est obtenu en supprimant le tiers du milieu. Donc  $E_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ .  $E_2$  est obtenu en supprimant les deuxièmes tiers de ces intervalles. Donc  $E_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ . De la même manière, les  $E_k$  sont obtenus en supprimant les deuxièmes tiers de chaque  $E_{k-1}$ .



Nous allons montrer que la dimension de  $A$  est  $\dim(A) = \log 2 / \log 3$ . Notons  $c = \log 2 / \log 3$ . Les intervalles de  $E_k$  de longueur  $3^{-k}$  sont appelés intervalles basiques. Le recouvrement  $\{U_i\}$  de  $A$  par les  $2^k$  intervalles de  $E_k$  de longueur  $3^{-k}$  donne :  $s^c - \text{mes}(A) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum |U_i|^c = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k 3^{-kc} = 1$ . Nous obtenons donc que

$$s^c - \text{mes}(A) \leq 1 \text{ pour } c = \log 2 / \log 3.$$

D'autre part, il nous faut montrer que  $\sum |U_i|^c \geq 1/2 = 3^{-c}$  pour tout recouvrement  $\{U_i\}$  de  $A$ . En fait il suffit de le montrer pour  $\{U_i\}$  collection finie de sous-intervalles fermés de  $[0, 1]$ . Pour tout  $U_i$ , soit  $k$  un entier tel que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}.$$

Alors,  $U_i$  peut intersecter au plus un intervalle basique de  $E_k$ , puisque la séparation entre deux intervalles basiques est au moins de  $3^{-k}$ . Si  $j \geq k$ , alors  $U_i$  intersecte au plus  $2^{j-k} = 2^j 3^{-ck} \leq 2^j 3^c |U_i|^c$  intervalles basiques de  $E_j$ . Si nous choisissons  $j$  suffisamment grand pour que  $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$  pour tout  $U_i$ , alors, puisque  $\{U_i\}$  intersecte les  $2^j$  intervalles basiques de  $E_j$ , nous obtenons que  $2^j \leq \sum_i 2^j 3^c |U_i|^c$ , ainsi,  $\sum |U_i|^c \geq 1/2 = 3^{-c}$ .

Nous voyons dans la proposition suivante que les dimensions de Hausdorff et de « *box dimension* » de l'ensemble de Cantor sont identiques.

**Proposition 1.5.1.** *Soit  $A$  un ensemble de Cantor. Alors*

$$\underline{\dim}_B(A) = \overline{\dim}_B(A) = \log 2 / \log 3. \quad (1.5.1)$$

*Démonstration.* Considérons le recouvrement de  $A$  par les  $2^k$  intervalles de  $E_k$  de longueur  $3^{-k}$ . Alors, si  $3^{-k} < \delta \leq 3^{-(k+1)}$ ,  $N_\delta(A) \leq 2^k$ . Ainsi, par définition,

$$\overline{\dim}_B(A) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

D'un autre côté, tout intervalle de longueur  $\delta$  avec  $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$  possède une intersection non-vide avec au plus un des intervalles basiques de longueur  $3^{-k}$  utilisé dans la construction de  $A$ . Comme il y a  $2^k$  intervalles de ce type, alors, au moins  $2^k$  intervalles de longueur  $\delta$  sont nécessaires pour recouvrir  $A$ . Donc  $N_\delta(A) \geq 2^k$  d'où  $\underline{\dim}_B(A) \geq \log 2 / \log 3$ .  $\square$

L'ensemble de Cantor est un exemple d'ensemble *auto-similaire*. C'est à dire que le même objet géométrique est observable, même en augmentant l'échelle. Nous passons d'un niveau d'observation à un autre par une transformation géométrique. Les objets présentant ces homothéties internes sont à la base historique des fractales.

### 1.5.2 Le mouvement Brownien

Le mouvement Brownien a été découvert en 1827 par le botaniste R. Brown alors qu'il observait des particules en suspension dans l'eau. La particule soumise à un bombardement moléculaire, possède une trajectoire très irrégulière qui correspond au mouvement brownien. En 1923, Wiener a proposé un modèle mathématique permettant de décrire ce mouvement. Le *processus de Wiener* est un processus aléatoire  $\{W(t), t \in \mathbb{R}\}$  qui vérifie :

- $W(0) = 0$  et  $W(t)$  est continue,
- Pour tout  $t \geq 0$  et  $h > 0$  l'accroissement  $W(t+h) - W(t)$  est normal de moyenne 0 et de variance  $h$ .

Nous trouvons par la suite que  $W(t)$  est lui même un processus gaussien, centré et de variance  $t$  pour tout  $t$ . De plus, les accroissements sont indépendants et stationnaires. Nous pouvons étendre cette définition en dimension  $n$ . Notons

$$W(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))$$

sur  $\mathbb{R}^n$  un processus de Wiener en dimension  $n$ . Pour tout  $i$ ,  $W_i(t)$  est un processus de Wiener en dimension 1 et  $W_1(t_1), \dots, W_n(t_n)$  sont indépendants.

REMARQUE 6. Soit  $E = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ . Alors,

$$\begin{aligned} P(W(t+h) - W(t) \in E) &= \prod_{i=1}^n \left\{ (2\pi h)^{-1/2} \int_{a_i}^{b_i} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2h}\right) dx_i \right\} \\ &= (2\pi h)^{-n/2} \int_E \exp\left(-\frac{|x|^2}{2h}\right) dx. \end{aligned}$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Puisque tout ensemble peut être approché par une union de tels parallélépipèdes, la formule précédente est valable pour tout borélien  $E$ . Ainsi, si nous prenons  $E = B_\rho(0)$ , nous obtenons en coordonnées polaires que :

$$P(|W(t+h) - W(t)| \leq \rho) = ch^{-n/2} \int_{r=0}^{\rho} r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right) dr. \quad (1.5.2)$$

Une propriété fondamentale du mouvement brownien est de satisfaire une condition de Hölder. On peut trouver une démonstration de cette propriété dans Falconer [51] p.263.

**Proposition 1.5.2.** *Soit  $0 < \lambda < 1/2$ . Avec probabilité 1, le processus de Wiener  $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$*

$$|W(t+h) - W(t)| \leq b|h|^\lambda \quad (|h| < H_0), \quad (1.5.3)$$

pour  $H_0 > 0$ ,  $b$  ne dépendant que de  $\lambda$ .

*Démonstration.* Pour  $h > 0$ , nous avons, en utilisant (1.5.2) et le changement de variables  $u = rh^{-1/2}$ , que

$$\begin{aligned} P(|W(t+h) - W(t)| > h^\lambda) &= ch^{-n/2} \int_{h^\lambda}^{\infty} r^{n-1} \exp\left(\frac{-r^2}{2h}\right) dr \\ &= c \int_{h^{\lambda-1/2}}^{\infty} u^{n-1} \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right) du \\ &\leq c_1 \int_{h^{\lambda-1/2}}^{\infty} \exp(-u) du \\ &= c_1 \exp(-h^{\lambda-1/2}) \leq c_2 h^{-2}, \end{aligned}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes indépendantes de  $h$  et  $t$ . Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} P\left(|W((m-1)2^{-j}) - W(m2^{-j})| > 2^{-j\lambda} \text{ pour un certain } j \geq k \text{ et } 1 \leq m \leq 2^j\right) \\ \leq c_2 \sum_{j=k}^{\infty} 2^j 2^{-2j} \\ = c_2 2^{-k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, avec probabilité 1, il existe un entier  $K$  tel que

$$|W((m-1)2^{-j}) - W(m2^{-j})| \leq 2^{-j\lambda}$$

pour tout  $j > K$  et  $1 \leq m \leq 2^j$ . Si  $h > 2^{-K}$ , l'intervalle  $[t, t+h]$  peut, sauf peut être pour les points limites, s'exprimer sous la forme d'une union dénombrable d'intervalles binaires contigus de la forme  $[(m-1)2^{-j}, m2^{-j}]$  avec  $2^j \leq h$ . En utilisant la continuité de  $W$ , si  $k$  est le plus petit entier tel que  $2^{-k} \leq h$ ,

$$|W(t+h) - W(t)| \leq 2 \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\lambda} = \frac{2^{-k\lambda} 2}{(1-2^{-\lambda})} \leq \frac{2h^\lambda}{(1-2^{-\lambda})}.$$

□

**Théorème 1.5.3.** *Avec probabilité 1, le graphe d'un mouvement brownien  $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a une dimension de Hausdorff égale à  $3/2$ .*

*Démonstration.* Voir le théorème 16.4 de Falconer [51].

□

**Théorème 1.5.4.** *La trajectoire d'un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) a une dimension de Hausdorff et une box dimension égales à 2, avec probabilité 1.*

*Démonstration.* Pour tout  $\lambda < 1/2$ ,  $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfait la condition de Hölder par la propriété précédente. Ainsi, par la proposition 1.2.3, nous en déduisons que  $\dim W([0, 1]) \leq (1/\lambda) \dim[0, 1] < 1/\lambda$ . Nous avons la même inégalité pour la box dimension. Ainsi, la trajectoire a une dimension au plus de 2. Pour la borne inférieure, nous utilisons la méthode du potentiel théorique présentée précédemment. Soit  $1 < s < 2$ . En utilisant (1.5.2), nous obtenons que

$$\begin{aligned} E\left(|W(t+h) - W(t)|^{-s}\right) &= ch^{-n/2} \int_0^\infty r^{-s+n-1} \exp\left(\frac{-r^2}{2h}\right) dr \\ &= \frac{1}{2} ch^{-s/2} \int_0^\infty w^{(n-s-2)/2} \exp\left(\frac{-w}{2}\right) dw \\ &= c_1 h^{-s/2}, \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

en faisant le changement de variables  $w = r^2/h$ ,  $c_1$  ne dépendant pas de  $h$  ni de  $t$ . Alors,

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^1 \int_0^1 |W(t) - W(u)|^{-s} dt du\right) &= \int_0^1 \int_0^1 E|W(t) - W(u)|^{-s} dt du \\ &= \int_0^1 \int_0^1 c_1 |t - u|^{-s/2} dt du, \\ &< \infty, \end{aligned}$$

car  $s < 2$ . Pour pouvoir utiliser la méthode du potentiel il faut définir une mesure sur la trajectoire du mouvement brownien. Posons donc  $\mu_W(A) = \mathcal{L}\{t : 0 \leq t \leq 1 \text{ et } W(t) \in A\}$  où  $\mathcal{L}$  est la mesure de Lebesgue.  $\mu_W(t)$  est la distribution de masse sur  $W(t)$ . Pour toute fonction  $f$ , nous avons  $\int f(g(x))d\mu_f(x) = \int_0^1 g(f(t))dt$  pour tout fonction  $g$ . Ainsi, on obtient que

$$E\left(\iint |x - y|^{-s} d\mu_W(x) d\mu_W(y)\right) < \infty. \quad (1.5.5)$$

Ainsi, si  $s < 2$  alors  $\iint |x - y|^{-s} d\mu_W(x) d\mu_W(y) < \infty$  presque sûrement, donc  $I^s(\mu_W) < \infty$ . En utilisant le Théorème 1.3.5, nous trouvons donc que  $\dim W([0, 1]) \geq s$ .  $\square$

Nous pouvons avoir un cas plus général que le mouvement brownien standard, en affaiblissant les conditions de définition. Nous obtenons alors soit le *mouvement brownien fractionnaire*, soit les *processus stables* (voir Cioczek-Georges *et al.* [24]). Pour le mouvement brownien fractionnaire, les accroissements suivent toujours une loi normale centrée mais ne sont plus indépendants. Le processus stable au contraire s'affranchit de la condition de variance finie.

**Définition 1.** Un mouvement brownien ou processus de Wiener fractionnaire de paramètre  $H \in (0, 1)$  est un processus gaussien réel  $\{W_H(t) : t \in \mathbb{R}\}$  qui vérifie :

1.  $W_H(0) = 0$ ,
2.  $E[[W_H(t)]^2] = |t|^{2H} \quad , \forall t \in \mathbb{R}$ ,
3.  $W_H$  a des accroissements stationnaires.

Pour  $H = 1/2$ ,  $W_H$  correspond au mouvement brownien standard. Le paramètre  $H$  est appelé *paramètre de Hurst*. Nous pouvons montrer de manière analogue au mouvement brownien standard que  $W_H$  satisfait une condition de Hölder et qu'avec probabilité 1, son graphe a une dimension de Hausdorff et une box dimension de  $2 - H$ . Ainsi, pour

$H = 1/2$ , on retrouve le Théorème 1.5.3.

Les processus stables ont été introduits par Lévy. (Voir Falconer [51] p.248).

**Définition 2.** Un processus stable est un processus aléatoire ayant ses accroissements stationnaires et indépendants. Mais à part dans des cas particuliers (comme par exemple le mouvement brownien), les processus stables ont une variance infinie et sont presque sûrement discontinus.



# Chapitre 2

## Module de continuité

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>49</b>
<b>2.2</b>	<b>Premiers résultats</b>	<b>55</b>
2.2.1	Démonstration de la partie (b) du Théorème 2.2.1	57
2.2.2	Démonstration de la partie (a) du Théorème 2.2.1	61
<b>2.3</b>	<b>Résultats pour des topologies plus fortes</b>	<b>66</b>

---

### 2.1 Introduction

Il existe différentes manières d'exprimer la loi du module de continuité du processus de Wiener sur un intervalle. Une première forme est donnée par Lévy en 1948 [75] et Orey et Taylor en 1974 [90].  $\{W(t) : t \geq 0\}$  étant un processus de Wiener standard, on a

$$\lim_{h \downarrow 0} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|W(t+h) - W(t)|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} \right\} = 1 \quad \text{p.s.} \quad (2.1.1)$$

On peut aussi exprimer le module de continuité de manière uniforme par la formule :

$$\lim_{h \downarrow 0} \left\{ \sup_{0 \leq t, s \leq 1} \sup_{|t-s| \leq h} \frac{\pm \{W(t) - W(s)\}}{\sqrt{2h \log(1/h)}} \right\} = 1 \quad \text{p.s.} \quad (2.1.2)$$

Une version plus élaborée de (2.1.1) et (2.1.2) est énoncée par Mueller [88], Révész [94] et de Acosta [2]. Il s'agit d'une version fonctionnelle. On note  $\mathbb{H}_0^1$  l'ensemble des fonctions absolument continues sur  $[0, 1]$  par rapport à la mesure de Lebesgue, de la forme  $f(s) = \int_0^s \dot{f}(u)du$  pour  $s \in [0, 1]$ , avec  $\|f\|_{\mathbb{H}_0^1}^2 = \int_0^1 \dot{f}(u)^2 du < \infty$ . Ici  $\dot{f}(s) = df(s)/ds$  désigne la dérivée de  $f$  par rapport à la mesure de Lebesgue. Il est à noter que  $\mathbb{H}_0^1$  est l'espace de Hilbert auto-reproduisant [RKHS] associé au processus de Wiener sur  $[0, 1]$  (Voir Adler [3] p.66). On note alors sa boule unité par

$$\mathbb{K}_0^1 = \left\{ f \in \mathbb{H}_0^1 : \|f\|_{\mathbb{H}_0^1}^2 \leq 1 \right\},$$

souvent appelé ensemble de Strassen (voir [100]). On définit les fonctions indexées par  $t$  et  $h$ ,

$$\eta_{t,h}(x) = \frac{W(t+hx) - W(t)}{\sqrt{2h \log(1/h)}}, \quad x \in [0, 1].$$

On note  $C[0, 1]$  l'ensemble des fonctions continues sur  $[0, 1]$  et on définit l'ensemble suivant de fonctions de  $C[0, 1]$

$$\mathcal{F}_h = \{ \eta_{t,h}(\cdot) : 0 \leq t \leq 1-h \}. \quad (2.1.3)$$

Mueller [88] et Révész [94] montrent que l'ensemble limite de  $\mathcal{F}_h$  dans la topologie uniforme (c'est à dire la topologie induite par la norme-sup :  $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ ) quand  $h \rightarrow 0$  est l'ensemble  $\mathbb{K}_0^1$  (voir le chapitre B pour la notion de convergence d'ensembles). On en déduit, par application du lemme d'Arzela-Ascoli, une famille de lois limites exprimées dans le résultat suivant :

$$\lim_{h \downarrow 0} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \Phi(\eta_{t,h}) \right\} = \sup_{f \in \mathbb{K}_0^1} \Phi(f), \quad \text{p.s.}, \quad (2.1.4)$$

où  $\Phi : \mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$  désigne une fonctionnelle continue définie sur  $(C[0, 1], \|\cdot\|)$ . En particulier, pour  $\Phi(f) = f(1)$  et  $\Phi(f) = \|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$  on retrouve les lois (2.1.1) et (2.1.2).

Le comportement des oscillations du processus de Wiener est très voisin du comportement du pont Brownien  $B(t) \stackrel{d}{=} W(t) - tW(1)$ . En effet, le facteur  $tW(1)$  y introduit une contribution négligeable par rapport aux oscillations de  $W(\cdot)$ . De plus, il n'est pas

étonnant que les oscillations du pont brownien soient très voisines de celles du processus empirique uniforme  $\{\alpha_n(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ . On désigne par

$$\alpha_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

un processus empirique uniforme généré par des variables aléatoires, indépendantes  $U_1, \dots, U_n$ , de même loi uniforme sur  $[0, 1]$  et où

$$F_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,t]}(U_i).$$

Les travaux de Csörgö et Révész (voir le livre de Csörgö et Révész [27]) et de Stute [101] (voir Shorack et Wellner [97]) montrent en particulier que, si  $h_n$  est une suite de constantes positives telles que, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$h_n \downarrow 0, \quad nh_n \uparrow \infty, \quad nh_n / \log n \rightarrow \infty, \quad \log(1/h_n) / \log \log n \rightarrow \infty, \quad (2.1.5)$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1-h_n} \frac{\pm \{\alpha_n(t+h_n) - \alpha_n(t)\}}{\sqrt{2 \log(1/h_n)}} \right\} = 1 \quad \text{p.s.} \quad (2.1.6)$$

On a également, sous les mêmes hypothèses,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{\substack{0 \leq s, t \leq 1 \\ |s-t| \leq h_n}} \frac{\pm \{\alpha_n(t) - \alpha_n(s)\}}{\sqrt{2h \log(1/h_n)}} \right\} = 1 \quad \text{p.s.} \quad (2.1.7)$$

Il est à noter que (2.1.6) et (2.1.7) sont les analogues respectifs de (2.1.1) et (2.1.2). Une version analogue du résultat mentionné plus haut, de Mueller [88] et Révész [94] a été donnée par Deheuvels et Mason [38]. Ils définissent pour tout  $0 \leq h \leq 1$  et tout  $n \geq 1$ ,

$$\Delta\alpha_n(h, t; s) = \alpha_n(t+hs) - \alpha_n(t), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ils montrent que l'ensemble de fonctions

$$\left\{ \frac{\Delta\alpha_n(h_n, t; \cdot)}{\sqrt{2h_n \log(1/h_n)}} : 0 \leq t \leq 1/h_n \right\}, \quad (2.1.8)$$

a pour ensemble limite quand  $n \rightarrow \infty$  l'ensemble  $\mathbb{K}_0^1$ .

Enfin, des formulations plus élaborées de ces résultats sur le module de continuité sont développées dans la dernière décennie. Celles-ci utilisent la notion de *processus empiriques locaux indexés par des ensembles ou par des fonctions*. En 1994, Deheuvels et Mason [40] traitent le cas des *processus empiriques locaux indexés par des ensembles*. En 1997, Einmahl et Mason [49] obtiennent des résultats CLT (théorème de la limite centrale) ainsi qu'une loi du logarithme itéré pour des *processus empiriques locaux indexés par une famille de fonctions*. En 2004, Mason [86] établit une version fonctionnelle du module de continuité pour le *processus empirique local indexé par une famille de fonctions*. Ces objets sont définis comme suit.

Soit  $\mathcal{F}$  une famille de fonctions vérifiant certaines conditions que nous expliciterons plus tard (voir chapitre 2.2 F.i et F.ii). Soit  $t \in [0, 1]$ . Soient  $U, U_1, \dots, U_n$  des variables indépendantes de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Le processus empirique local en  $t$  indexé par  $f \in \mathcal{F}$  est alors défini par

$$\alpha_n(h_n, t; f) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left\{ f\left(\frac{t - U_i}{h_n}\right) - \mathbb{E}f\left(\frac{t - U}{h_n}\right) \right\}. \quad (2.1.9)$$

Cette définition découle directement de l'écriture suivante.

$$\begin{aligned} \alpha_n(t + h_n) - \alpha_n(t) &= \sqrt{n}(F_n(t + h_n) - (t + h_n)) - \sqrt{n}(F_n(t) - t) \\ &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left\{ [\mathbb{1}_{[0, t+h_n]}(U_i) - (t + h_n)] - [\mathbb{1}_{[0, t]}(U_i) - t] \right\} \\ &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbb{1}_{[t, t+h_n]}(U_i) - \mathbb{P}(U_i \in [t, t + h_n]) \right\} \\ &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbb{1}_{[0, 1]}\left(\frac{t - U_i}{h_n}\right) - \mathbb{E}\mathbb{1}_{[0, 1]}\left(\frac{t - U}{h_n}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

En remplaçant dans (2.1.9),  $f$  par une fonction indicatrice, on obtient l'égalité (2.1.10). Mason [86] démontre que sous les conditions Fi-v (définies par la suite 55) et sous les hypothèses (2.1.5), pour  $J$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^d$ , avec probabilité 1, la suite

$$\left\{ (2h_n \log(1/h_n))^{-1/2} \alpha_n(h_n, t; \cdot) : t \in J \right\},$$

est presque sûrement relativement compact. Il détermine son ensemble limite, prolongeant les travaux antérieurs de Deheuvels et Mason [38]. Ce résultat prolonge également

les travaux de Giné et Guillou [56], pour lesquels la classe  $\mathcal{F}$  est la classe des noyaux continus à supports bornés.

Dans ce chapitre notre but est d'utiliser les techniques utilisées par Mason [86] pour établir une formulation générale de convergence du module de continuité pour le processus de Wiener indexé par une famille de fonctions. Nous verrons qu'il est possible de déduire de ce théorème plus général les résultats (2.1.1) et (2.1.2) énoncés plus haut. Jusqu'à présent nous avons étudié des processus univariés mais, pour se placer dans un cadre plus général, nous allons travailler maintenant avec des paramètres multivariés. Nous étudierons donc le processus de Wiener à paramètre dans  $\mathbb{R}^d$ . Avant de présenter les résultats connus dans le cadre du processus de Wiener multidimensionnel, nous allons rappeler quelques définitions. Posons  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d$  pour un paramètre de  $\mathbb{R}_+^d$ . Posons  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$ ,  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)$  et notons  $\mathbf{s} \leq \mathbf{t}$  lorsque  $s_j \leq t_j, j = 1, \dots, d$ . Notons de même  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}_+^d$ .

Le processus de Wiener standard dans  $\mathbb{R}^d$ , noté  $\{W_d(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \geq \mathbf{0}\}$  est un processus centré réel à trajectoires continues, de covariance

$$\text{cov}\left(W_d(\mathbf{s}), W_d(\mathbf{t})\right) = \prod_{j=1}^d s_j \wedge t_j.$$

Le processus  $\{W_d(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$  est aussi appelé processus de Wiener multivarié à  $d$  paramètres. Pour la suite nos résultats seront exprimés sur  $\{W_d(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in [0, 1]^d\}$ , restriction de  $W_d(\cdot)$  à  $[0, 1]^d$ . Ce processus a été systématiquement étudié, depuis les travaux de Kitagawa (1951) [67]. En 1956, Chentsov [21] établit la continuité presque sûre des trajectoires de  $W_d(\cdot)$ . La loi du logarithme itéré pour  $W_d(\cdot)$  est donnée en 1972 par Zimmerman [108] (mais seulement pour le cas bidimensionnel ou  $d = 2$ ). En 1973, Orey et Pruitt [89] montrent une version analogue du résultat (2.1.1) pour le processus multidimensionnel. Plus précisément, pour  $\mathbf{s} \leq \mathbf{t}$ , on note  $R = \prod_{i=1}^d [s_i, t_i]$  et la mesure de  $W_d$  ( $d \geq 1$  quelconque) sur  $R$  est définie par

$$W_d(R) = \int_R dW_d(\mathbf{u}). \tag{2.1.11}$$

(Voir l'annexe A pour la définition d'intégrale de Wiener). On note également  $\lambda(R) = \prod_{i=1}^d (t_i - s_i)$  et

$$T(h) = \left\{ R = \prod_{i=1}^d [s_i, t_i] : 0 \leq \mathbf{s} < \mathbf{t} \leq 1 \text{ et } \lambda(R) \leq h^d \right\}. \tag{2.1.12}$$

Ils obtiennent alors avec probabilité 1,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{R \in T(h)} \frac{|W_d(R)|}{\sqrt{2h^d \log(1/h^d)}} = 1. \quad (2.1.13)$$

D'autres résultats concernant les accroissements du processus de Wiener à plusieurs paramètres sont obtenus en 1978 par Csörgő et Révész [26]. Ils définissent l'ensemble

$$L_T = L(a_T, b_T) = \left\{ R = \prod_{i=1}^d [s_i, t_i] \subset D_T(b_T) : \lambda(R) \leq a_T \right\}, \quad (2.1.14)$$

où  $D_T(b_T) = \{(u_1, \dots, u_d) : \prod_{i=1}^d u_i \leq T, 0 \leq u_i \leq b_T\}$  et  $\{a_T : T \geq 0\}$  et  $\{b_T : T \geq 0\}$  sont deux suites monotones non décroissantes. Ils montrent le théorème suivant.

**Théorème 2.1.1.** *Soient  $0 < a_T \leq T^{1/d}$  et  $b_T \geq T^{1/d}$  deux fonctions non-décroissantes de  $T$ . Soit*

$$\delta_T = (2a_T(\log Ta_T^{-1} + \log(\log b_T a_T^{-1/d} + 1))^{d-1} + \log \log T)^{-1/2}.$$

On suppose que

- (i)  $\delta_T$  est une fonction non-décroissante de  $T$ ,
- (ii)  $Ta_T^{-1}$  est une fonction non-décroissante de  $T$ ,
- (iii) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\theta_0 = \theta_0(\varepsilon) > 1$  tel que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta_{\theta k}}{\delta_{\theta} k + 1} \leq 1 + \varepsilon \text{ si } 1 \leq \theta \leq \theta_0.$$

Alors,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{R \in L_T} \delta_T |W_d(R)| = 1 \quad \text{p.s.}$$

REMARQUE 7. Si on prend  $A_T = T$  et  $b_T = a_T^{1/d}$ , on retrouve la loi du logarithme itéré de Chung [22].

D'autres travaux sont effectués sur les accroissements du processus de Wiener multidimensionnel, mais seulement en dimension  $d = 2$ . C'est le cas notamment des résultats sur les accroissements décalés ou "lag increments" du processus de Wiener bidimensionnel. Pour cela, on peut se référer aux travaux de Hanson et Russo [59; 60] et de Lu [78; 79]. Dans la suite de l'exposé,  $W_d(\mathbf{u})$  sera noté  $W(\mathbf{u})$  pour ne pas trop alourdir les notations.

## 2.2 Premiers résultats

Dans la continuité des résultats exposés, nous allons donner une formulation du module de continuité pour le processus de Wiener indexé par une famille de fonctions. C'est un résultat montré par Mason [85] dont nous donnons la démonstration complète ici, car elle nous sera utile dans la chapitre suivant. Dans la suite,  $\mathcal{F}$ , inclus dans un espace séparable, désigne une famille de fonctions mesurables de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$ , ayant pour support  $I^d = [0, 1]^d$  et étant bornées par  $\kappa > 0$ . On note  $|\cdot|_2$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ . La famille  $\mathcal{F}$ , vérifie les conditions suivantes :

$$\text{F.i : } \lim_{|\mathbf{w}|_2 \rightarrow 0} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^d} (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} + \mathbf{w}))^2 d\mathbf{x} = 0,$$

$$\text{F.ii : } \lim_{\lambda \rightarrow 1} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^d} (f(\mathbf{x}) - f(\lambda \mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} = 0,$$

$$\text{F.iii : } \text{pour tout } \lambda \geq 1, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \text{ et } f \in \mathcal{F}, f(\mathbf{z} - \lambda \cdot) \in \mathcal{F},$$

$$\text{F.iv : } \mathcal{F} \text{ est une famille de fonctions de Vapnik-Červonenkis,}$$

$$\text{F.v : } \mathcal{F} \text{ est une famille ponctuellement mesurable. C'est à dire qu'il existe une sous-famille } \mathcal{F}_0 \text{ de } \mathcal{F} \text{ telle que l'on puisse trouver pour tout } f \in \mathcal{F}, \text{ une suite de fonction } \{f_n\} \text{ dans } \mathcal{F}_0 \text{ pour laquelle } f_n(\mathbf{z}) \rightarrow f(\mathbf{z}); \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d.$$

F.v permet de ne pas avoir à utiliser les mesures de probabilité extérieures. Soit  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ . Pour la définition d'une *famille de fonctions de Vapnik-Červonenkis*, nous invitons le lecteur à se reporter à l'annexe C.

On définit le processus de Wiener local indexé par  $f \in \mathcal{F}$  en  $\mathbf{z}$  par :

$$W(h, \mathbf{z}; f) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{u}}{h^{1/d}}\right) dW(\mathbf{u}). \quad (2.2.1)$$

Pour la définition de l'intégrale de Wiener, se reporter au chapitre A. Voyons d'où vient une telle définition. Pour  $d = 1$ , étudions les oscillations  $W(t + hs) - W(t)$  pour  $0 \leq s \leq 1$ . D'après la définition (6) de l'intégrale de Wiener, on a

$$\begin{aligned} W(t + hs) - W(t) &= \int_t^{t+hs} dW(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[t, t+hs]}(u) dW(u) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0, s]}\left(\frac{u-t}{h}\right) dW(u). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

En remplaçant dans (2.2.1) la fonction  $f$  par une fonction indicatrice, on retrouve (2.2.2). On peut vérifier que  $W(h, \mathbf{z}; f)$  est un processus gaussien, centré. Posons

$$\Theta_{h, \mathbf{z}}(f) = \frac{W(h, \mathbf{z}; f)}{\sqrt{2h \log 1/h}} = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} f(h^{1/d}(\mathbf{z} - \mathbf{u})) dW(\mathbf{u})}{\sqrt{2h \log 1/h}}. \quad (2.2.3)$$

Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions de  $\mathcal{F}$ . Nous allons étudier  $\Theta_{h, \mathbf{z}}(f)$  pour  $\mathbf{z} \in [0, 1]^d$ . Définissons le produit scalaire sur  $\mathcal{F}$  par

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{L_2} := \int_{[0, 1]^d} f_1(\mathbf{u}) f_2(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \quad (2.2.4)$$

Soit  $G_2([0, 1]^d)$  le sous-espace de Hilbert de  $L_2([0, 1]^d)$  induit par  $\mathcal{F}$ . Soit  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert à noyau auto-reproduisant (RKHS) généré par le produit scalaire défini ci-dessus. Grâce au théorème 4D de Parzen [91] p.966, l'espace  $\mathcal{H}$  peut être représenté de la façon suivante. (Pour de plus amples précisions, on se reportera à l'annexe E). Soit  $l_\infty(\mathcal{F})$  la famille des fonctions bornées sur  $\mathcal{F}$ . Pour tout  $\xi \in G_2([0, 1]^d)$  on note  $\varphi_\xi(f) := \langle f, \xi \rangle_{L_2}$ ,  $f \in \mathcal{F}$ , avec  $\varphi_\xi \in l_\infty(\mathcal{F})$ . Chaque  $\varphi_\xi$  est défini de manière unique par  $\xi$ . Alors,  $\mathcal{H} = \{\varphi_\xi : \xi \in G_2([0, 1]^d)\}$  avec le produit scalaire  $\langle \varphi_{\xi_1}, \varphi_{\xi_2} \rangle := \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{L_2}$ . Nous pouvons donc définir une norme sur  $\mathcal{H}$  de la manière suivante.

$$\|\varphi_\xi\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle \xi, \xi \rangle_{L_2}. \quad (2.2.5)$$

Soit  $\mathcal{H}_1$  la boule unité dans  $\mathcal{H}$ . On a donc

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ \Theta_\varphi(f), f \in \mathcal{F}, \varphi \in G_2([0, 1]^d), \text{ où } \Theta_\varphi(f) = \int_{[0, 1]^d} f(\mathbf{u}) \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \right. \\ \left. \text{avec } \int_{[0, 1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \leq 1 \right\}. \quad (2.2.6)$$

Soit  $\vartheta \in \mathcal{H}_1$  et  $\varepsilon > 0$ . Posons

$$B_\varepsilon(\vartheta) = \{\psi \in l_\infty(\mathcal{F}) : \|\psi - \vartheta\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon\}, \quad (2.2.7)$$

en notant pour toute famille de fonctions  $\mathcal{C}$

$$\|\psi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{f \in \mathcal{C}} |\psi(f)|. \quad (2.2.8)$$

Enfin, notons

$$\mathcal{H}_1^\varepsilon = \left\{ \psi \in l_\infty(\mathcal{F}) : \inf_{\vartheta \in \mathcal{H}_1} \|\psi - \vartheta\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon \right\}. \quad (2.2.9)$$

Voici la loi fonctionnelle du logarithme pour le processus de Wiener local indexé par des fonctions, défini précédemment, démontrée par Mason [85] :

**Théorème 2.2.1.** *Soit  $J$  un compact de  $\mathbb{R}^d$  d'intérieur non vide. On suppose (F.i-ii). On pose*

$$\nu_k = \lfloor (1 + \gamma)^k \rfloor, \quad (2.2.10)$$

alors avec  $h_k = \nu_k^{-1}$  avec probabilité 1

- (a) pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta$  tel que, pour  $h \leq \delta$ ,  $\{\Theta_{h,z}(\cdot) : z \in J\} \subset \mathcal{H}_1^\varepsilon$ ,
- (b) pour tout  $\vartheta \in \mathcal{H}_1$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k(\vartheta, \varepsilon)$  tel que pour tout  $k \geq k(\vartheta, \varepsilon)$ , il existe  $z_k \in J$  tel que  $\Theta_{h_k, z_k}(\cdot) \in B_\varepsilon(\vartheta)$ .

REMARQUE 8. Ce résultat est bien une généralisation du théorème de Mueller. En effet, prenons pour famille de fonctions

$$\mathcal{F} = \{\mathbb{1}_{[0,t]} : t \in [0, 1]\}.$$

Cette famille vérifie bien les conditions F.i-ii. On note alors

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ \phi(\mathbb{1}_{[0,t]}) = \int_0^t \xi(x) dx : \int_0^1 \xi^2(x) dx \leq 1 \right\}.$$

En appliquant le Théorème 2.2.1 avec la famille des fonctions indicatrices, on retrouve pour (2.1.3) le résultat de Mueller [88].

### 2.2.1 Démonstration de la partie (b) du Théorème 2.2.1

Un résultat très important pour la démonstration du théorème est le résultat de *grandes déviations*. On définit la fonction de taux  $I(\cdot)$  sur  $l_\infty(\mathcal{F})$  de la manière suivante. Pour tout  $\psi \in l_\infty(\mathcal{F})$

$$I(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{[0,1]^d} \xi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} & \text{si } \psi = \phi_\xi \text{ pour } \xi \in G_2([0, 1]^d), \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.2.11)$$

De plus, pour tout  $B \subset l_\infty(\mathcal{F})$

$$I(B) = \inf\{I(\psi) : \psi \in B\}. \quad (2.2.12)$$

PROPOSITION 1. *Sous les conditions du Théorème 2.2.1, pour toute suite  $\{m_n\}_{n \geq 1}$  et tout points  $z_{i,n}, i = 1 \dots, m_n$ , on a*

(i) pour tout fermé  $F$  de  $l_\infty(\mathcal{F})$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq m_n} \varepsilon_n \log P\{\Theta_{h_n, \mathbf{z}_{i,n}}(\cdot) \in F\} \leq -I(F), \quad (2.2.13)$$

(ii) pour tout ouvert  $G$  de  $l_\infty(\mathcal{F})$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq i \leq m_n} \varepsilon_n \log P\{\Theta_{h_n, \mathbf{z}_{i,n}}(\cdot) \in G\} \geq -I(G), \quad (2.2.14)$$

avec  $\varepsilon_n = (2 \log(1/h_n))^{-1}$ .

*Démonstration.* Nous allons utiliser les résultats de Arcones (2003-2004) [5] et [6]. Plus précisément voilà une généralisation de son théorème 5.2 p.28.  $T$  est un ensemble d'indexation. On note LDP, pour *large deviation principle*, le principe des grandes déviations. Dans ce qui suit,  $\overset{\circ}{A}$  signifie l'intérieur de  $A$  et  $\bar{A}$  signifie la fermeture de  $A$ . Le résultat suivant est énoncé dans le cadre suivant.  $(S, \mathcal{S})$  est un ensemble mesurable,  $\mu$  est une mesure positive sur  $S$  et  $\{f(x, t), t \in T\}$  une classe de fonctions mesurables. La fonction de taux générale est définie par

$$I(z) = \inf \left\{ \int 2^{-1} \gamma^2(x) d\mu(x) : \int f(x, t) \gamma(x) d\mu(x) = z(t), \text{ pour tout } t \in T \right\},$$

où  $z \in l_\infty(T)$ .

RÉSULTAT 1. Soient  $\{U_n(t) : t \in T\}$  une suite de processus aléatoires gaussiens et  $\{\varepsilon_n\}$  une suite d'entiers positifs tels que  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (a.1) Pour tout  $s, t \in T$ ,  $\varepsilon_n^{-1} E[U_n(s)U_n(t)]$  converge quand  $n \rightarrow \infty$ ,  
(a.2)  $(T, d)$  est précompact, pour

$$d^2(s, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{-1} E[(U_n(s) - U_n(t))^2],$$

- (a.3)  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{d(s,t) \leq \eta} \varepsilon_n^{-1} E[(U_n(s) - U_n(t))^2] = 0$ .

Alors,  $\{U_n(t) : t \in T\}$  satisfait un LDP dans  $l_\infty(T)$  avec une vitesse  $\varepsilon_n^{-1}$ . Cela signifie que

$$\begin{aligned} - \inf_{z \in \overset{\circ}{A}} I(z) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \log P\{U_n \in A\} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \log P\{U_n \in A\} \leq - \inf_{z \in \bar{A}} I(z). \end{aligned}$$

REMARQUE 9. On voit que le LDP dans  $l_\infty(T)$  est équivalent au LDP pour des distributions de dimensions finies avec en plus une condition respectivement à une certaine pseudo-métrique qui rend  $T$  totalement borné.

Vérifions les conditions du RÉSULTAT 1 pour  $T = \mathcal{F}$  et  $\{U_n(t) : t \in T\} = \{\Theta_{h_n, \mathbf{z}}(f) : f \in \mathcal{F}\}$  et  $\epsilon_n = \varepsilon_n = (2 \log(1/h_n))^{-1}$ .

Pour tout  $f, g \in \mathcal{F}$ ,

$$\begin{aligned} & \varepsilon_n^{-1} E \{ \Theta_{h_n, \mathbf{z}}(f) \Theta_{h_n, \mathbf{z}}(g) \} \\ &= \varepsilon_n^{-1} E \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^d} f((\mathbf{z} - \mathbf{u})h_n^{-1/d}) dW(\mathbf{u}) \int_{\mathbb{R}^d} g((\mathbf{z} - \mathbf{u})h_n^{-1/d}) dW(\mathbf{u})}{2h_n \log 1/h_n} \right\} \\ &= 1/h_n \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{u}}{h_n^{1/d}}\right) g\left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{u}}{h_n^{1/d}}\right) d\mathbf{u} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{u})g(\mathbf{u})d\mathbf{u}. \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$  étant une classe de fonctions bornées de support  $[0, 1]^d$ , (a.1) est vérifiée. La condition F.iv implique que le nombre de recouvrement pour la norme  $d$  est borné (voir (C.0.1), p. 172) donc  $(\mathcal{F}, d)$  est précompact et donc (a.2) est vérifiée. Pour pouvoir appliquer le RÉSULTAT 1, il reste à montrer que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{d(f, g) \leq \eta} \varepsilon_n^{-1} E[(\Theta_{h_n, \mathbf{z}}(f) - \Theta_{h_n, \mathbf{z}}(g))^2] = 0. \quad (2.2.15)$$

Or,

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{-1} E[(\Theta_{h_n, \mathbf{z}}(f) - \Theta_{h_n, \mathbf{z}}(g))^2] &= \varepsilon_n^{-1} E[(\Theta_{h_n, \mathbf{z}}(f - g))^2] \\ &= \varepsilon_n^{-1} E \left[ \left( \frac{\int_{\mathbb{R}^d} (f - g)((\mathbf{z} - \mathbf{u})h_n^{-1/d}) dW(\mathbf{u})}{2h_n \log(1/h_n)} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{h_n} \int_{\mathbb{R}^d} (f - g)^2 \left( \frac{\mathbf{z} - \mathbf{u}}{h_n^{1/d}} \right) d\mathbf{u} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (f - g)^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \end{aligned}$$

On retrouve donc bien (2.2.15). On peut donc appliquer le RÉSULTAT 1. La proposition 1 est alors obtenue à partir de ce résultat. La fonction de taux de la proposition 1 se déduit de la fonction de taux générale en utilisant les espaces de Hilbert à noyau auto-reproduisant et le théorème 4D de Parzen [91] p.966, voir p. 56 et l'annexe E.  $\square$

Finissons alors la démonstration de la partie (b) du Théorème 2.2.1. On pose

$$\mathbf{z}_{i,n} = \mathbf{z}_{i_1, \dots, i_d, n} = (i_1 h_n^{1/d}, \dots, i_d h_n^{1/d}),$$

avec  $0 \leq i_r \leq m_n := \lfloor h_n^{-1/d} \rfloor$  pour  $1 \leq r \leq d$ . En se rappelant de (2.2.7), (2.2.11) et (2.2.12), pour tout  $\vartheta \in \mathcal{H}_1$ , pour  $\varepsilon$  suffisamment petit,  $I(B_\varepsilon(\vartheta)) < 1$ . Cela est dû au fait que la fonction  $I$  est semi-continue inférieurement (pour montrer la semicontinuité inférieure, on se réfère à Arcones [5]). De plus  $B_\varepsilon(\vartheta)$  est un ouvert. Notons  $P_n = P(\Theta_{h_n, \mathbf{z}_{i,n}}(\cdot) \notin B_\varepsilon(\vartheta))$  pour  $1 \leq i_1, \dots, i_d \leq m_n$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{i_1=0}^{m_n} \dots \prod_{i_d=0}^{m_n} P(\Theta_{h_n, \mathbf{z}_{i,n}} \notin B_\varepsilon(\vartheta)) \\ &= P(\Theta_{h_n, \mathbf{z}_{i,n}} \notin B_\varepsilon(\vartheta))^{(m_n+1)^d} \\ &= \left(1 - P(\Theta_{h_n, \mathbf{z}_{i,n}} \in B_\varepsilon(\vartheta))\right)^{(m_n+1)^d}. \end{aligned}$$

En appliquant la Propriété 1, on trouve que pour  $0 < \rho < 1$  et  $n$  suffisamment grand

$$\begin{aligned} P_n &\leq \left(1 - \exp\{-2 \log(1/h_n) I(B_\varepsilon(\vartheta))\}\right)^{(m_n+1)^d} \\ &\leq \left(1 - \exp\{-2\rho \log(1/h_n)\}\right)^{(m_n+1)^d} \leq (1 - h_n^\rho)^{(m_n+1)^d} \\ &\leq \exp\{(m_n + 1)^d \log(1 - h_n^\rho)\}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \exp\{(m_n + 1)^d \log(1 - h_n^\rho)\} &= (1 + o(1)) \exp\{-(m_n + 1)^d h_n^\rho\} \\ &= (1 + o(1)) \exp\{-h_n^{-1+\rho}\}. \end{aligned}$$

Rappelons que  $h_n = \lfloor (1 + \gamma)^n \rfloor$ . On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n < \infty.$$

Ainsi, en appliquant le lemme de Borel-Cantelli, on trouve qu'avec probabilité 1, pour tout  $\vartheta \in \mathcal{H}_1$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n(\vartheta, \varepsilon)$  tel que pour tout  $n \geq n(\vartheta, \varepsilon)$ , il existe  $\mathbf{z}_n \in J$  tel que  $\Theta_{h_n, \mathbf{z}_n}(\cdot) \in B_\varepsilon(\vartheta)$ .

### 2.2.2 Démonstration de la partie (a) du Théorème 2.2.1

On pose  $b(h) = \sqrt{2h \log(1/h)}$ ,  $k > 1$  un entier,

$$C_k(\varepsilon, \gamma) = \left\{ \frac{W(h, \mathbf{t}; \cdot)}{b(h)} \notin \mathcal{H}_1^\varepsilon \text{ pour un certain } \mathbf{t} \in J \text{ et } \frac{1}{\nu_k} \leq h < \frac{1}{\nu_{k-1}} \right\}, \quad (2.2.16)$$

et

$$D_k(\varepsilon, \gamma) = \left\{ \frac{W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{t}; \cdot)}{b(1/\nu_{k-1})} \notin \mathcal{H}_1^\varepsilon \text{ pour un certain } \mathbf{t} \in J \right\}. \quad (2.2.17)$$

Nous allons utiliser la forme généralisée du lemme d'Ottaviani démontrée dans Mason [86]. Pour cela, il faut montrer que

$$\sup_{\frac{1}{\nu_k} \leq h < \frac{1}{\nu_{k-1}}} \left[ \sup_{\mathbf{z} \in J} P \left( \left\| \frac{W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{t}; \cdot)}{b(1/\nu_{k-1})} - \frac{W(h, \mathbf{t}; \cdot)}{b(h)} \right\|_{\mathcal{F}} > \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] < 1/2. \quad (2.2.18)$$

Pour cela, nous utilisons un résultat de Mason [86] qui nous permet de contrôler les oscillations. Pour  $f \in \mathcal{H}$ , considérons le processus

$$Y(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{u}) dW(\mathbf{u}).$$

Pour  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ , nous notons  $\rho$  la pseudo-métrique usuelle

$$\rho(f_1, f_2) = \sqrt{E(Y(f_1) - Y(f_2))^2} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} (f_1 - f_2)^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u}}.$$

**Lemme 2.2.2.** *Il existe une fonction  $\psi(\delta)$ , de  $\delta > 0$ , où  $\psi(\delta) \rightarrow 0$  quand  $\delta \downarrow 0$  telle que*

$$\limsup_{h \downarrow 0} \sup_{\rho(f_1, f_2) \leq \sqrt{\delta h}} \frac{|Y(f_1) - Y(f_2)|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} = \psi(\delta) \quad p.s. \quad (2.2.19)$$

*Démonstration.* L'idée générale de cette preuve est donnée dans Mason [85]. Il utilise un inégalité de concentration pour réduire le problème au contrôle de l'espérance et applique ensuite le RÉSULTAT 10 p.179. Exposons ici les détails de cette démonstration. Posons

$$X(f_1, f_2) = Y(f_1) - Y(f_2),$$

où  $(f_1, f_2)$  satisfont  $\rho(f_1, f_2) \leq \sqrt{\delta h}$ . On applique le Résultat 9 p.179 à  $X(f_1, f_2)$ . Remarquons que

$$\sigma^2(X) = \sup \left\{ E(Y(f_1) - Y(f_2))^2 : \rho(f_1, f_2) \leq \sqrt{\delta h} \right\} \leq \delta h.$$

Alors, par (E.0.1), pour tout  $\delta, \eta > 0$  et  $h \in (0, 1)$ ,

$$P\left(\sup_{\rho(f_1, f_2) \leq \sqrt{\delta h}} |X(f_1, f_2) - EX(f_1, f_2)| > \eta \sqrt{2h \log(1/h)}\right) \leq 2 \exp\left\{-\frac{\eta^2 \log(1/h)}{\delta}\right\}.$$

En utilisant un argument de « blocage » (partition de sommes indexées par blocs) et le lemme de Borel-Cantelli, on obtient

$$\sup_{\rho(f_1, f_2) < \sqrt{\delta h}} |Y(f_1) - Y(f_2)| - E|Y(f_1) - Y(f_2)| = o(\sqrt{2h \log(1/h)}).$$

On applique maintenant le Résultat 10 (voir p. 179). Nous utilisons alors F.iv pour borner le nombre de recouvrement, ce qui nous permet d'obtenir que

$$\lim_{\delta \searrow 0} \limsup_{h \downarrow 0} \sup_{\rho(f_1, f_2) < \sqrt{\delta h}} \frac{Y(f_1) - Y(f_2)}{\sqrt{2h \log(1/h)}} = 0.$$

□

Rappelons ici que  $|\cdot|_2$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ . D'après F.i-ii, il existe une fonction  $A(\delta)$ ,  $\delta > 0$  telle que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = 0 \tag{2.2.20}$$

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{|\mathbf{w}|_2 \leq \delta} \int_{\mathbb{R}^d} (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} + \mathbf{w}))^2 d\mathbf{x} \leq A(\delta). \tag{2.2.21}$$

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{1-\delta \leq \lambda \leq 1+\delta} \int_{\mathbb{R}^d} (f(\mathbf{x}) - f(\lambda \mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \leq A(\delta). \tag{2.2.22}$$

Nous aurons souvent recours au lemme suivant pour utiliser le lemme 2.2.2.

**Lemme 2.2.3.** *Pour tout  $0 < \delta < 1$ ,  $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \mathbb{R}^d$  et  $h, h' > 0$*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{|\mathbf{t} - \mathbf{t}'|_2 \leq \delta h^{1/d}} E(W(h, \mathbf{t}; f) - W(h, \mathbf{t}'; f))^2 \leq A(\delta)h. \tag{2.2.23}$$

et

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{(1-\delta)^d \leq h/h' \leq (1+\delta)^d} E(W(h, \mathbf{t}; f) - W(h', \mathbf{t}; f))^2 \leq A(\delta)h. \tag{2.2.24}$$

*Démonstration.* Commençons par montrer (2.2.23).

$$\begin{aligned} E\left(W(h, \mathbf{t}; f) - W(h, \mathbf{t}'; f)\right)^2 &= E\left(\int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{\mathbf{t} - \mathbf{u}}{h^{1/d}}\right) - f\left(\frac{\mathbf{t}' - \mathbf{u}}{h^{1/d}}\right) dW(\mathbf{u})\right)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[f\left(\frac{\mathbf{t} - \mathbf{u}}{h^{1/d}}\right) - f\left(\frac{\mathbf{t}' - \mathbf{u}}{h^{1/d}}\right)\right]^2 d\mathbf{u} \\ &= h \int_{\mathbb{R}^d} \left[f(\mathbf{x}) - f\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{t}' - \mathbf{t}}{h^{1/d}}\right)\right]^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Puisque  $|h^{-1/d}(\mathbf{t}' - \mathbf{t})|_2 \leq \delta$ , nous obtenons (2.2.23) grâce à (2.2.21). La démonstration de (2.2.24) est similaire en remarquant que

$$\begin{aligned} E\left(W(h, \mathbf{t}; f) - W(h', \mathbf{t}; f)\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[f\left(\frac{\mathbf{t} - \mathbf{u}}{h^{1/d}}\right) - f\left(\frac{\mathbf{t} - \mathbf{u}}{h'^{1/d}}\right)\right]^2 d\mathbf{u} \\ &= h \int_{\mathbb{R}^d} \left(f(\mathbf{x}) - f((h/h')^{1/d}\mathbf{x})\right)^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nous utilisons donc (2.2.22) pour obtenir (2.2.24). □

Revenons à présent à la démonstration de (2.2.18). Pour  $1/\nu_k < h \leq 1/\nu_{k-1}$ ,

$$\frac{\nu_{k-1}}{\nu_k} < \frac{h}{1/\nu_{k-1}} \leq 1,$$

avec  $\nu_{k-1}/\nu_k = (1 + o(1))1/(1 + \gamma)$ . Donc pour tout  $\delta > 0$ , en prenant  $\gamma$  suffisamment petit, on obtient

$$(1 - \delta)^d \leq h \times \nu_{k-1} \leq (1 + \delta)^d.$$

Nous obtenons alors grâce au lemme 2.2.3 que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{(1-\delta)^d < h\nu_{k-1} < (1+\delta)^d} E\left(W(h, \mathbf{t}; f) - W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{t}; f)\right)^2 \leq A(\delta)/\nu_{k-1}.$$

Or, pour  $k$  suffisamment grand,  $b(1/\nu_k) < b(h) \leq b(1/\nu_{k-1})$  et donc

$$P\left(\frac{W(h, \mathbf{t}; f)}{b(h)} - \frac{W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{t}; f)}{b(1/\nu_{k-1})} \geq \varepsilon/2\right) \leq P\left(\frac{W(h, \mathbf{t}; f) - W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{t}; f)}{b(1/\nu_{k-1})} \geq \varepsilon/2\right).$$

Nous appliquons le lemme 2.2.2 qui nous dit que pour  $\gamma$  suffisamment petit,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{\rho(f_1, f_2) \leq \sqrt{A(\delta)/\nu_{k-1}}} \frac{|Y(f_1) - Y(f_2)|}{b(1/\nu_{k-1})} = \psi(A(\delta)) \quad \text{p.s.}$$

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour  $k$  suffisamment grand et  $\gamma$  suffisamment petit,

$$\sup_{\frac{1}{\nu_k} \leq h < \frac{1}{\nu_{k-1}}} \left[ \sup_{\mathbf{t} \in J} P \left( \left\| \frac{W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{t}; \cdot)}{b(1/\nu_{k-1})} - \frac{W(h, \mathbf{t}; \cdot)}{b(h)} \right\|_{\mathcal{F}} > \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] < 1/2.$$

En utilisant la version généralisée du lemme d'Ottaviani exposée dans Mason [86], nous pouvons donc en conclure que

$$P(C_k(\varepsilon, \gamma)) \leq 2P(D_k(\varepsilon/2, \gamma)). \quad (2.2.25)$$

Nous allons à présent montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(D_k(\varepsilon, \gamma)) < \infty. \quad (2.2.26)$$

Pour cela nous introduisons une grille de points

$$t_{\mathbf{i},k} = t_{i_1, \dots, i_d, k} = (i_1(1/\nu_{k-1})^{1/d}, \dots, i_d(1/\nu_{k-1})^{1/d}),$$

avec  $0 \leq i_r \leq (\nu_{k-1})^{1/d} = M_k$ . Nous trouvons donc que

$$\begin{aligned} P(D_k(\varepsilon, \gamma)) &\leq (M_k + 1)^d P\left(\frac{W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{0}; \cdot)}{b(1/\nu_{k-1})} \notin \mathcal{H}_\lambda^{\varepsilon/2}\right) \\ &\quad + P\left(\|W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{t}; \cdot) - W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{t}_{\mathbf{i},k}; \cdot)\| > \frac{\varepsilon}{2} b(1/\nu_{k-1})\right) \\ &\leq P_{1,k} + P_{2,k}. \end{aligned}$$

Étudions dans un premier temps le comportement de  $P_{1,k}$ . Nous appliquons la Proposition 1, où  $F = \mathcal{H} - \mathcal{H}_\lambda^{\varepsilon/2}$ . Ainsi, pour tout  $\rho > 0$ ,  $2I(F) > 1 + \rho$  et

$$\begin{aligned} P_{1,k} &\leq (M_k + 1)^d \exp\{-2 \log(\nu_{k-1}) I(F)\} \\ &\leq (M_k + 1)^d \exp\{-(1 + \rho) \log(\nu_{k-1})\} \leq \nu_{k-1}^{-\rho}, \end{aligned}$$

et puisque  $\nu_k = \lfloor (1 + \gamma)^k \rfloor$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{1,k} < \infty.$$

Nous allons maintenant étudier le terme  $P_{2,k}$ . On utilise une inégalité de Borell (voir Van der Vaart et Wellner [106]) p.438.

RÉSULTAT 2. Soit  $X$  un processus Gaussien séparable, centré et de variance finie. Alors, pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$P(\|X\| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2E\|X\|^2}\right). \quad (2.2.27)$$

Nous allons appliquer ce résultat pour  $X = W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{t}; \cdot) - W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{t}_{i,k}; \cdot)$  et  $\lambda = (\varepsilon/2)b(1/\nu_{k-1})$ . Or,

$$\begin{aligned} E(W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{t}; f) - W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{t}_{i,k}; f))^2 &= E\left(\int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{\mathbf{t} - \mathbf{u}}{\nu_{k-1}^{-1/d}}\right) - f\left(\frac{\mathbf{t}_{i,k} - \mathbf{u}}{\nu_{k-1}^{-1/d}}\right) dW(\mathbf{u})\right)^2 \\ &= \frac{1}{\nu_{k-1}} \int_{\mathbb{R}^d} \left[f(\mathbf{x}) - f\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{t} - \mathbf{t}_{i,k}}{1/\nu_{k-1}^{1/d}}\right)\right]^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

De plus,  $|\mathbf{t} - \mathbf{t}_{i,k}| \leq \sqrt{d}/\nu_{k-1}$ . En utilisant (2.2.21), nous trouvons donc que

$$E\|W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{t}; f) - W(1/\nu_{k-1}, \mathbf{t}_{i,k}; f)\|^2 \leq \frac{1}{\nu_{k-1}A(\sqrt{d})}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P_{2,k} &\leq 2 \exp\left\{-\frac{(\varepsilon^2/4)(2/\nu_{k-1}) \log(\nu_{k-1})}{8/\nu_{k-1}A(\sqrt{d})}\right\} \\ &\leq 2 \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 \log \nu_{k-1}}{8A(\sqrt{d})}\right\}. \end{aligned}$$

En se rappelant que  $\nu_k = \lfloor (1 + \gamma)^k \rfloor$ , nous avons donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{2,k} < \infty.$$

Donc,  $\sum_{k=1}^{\infty} P(C_k(\varepsilon, \gamma)) < \infty$ . En appliquant le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que

$$P(C_k(\varepsilon, \gamma) \text{ i.o en } k \geq 1) = 0,$$

ce qui achève la démonstration de la partie (a) du théorème.

CONCLUSION. Le Théorème 2.2.1 nous permet donc de dire que la suite  $\mathcal{H}^h = \{\Theta_{\mathbf{z},h}(f) : f \in \mathcal{F}, s \in J\}$  a pour ensemble limite

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ \Theta(f) \text{ où } \Theta(f) = \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{u})\varphi(\mathbf{u})d\mathbf{u}, \text{ avec } \int_{[0,1]^d} \varphi^2(\mathbf{u})d\mathbf{u} \leq 1 \right\}.$$

## 2.3 Résultats pour des topologies plus fortes

Jusqu'à présent, nous avons utilisé des topologies induites par la norme uniforme. Mais la norme uniforme n'est pas forcément la mieux adaptée au processus de Wiener. Pour cette raison, Ben Arous et Ledoux [13] obtiennent en 1993 une version non-topologique du module de continuité. En se basant sur le même argument, Baldi *et al.* [8] établissent en 1992 une loi du module de continuité pour des normes hölderiennes. Deheuvels et Lifshits [35] poursuivent cette étude et explicitent de manière plus générale les topologies pour lesquelles la loi du module de continuité reste valable. Nous allons étendre ce résultat pour le cas du processus de Wiener multivarié, indexé par une famille de fonctions. Nous ne traiterons pas dans ce chapitre le cas du processus empirique uniforme, mais nous citons pour le lecteur les travaux de Berthet [14].

La démonstration est inspirée de celle de Deheuvels et Lifshits [35] et repose essentiellement sur l'*inégalité isopérimétrique*. C'est un outil qui nous permet d'obtenir des résultats de grandes déviations sans utiliser le résultat de Schilder [95]. Pour les définitions sur les topologies et les résultats d'inégalités isopérimétriques, on se reportera à l'annexe D.

Soit  $\tau$  la topologie induite par une semi-norme mesurable  $\|\cdot\|$  sur  $l_\infty(\mathcal{F})$  (voir p. 173), c'est à dire que (C0)(i-iii) est vérifiée. C'est une semi-norme *consistante* si elle vérifie les deux conditions suivantes.

$$(C1) \quad P(\|\frac{W(h, \mathbf{0}; \cdot)}{\sqrt{h}}\| < \infty) = 1,$$

(C2) L'ensemble  $\mathcal{H}_1$  est un sous-ensemble compact de  $(\mathcal{H}, \tau)$  obtenu en munissant  $\mathcal{H}$  de  $\tau$ .

Nous rappelons la définition de l'ensemble  $\mathcal{H}_1$  :

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ \Theta_\varphi(f), f \in \mathcal{F}, \varphi \in G_2([0, 1]^d), \text{ où } \Theta_\varphi(f) = \int_{[0, 1]^d} f(\mathbf{u})\varphi(\mathbf{u})d\mathbf{u}, \right. \\ \left. \text{avec } \int_{[0, 1]^d} \varphi^2(\mathbf{u})d\mathbf{u} \leq 1 \right\}.$$

Enfin, nous imposons des conditions en plus sur la norme.

$$(C3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\mathbf{t} \in [0, h^{1/d}]^d} \|(W(h, \mathbf{0}; \cdot) - W(h, \mathbf{t}; \cdot))h^{-1/2}\| = 0 \text{ en probabilité,}$$

(C4) pour toute suite  $r_k$  tel que  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{r_{k+1} \leq h \leq r_k} \left\| \frac{W(h, \mathbf{t}; \cdot)}{\sqrt{h}} - \frac{W(r_k, \mathbf{t}; \cdot)}{\sqrt{r_k}} \right\| = 0.$$

(C5)  $\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{W(h, \mathbf{t}; \cdot)}{\sqrt{h}} \right\| = 0.$

Une norme est dite (5)-*consistante* si elle satisfait (C0(i-iii)-C1-C2-C3-C4-C5). Nous allons montrer le théorème suivant.

**Théorème 2.3.1.** *Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathcal{H}$ , (5)-consistante. Alors,*

$$\sup_{\vartheta \in \mathcal{H}_1} \liminf_{k \rightarrow \infty} \inf_{z \in [0, 1 - h_k^{1/d}]^d} \|\Theta_{h_k, z} - \vartheta\| = 0, \quad (2.3.1)$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{z \in [0, 1 - h_k^{1/d}]^d} \inf_{\vartheta \in \mathcal{H}_1} \|\Theta_{h_k, z} - \vartheta\| = 0. \quad (2.3.2)$$

La démonstration se fait en trois étapes. Les deux premières étapes permettent d'obtenir (2.3.2), la dernière permet d'obtenir (2.3.1).

*Étape 1 (Discrétisation).* Posons  $\ell(x) = \sqrt{2 \log(1/x)}$ ,  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  et  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d)$ . Soit  $\lambda \in (1, 2]$ . On note pour tout  $k \geq 1$ ,  $r_k = \lambda^{-k}$  et  $\mathbf{t}_{\mathbf{i}, k} = (i_1 r_k^{1/d}, \dots, i_d r_k^{1/d})$  où  $0 \leq i_1, \dots, i_d \leq \lfloor r_k^{-1/d} \rfloor + 1 := m_k(\lambda)$ . Posons alors

$$\Pi_k = P \left( \sup_{0 \leq i_1, \dots, i_d \leq m_k(\lambda)} \left\{ \inf_{\vartheta \in \mathcal{H}_1} \|\Theta_{r_k, \mathbf{t}_{\mathbf{i}, k}} - \vartheta\| \right\} > \varepsilon \right).$$

Nous voulons démontrer dans cette étape que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k < \infty. \quad (2.3.3)$$

Remarquons d'abord que

$$\Pi_k \leq m_k(\lambda)^d P \left( \inf_{\vartheta \in \mathcal{H}_1} \left\| \frac{W(r_k, \mathbf{0}; \cdot)}{\sqrt{r_k}} - \ell(r_k) \vartheta(\cdot) \right\| > \ell(r_k) \varepsilon \right).$$

Or, on sait que  $W(r_k, \mathbf{0}; \cdot)/\sqrt{r_k}$  est une variable aléatoire gaussienne centrée. Notons  $B(g, r) = \{f \in \mathcal{H} : \|f - g\| \leq r\}$ . Nous allons donc appliquer le RÉSULTAT 8 à

$Z = W(r_k, \mathbf{0}; \cdot)/\sqrt{r_k}$ ,  $\mathbb{K} = \mathcal{H}_1$ ,  $B = \mathcal{H} - \{B(0, \ell(r_k)\varepsilon) + \ell(r_k)\mathcal{H}_1\}$ ,  $A = B(0, \ell(r_k)\varepsilon)$  et  $r = \ell(r_k)$ . Nous obtenons alors que

$$\begin{aligned} & P\left(\inf_{\vartheta \in \mathcal{H}_1} \left\| \frac{W(r_k, \mathbf{0}; \cdot)}{\sqrt{r_k}} - \ell(r_k)\vartheta \right\| > \ell(r_k)\varepsilon\right) \\ & \leq 1 - \phi\left(\phi^{-1}\left(P\left\{\left\| \frac{W(r_k, \mathbf{0}; \cdot)}{\sqrt{r_k}} \right\| < \ell(r_k)\varepsilon\right\}\right) + \ell(r_k)\right). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

On remarque alors que  $\ell(r_k) \rightarrow \infty$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Nous pouvons donc appliquer le Lemme D.2.1 avec  $Z = W(r_k, \mathbf{0}; \cdot)/\sqrt{r_k}$ ,  $\sigma = \sup_{\vartheta \in \mathcal{H}_1} \|\vartheta\|_{\mathcal{F}}$ ,  $\theta = \varepsilon/\sigma$ ,  $m = 0$  et  $R = \ell(r_k)\varepsilon$ . Donc, pour  $k$  suffisamment grand,

$$\phi^{-1}\left(P\left\{\left\| \frac{W(r_k, \mathbf{0}; \cdot)}{\sqrt{r_k}} \right\| < \ell(r_k)\varepsilon\right\}\right) \geq \ell(r_k)\theta.$$

Ainsi, nous obtenons, pour  $k$  suffisamment grand que  $\ell(r_k)^{-1} \leq (2\pi)^{1/2}(1 + \theta)$  et en utilisant (D.2.3), que

$$\begin{aligned} \Pi_k & \leq m_k(\lambda)^d (1 - \phi((1 + \theta)\ell(r_k))) \\ & \leq m_k(\lambda)^d \exp\{-1/2(1 + \theta)^2 \ell(r_k)^2\} \\ & \leq m_k(\lambda)^d \exp\{-(1 + \theta)^2 \log(1/r_k)\}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Or, d'après la définition de  $m_k(\lambda)$  et de  $r_k$ ,

$$(\lfloor r_k^{-1/d} \rfloor + 1)^d \exp\{-(1 + \theta)^2 \log(1/r_k)\} = (1 + o(1))\lambda^{-k[(1+\theta)^2 - 1]}.$$

Nous obtenons donc que  $\sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k < \infty$ .

*Étape 2 (Continuité).* Pour tout  $k \geq 1$  et  $0 \leq i_1, \dots, i_d \leq m_k(\lambda)$ , nous posons

$$J_{\mathbf{i};k} = J_{i_1, \dots, i_d; k} = \prod_{r=1}^d [i_r r_k^{1/d}, (i_r + 1)r_k^{1/d}).$$

Nous allons montrer dans cette étape que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pi'_k < \infty, \quad (2.3.6)$$

où

$$\Pi'_k = P\left(\max_{0 \leq i_1, \dots, i_d \leq m_k(\lambda)} \sup_{r_{k+1} \leq h \leq r_k} \sup_{\mathbf{t} \in J_{i;k}} \|\Theta_{h,\mathbf{t}} - \Theta_{r_k, \mathbf{t}_{i;k}}\| > \varepsilon\right).$$

Pour cela, nous remarquons que

$$\begin{aligned} \Pi'_k &\leq (m_k(\lambda) + 1)^d P\left(\sup_{r_{k+1} \leq h \leq r_k} \sup_{\mathbf{t} \in J_{\mathbf{0};k}} \|\Theta_{h,\mathbf{t}} - \Theta_{r_k, \mathbf{t}_{\mathbf{0};k}}\| > \varepsilon\right) \\ &\leq (m_k(\lambda) + 1)^d P\left(\sup_{r_{k+1} \leq h \leq r_k} \left\| \frac{W(h, \mathbf{t}; \cdot)}{b(h)} - \frac{W(r_k, \mathbf{t}; \cdot)}{b(r_k)} \right\| \geq \varepsilon/2\right) \\ &\quad + (m_k(\lambda) + 1)^d P\left(\sup_{\mathbf{t} \in J_{\mathbf{0};k}} \left\| \frac{W(r_k, \mathbf{t}; \cdot)}{b(r_k)} - \frac{W(r_k, \mathbf{t}_{\mathbf{0};k}; \cdot)}{b(r_k)} \right\| \geq \varepsilon/2\right) \\ &\leq \tilde{P}_{1,k} + \tilde{P}_{2,k}. \end{aligned}$$

Nous pouvons récrire  $\tilde{P}_{2,k}$  de la façon suivante.

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{2,k} &= P\left(\max_{0 \leq i_1, \dots, i_d \leq m_k(\lambda)} \sup_{\mathbf{t} \in J_{i;k}} \left\| \frac{W(r_k, \mathbf{t}; \cdot)}{\sqrt{r_k}} - \frac{W(r_k, \mathbf{t}_{i;k}; \cdot)}{\sqrt{r_k}} \right\| \geq \ell(r_k)\varepsilon/2\right) \\ &\leq m_k(\lambda)^d P\left(\sup_{\mathbf{t} \in J_{\mathbf{0};k}} \left\| \frac{W(r_k, \mathbf{t}; \cdot)}{\sqrt{r_k}} - \frac{W(r_k, \mathbf{0}; \cdot)}{\sqrt{r_k}} \right\| \geq \ell(r_k)\varepsilon/2\right) \end{aligned}$$

Nous posons  $N_k(f) = \sup_{\mathbf{t} \in [0, r_k^{1/d}]^d} \|(f(r_k, \mathbf{0}; \cdot) - f(r_k, \mathbf{t}; \cdot))/r_k^{1/2}\|$  pour  $f \in \mathcal{H}$ . Nous allons montrer que  $N_k$  est une semi-norme mesurable. En se remémorant (C0), on voit rapidement que  $N_k$  est une semi-norme. Reste à montrer que  $N_k$  est mesurable. Pour cela, remarquons dans un premier temps que  $(f(r_k, \mathbf{0}; \cdot) - f(r_k, \mathbf{t}; \cdot))/r_k^{1/2}$  est une application mesurable comme composition de deux applications mesurables. De plus, par (C0), on sait que  $\|(f(r_k, \mathbf{0}; \cdot) - f(r_k, \mathbf{t}; \cdot))/r_k^{1/2}\|$  est une application non-négative et mesurable. Puisque les applications non-négatives mesurables sont limites de suites croissantes d'applications non-négatives, mesurables et *simples* (avec un nombre fini de valeurs distinctes), on a donc la même propriété pour  $\sup_{\mathbf{t} \in [0, r_k^{1/d}]^d} \|(f(r_k, \mathbf{0}; \cdot) - f(r_k, \mathbf{t}; \cdot))/r_k^{1/2}\|$ . D'autre part, par la condition (C3),  $P(N_k(W) < \infty) = 1$ , pour tout  $k$  suffisamment grand et  $\beta(k) := 1/\phi^{-1}(P(N_k(W) < 1)) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . On peut donc appliquer (D.2.4) pour  $Z = W$  et  $R = \ell(r_k)\varepsilon$ . Nous obtenons alors pour  $k$

suffisamment grand,

$$\begin{aligned} P\left(N_k(W) < \ell(r_k)\varepsilon\right) &\leq \exp\left\{-\frac{\ell(r_k)^2\varepsilon^2}{3\beta(k)^2}\right\} \\ &\leq \exp\left\{-\frac{2\varepsilon^2\log(1/r_k)}{3\beta(k)^2}\right\} \\ &\leq \lambda^{-2k\varepsilon^2/3\beta(k)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{P}_{2,k} < \infty. \quad (2.3.7)$$

Pour calculer  $\tilde{P}_{1,k}$ , remarquons que

$$\ell(h)\left\|\frac{W(h, \mathbf{t}; \cdot)}{b(h)} - \frac{W(r_k, \mathbf{t}; \cdot)}{b(r_k)}\right\| \leq \left\|\frac{W(h, \mathbf{t}; \cdot)}{\sqrt{h}} - \frac{W(r_k, \mathbf{t}; \cdot)}{\sqrt{r_k}}\right\| + \left|1 - \frac{\ell(h)}{\ell(r_k)}\right| \left\|\frac{W(r_k, \mathbf{t}; \cdot)}{\sqrt{r_k}}\right\|.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{1,k} &\leq P\left(\left\|\frac{W(h, \mathbf{t}; \cdot)}{\sqrt{h}} - \frac{W(r_k, \mathbf{t}; \cdot)}{\sqrt{r_k}}\right\| > \ell(h)\varepsilon/2\right) \\ &\quad + P\left(\left\|\frac{W(r_k, \mathbf{t}; \cdot)}{\sqrt{r_k}}\right\| \geq \frac{\ell(h)\varepsilon/2}{|1 - \ell(h)/\ell(r_k)|}\right). \end{aligned}$$

En faisant le même raisonnement que pour  $\tilde{P}_{2,k}$ , grâce à (C4) et (C5), nous obtenons ainsi que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{P}_{1,k} < \infty. \quad (2.3.8)$$

Donc (2.3.7) et (2.3.8) nous permettent d'obtenir (2.3.6). Ainsi, en combinant (2.3.6) et (2.3.3) avec le lemme de Borel-Cantelli et l'inégalité triangulaire, nous obtenons, pour  $\varepsilon$  arbitrairement petit, (2.3.2).

*Étape 3 : Argument d'occupation.* Puisque les  $\Theta_{r_k, \mathbf{t}_{i,k}}$  pour  $0 \leq i_1, \dots, i_d \leq m_k(\lambda)$  sont des accroissements disjoints de  $W(r_k, \mathbf{t}; \cdot)/\sqrt{r_k}$ , nous avons avec  $\vartheta \in \mathcal{H}_1$  et  $\|\vartheta\|_{\mathcal{H}_1} < 1$ ,

$$\begin{aligned} P\left(\min_{0 \leq i_1, \dots, i_d \leq m_k(\lambda)} \|\Theta_{r_k, \mathbf{t}_{i,k}} - \vartheta\| > \frac{\varepsilon}{2}\right) &= P\left(\|\Theta_{r_k, \mathbf{0}} - \vartheta\| > \frac{\varepsilon}{2}\right)^{(m_k(\lambda)+1)^d} \\ &= P\left(\left\|\frac{W(r_k, \mathbf{0}; \cdot)}{\sqrt{r_k}} - \ell(r_k)\vartheta\right\| > \ell(r_k)\frac{\varepsilon}{2}\right)^{(m_k(\lambda)+1)^d} \\ &= P\left(\frac{W(r_k, \mathbf{0}; \cdot)}{\sqrt{r_k}} \in B\left(\mathbf{0}, \frac{\varepsilon}{2}\ell(r_k)\right) + \ell(r_k)\vartheta\right)^{(m_k(\lambda)+1)^d} = \Pi_k''. \end{aligned}$$

Appliquons alors le Lemme D.2.2, avec  $Z = W(r_k, \mathbf{0}; \cdot)/\sqrt{r_k}$ ,  $A = B(\mathbf{0}, \varepsilon \ell(r_k))$  et  $h = \vartheta \ell(r_k)$ . Puisque  $\ell(r_k)\varepsilon/2 \rightarrow \infty$ , par (C1), on a  $P(W(r_k, \mathbf{0}; \cdot)/\sqrt{r_k} \in A) > 1/2$ . Ainsi, par (D.2.5),

$$\begin{aligned} \Pi_k'' &\leq \left(1 - \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \|\vartheta\|_{\mathcal{H}_1}^2 \ell(r_k)^2\right\}\right)^{(m_k(\lambda)+1)^d} \\ &\leq \exp\left\{-\frac{1}{2} (m_k(\lambda) + 1)^d \exp\{-\|\vartheta\|_{\mathcal{H}_1}^2 \log(1/r_k)\}\right\} \\ &\leq \exp\left\{-\frac{1}{2} r_k^{-1} r_k^{\|\vartheta\|_{\mathcal{H}_1}^2}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{1}{2} r_k^{-1+\|\vartheta\|_{\mathcal{H}_1}^2}\right\}. \end{aligned}$$

Or,  $\|\vartheta\|_{\mathcal{H}_1}^2 < 1$  et  $r_k = \lambda^{-k}$  donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k'' < \infty.$$

Nous pouvons donc en conclure que pour  $\vartheta \in \mathcal{H}_1$  avec  $\|\vartheta\|_{\mathcal{H}_1}^2 < 1$ ,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \inf_{\mathbf{t} \in [0, 1 - r_k^{-1/d}]^d} \|\Theta_{r_k, \mathbf{t}} - \vartheta\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par (C2), il existe une suite  $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_N\} \subseteq \mathcal{H}_1$  (avec  $\|\vartheta_i\|_{\mathcal{H}_1}^2 < 1$  pour  $i = 1, \dots, N$ ) et  $\sup_{\vartheta \in \mathcal{H}_1} \{\min_{1 \leq i \leq N} \|\vartheta - \vartheta_i\|\} < \varepsilon/2$ . En appliquant le résultat précédent à  $\vartheta = \vartheta_i$  pour  $i = 1, \dots, N$ , nous trouvons que

$$\sup_{\vartheta \in \mathcal{H}_1} \liminf_{k \rightarrow \infty} \left\{ \inf_{\mathbf{t} \in [0, 1 - r_k^{-1/d}]^d} \|\Theta_{r_k, \mathbf{t}} - \vartheta\| \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En choisissant  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit, on obtient (2.3.1).



# Chapitre 3

## Processus indexés par des fonctions

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>73</b>
<b>3.2</b>	<b>Démonstration de la borne supérieure</b>	<b>80</b>
<b>3.3</b>	<b>Démonstration de la borne inférieure</b>	<b>85</b>
<b>3.4</b>	<b>Pour le processus empirique uniforme</b>	<b>105</b>
3.4.1	Préliminaires	106
3.4.2	Démonstration de la borne supérieure	108
3.4.3	Démonstration de la borne inférieure	112
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>112</b>
3.5.1	Topologie non uniforme	112
3.5.2	Vitesses de convergence	114
3.5.3	Nouvelle démonstration	116
3.5.4	Application statistique	118

---

### 3.1 Introduction

Nous allons commencer par faire un survol des résultats obtenus dans l'étude des ensembles de points exceptionnels liés aux trajectoires de processus gaussiens et aux trajectoires de processus empiriques uniformes. Cette étude a été marquée, en 1974, par

les travaux d'Orey et Taylor [90]. Ces auteurs considèrent le processus de Wiener réel standard  $\{W(t) : t \geq 0\}$ . Partant de la loi du logarithme itéré pour  $t_0$  fixé,

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\pm\{W(t_0 + h) - W(t_0)\}}{\sqrt{2h \log(1/h)}} = 1 \quad \text{p.s.}, \quad (3.1.1)$$

ils remarquent que le comportement du module de continuité n'est pas du même ordre. En effet, Lévy [75] a montré que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{\pm\{W(t+h) - W(t)\}}{\sqrt{2h \log(1/h)}} = 1 \quad \text{p.s.} \quad (3.1.2)$$

Soit  $0 \leq \Lambda \leq 1$ . Ils considèrent alors l'ensemble

$$E(\Lambda) = \left\{ t \in [0, 1] : \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\pm\{W(t+h) - W(t)\}}{\sqrt{2h \log(1/h)}} \geq \Lambda \right\}. \quad (3.1.3)$$

On voit alors que (3.1.1) et (3.1.2) impliquent les deux égalités suivantes :

$$P(t_0 \in E(\Lambda) \text{ i.s.}) = 0 \quad \text{et} \quad P(E(\Lambda) = \emptyset \text{ i.s.}) = 0,$$

où « i.s » signifie « infiniment souvent » (en anglais « i.o. »). Cela signifie que pour tout  $\Lambda \in (0, 1)$  et tout  $t_0 \in [0, 1)$  fixé, avec probabilité 1,  $E(\Lambda)$  est non vide et ne contient pas  $t_0$ . Orey et Taylor calculent alors la dimension de Hausdorff de cet ensemble exceptionnel et montrent que  $E(\Lambda)$  possède une dimension fractale (au sens de non entier, voir le chapitre 1.2 pour des rappels sur la dimension de Hausdorff). Plus précisément, ils montrent le théorème suivant.

**Théorème 3.1.1.** *Avec probabilité 1,*

$$\dim E(\Lambda) = 1 - \Lambda^2 \quad (0 \leq \Lambda \leq 1). \quad (3.1.4)$$

En 2001, Dindar [46] généralise ce résultat pour le processus de Wiener bivarié  $\{W(s, t) : 0 \leq s < \infty, 0 \leq t < \infty\}$ . Soit  $R = [s_1, s_2] \times [t_1, t_2]$  un pavé de  $\mathbb{R}_+^2$ . Il définit

$$W(R) = W(s_2, t_2) - W(s_1, t_2) - W(s_2, t_1) + W(s_1, t_1),$$

et considère l'ensemble

$$F(\Lambda) = \left\{ 0 \leq s < 1, 0 \leq t < 1 : \limsup_{h \downarrow 0} \frac{|W(R)|}{\sqrt{2h^2 \log(1/h^2)}} \geq \Lambda \right\},$$

où  $R$  désigne le pavé  $[s, s+h] \times [t, t+h]$ . Il montre le théorème suivant.

**Théorème 3.1.2.** *Pour tout  $\Lambda \in [0, 1]$ , on a avec probabilité 1,*

$$\dim F(\Lambda) = 2(1 - \Lambda^2). \quad (3.1.5)$$

Le résultat ci-dessus de Dindar a été généralisé pour un processus gaussien à  $N$  paramètres par Lin et Cheng [76] en 2007.

Comme nous avons vu précédemment, les oscillations du processus empirique uniforme et du processus de Wiener sont étroitement liées (voir p.50). Rappelons la notation

$$\alpha_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.1.6)$$

pour désigner un processus empirique uniforme généré par des variables aléatoires  $U_1, \dots, U_n$  indépendantes, de même loi uniforme sur  $[0, 1]$ , avec

$$F_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,t]}(U_i). \quad (3.1.7)$$

Soit  $\{h_n : n \geq 1\}$  une suite de constantes. On imposera à cette suite des conditions parmi les suivantes :

(H.1)  $h_n \downarrow 0, nh_n \uparrow \infty$  et  $0 < h_n < 1$ ,

(H.2)  $nh_n / \log n \rightarrow \infty$ ,

(H.3)  $\log(1/h_n) / \log_2 n \rightarrow \infty$ ,

(H.4)  $nh_n / \log_2 n \rightarrow \infty$ ,

(H.5)  $nh_n / \log n \rightarrow c \in (0, \infty)$ ,

(H.6)  $nh_n / \log n \rightarrow 0$ ,

(H.7)  $\log(1/h_n) / \log_2 n \rightarrow d \in [0, \infty)$ ,

(H.8)  $\log(1/h_n) / \log n \rightarrow 1$ .

Les deux théorèmes qui suivent, donnent une description partielle des oscillations du processus empirique uniforme.

**Théorème 3.1.3.** *Sous (H1) et (H4), pour  $t_0 \in [0, 1)$  fixé, on a*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\pm \{\alpha_n(t_0 + h_n) - \alpha_n(t_0)\}}{\sqrt{2h_n \log_2 n}} = 1 \quad \text{p.s.} \quad (3.1.8)$$

**Théorème 3.1.4.** *Sous (H1),(H2) et (H3), on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1 - h_n} \frac{\pm \{\alpha_n(t + h_n) - \alpha_n(t)\}}{\sqrt{2h_n \log(1/h_n)}} = 1 \quad \text{p.s.} \quad (3.1.9)$$

Le Théorème 3.1.3 a été démontré par Kiefer [66] en 1972 pour  $t_0 = 0$ . On peut également démontrer le résultat pour  $t_0 \in [0, 1)$ . Le Théorème 3.1.4 coïncide avec (1.3) dans Deheuvels et Mason [38] et étend un résultat de Stute [101]. Ces deux résultats sont les analogues respectifs de (3.1.1) et (3.1.2).

À partir de ces résultats, Deheuvels et Mason [41] montrent en 1995 l'analogie du théorème d'Orey et Taylor [90] pour le processus empirique uniforme. Ils considèrent l'ensemble

$$E(\Lambda) = \left\{ t \in [0, 1) : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n(t + h_n) - \alpha_n(t)}{\sqrt{2h_n \log(1/h_n)}} \geq \Lambda \right\}. \quad (3.1.10)$$

Ils montrent alors le théorème suivant.

**Théorème 3.1.5.** *Sous (H.1),(H.2) et (H.3), pour tout  $\Lambda \in [0, 1]$ , on a presque sûrement,*

$$\dim E(\Lambda) = 1 - \Lambda^2. \quad (3.1.11)$$

*De plus, pour tout  $\Lambda \in [0, 1)$ ,  $E(\Lambda)$  est presque partout dense dans  $[0, 1]$ .*

Deheuvels et Mason [41] prouvent ce résultat dans le cadre fonctionnel que nous exposons brièvement ici. Rappelons que nous avons noté (p. 50)  $\mathbb{H}_0^1$  l'ensemble des fonctions absolument continues sur  $[0, 1]$ , par rapport à la mesure de Lebesgue, de la forme  $f(s) = \int_0^s \dot{f}(u) du$  pour  $s \in [0, 1]$ , avec  $\|f\|_{\mathbb{H}_0^1}^2 = \int_0^1 \dot{f}(u)^2 du < \infty$  et  $\mathbb{K}_0^1$  la boule unité du RKHS  $\mathbb{H}_0^1$ . Nous pouvons exprimer  $\mathbb{K}_0^1$  de la façon suivante :

$$\mathbb{K}_0^1 = \left\{ f \in \mathbb{H}_0^1 : \|f\|_{\mathbb{H}_0^1}^2 \leq 1 \right\}.$$

Les incréments du processus empirique uniforme sont notés

$$\Delta\alpha_n(h, t; s) = \alpha_n(t + hs) - \alpha_n(t), \quad t \in [0, 1 - h], \quad s \in [0, 1]. \quad (3.1.12)$$

En 1988, Mason [84] obtient une loi du logarithme itéré pour  $\xi_n$ . Il montre plus précisément le théorème suivant. (Dans la suite,  $\mathbf{I}$  désigne la fonction identité).

**Théorème 3.1.6.** *Sous (H1) et (H4), pour  $t_0 \in [0, 1)$  fixé, la suite de fonction*

$$\{(2h_n \log_2 n)^{-1/2} \Delta \alpha_n(h_n, t_0; \mathbf{I}), n \geq 1\},$$

*est presque sûrement relativement compacte dans  $\mathbb{H}_0^1$  et son ensemble limite est  $\mathbb{K}_0^1$ .*

(Mason le montre pour  $t_0 = 0$ . Deheuvels et Mason [40], en utilisant un argument naturel, le montrent pour  $t_0 \in [0, 1)$ ). D'autre part, en 1992, Deheuvels et Mason [38] obtiennent le théorème suivant.

**Théorème 3.1.7.** *Sous (H1), (H2) et (H3), la suite*

$$\{(2h_n \log(1/h_n))^{-1/2} \Delta \alpha_n(h_n, t; \mathbf{I}), 0 \leq t \leq 1 - h_n\}$$

*est presque sûrement relativement compacte dans  $\mathbb{H}_0^1$  et son ensemble limite est  $\mathbb{K}_0^1$ .*

Les Théorèmes 3.1.6 et 3.1.7 sont les analogues respectifs des Théorèmes 3.1.3 et 3.1.4. Les conditions (H1), (H2) et (H3) sont souvent appelées les conditions CRS (Csörgő-Révész-Stute). Pour  $f \in \mathbb{H}_0^1$ , Deheuvels et Mason définissent alors les ensembles

$$L(f) = \left\{ t \in [0, 1) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\Delta \alpha_n(h_n, t; \mathbf{I})}{\sqrt{2h_n \log(1/h_n)}} - f \right\| = 0 \right\}, \quad (3.1.13)$$

et pour  $\Lambda \in [0, 1]$ ,

$$L_\Lambda^* = \bigcup \left\{ L(f) : f \in \mathbb{K}_0^1, \int_0^1 \dot{f}(u)^2 du \geq \Lambda^2 \right\}. \quad (3.1.14)$$

Deheuvels et Mason [41] calculent leur dimension fractale.

**Théorème 3.1.8.** *Sous (H.1), (H.2) et (H.3), pour tout  $f \in \mathbb{K}_0^1$  telle que  $\int_0^1 \dot{f}(u)^2 du \in (0, 1)$  et  $\Lambda \in [0, 1)$ , les ensembles  $L(f)$  et  $L_\Lambda^*$  sont presque partout denses dans  $[0, 1]$  et satisfont*

$$\dim L(f) = 1 - \int_0^1 \dot{f}(u)^2 du \text{ et } \dim L_\Lambda^* = 1 - \Lambda^2. \quad (3.1.15)$$

Autour de ces recherches sur les fractales engendrées par des accroissement du processus empirique, nous pouvons également citer les travaux de Louani et Lucas [77]. Ils étudient le comportement de  $\xi_n(h_n, t; s)$  pour  $t \in [0, 1 - h_n]$ ,  $s \in [0, 1]$  et  $h_n$  suivant d'autres conditions que les conditions CRS. Ils posent  $S_\theta = \{f \in \mathbb{H}_0^1 : |f|_{\mathbb{K}_0^1} \leq \theta\}$  et  $d_n =$

$(2h_n d \log_2 n)^{1/2}$  avec  $d \geq 1$ . Ils définissent ensuite, pour tout  $1/d \leq \alpha \leq 1$ , les ensembles exceptionnels

$$L'(f) = \left\{ t \in [0, 1] : \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\Delta \alpha_n(h_n, t; \cdot)}{d_n} - f \right\| = 0 \right\}, \quad (3.1.16)$$

et

$$L'_\alpha(d) = \bigcup \{ L'(f) : f \in S_1 \setminus S_{1/d} \text{ et } |f|_{\mathbb{H}_0^1} \geq \alpha \}. \quad (3.1.17)$$

Ces auteurs montrent le théorème suivant.

**Théorème 3.1.9.** *Sous (H1) et (H7), pour tout  $f \in S_1 \setminus S_{1/d}$  et tout  $1/d \leq \alpha \leq 1$ ,*

$$1 - |f|_{\mathbb{H}_0^1} \leq \dim L'(f) \leq 1 - |f|_{\mathbb{H}_0^1} + \frac{1}{d}, \quad (3.1.18)$$

et

$$1 - \alpha \leq \dim(L'_\alpha(d)) \leq 1 - \alpha + \frac{1}{d}. \quad (3.1.19)$$

REMARQUE 10. Une suite  $\{h_n : n \geq 1\}$  vérifiant (H1) et (H7) correspond à ce qu'on appelle des *grands accroissements*. Une suite  $\{h_n : n \geq 1\}$  vérifiant (H1), (H6) et (H8) correspond à ce qu'on appelle des *petits accroissements*. Louani et Lucas [77] montrent l'analogie des résultats (3.1.18) et (3.1.19) pour les petits accroissements.

Revenons au problème des oscillations du processus de Wiener. Deheuvels et Mason [40] ont montré l'analogie du Théorème 3.1.8 pour les oscillations du processus de Wiener, en notant

$$\Delta W(h, t; s) = W(t + hs) - W(t).$$

Ils considèrent une fonction  $f \in \mathbb{K}_0^1$  telle que  $\int_0^1 f^2(u) du \in (0, 1)$  ainsi que l'ensemble

$$S(f) = \{ t \in [0, 1) \liminf_{h \downarrow 0} \|(2h \log(1/h))^{-1/2} \Delta W(h, t; \cdot) - f\| = 0 \}.$$

Voici, dans le théorème suivant, le résultat qu'ils obtiennent.

**Théorème 3.1.10.** *Avec probabilité 1, nous avons*

$$\dim S(f) = 1 - \int_0^1 f^2(u) du.$$

Dans ce chapitre, nous allons établir une formulation plus générale des résultats fractals obtenus par Orey et Taylor [90] pour le cas du *processus de Wiener multivarié indexé par une famille de fonctions* puis pour le cas du *processus empirique uniforme multivarié indexé par une famille de fonctions*. Nous verrons que les résultats énoncés ci-dessus pourront s'obtenir à partir de notre formulation plus générale.

On utilise les notations du chapitre 2.2. Rappelons que  $|\cdot|_2$  dénote la norme euclidienne usuelle sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathcal{F}$  est une famille de fonctions vérifiant

- F.i  $\lim_{|\mathbf{w}|_2 \rightarrow 0} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^d} (f(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x} + \mathbf{w})^2 d\mathbf{x} = 0$ ,
- F.ii  $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^d} (f(\mathbf{x})) - f(\lambda \mathbf{x})^2 d\mathbf{x} = 0$ ,
- F.iii pour tout  $\lambda \geq 1$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$  et  $f \in \mathcal{F}$ ,  $f(\mathbf{z} - \lambda \cdot) \in \mathcal{F}$ ,
- F.iv  $\mathcal{F}$  est une famille de fonctions de Vapnik-Červonenkis,
- F.v  $\mathcal{F}$  est une famille ponctuellement mesurable.

On rappelle que le processus de Wiener multivarié indexé par  $f \in \mathcal{F}$  en  $\mathbf{z} \in [0, 1]^d$  s'écrit sous la forme suivante.

$$W(h, \mathbf{z}; f) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{u}}{h^{1/d}}\right) dW(\mathbf{u}), \quad (3.1.20)$$

et on pose

$$\Theta_{h, \mathbf{z}}(f) = \frac{W(h, \mathbf{z}; f)}{\sqrt{2h \log 1/h}} = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} f(h^{-1/d}(\mathbf{z} - \mathbf{u})) dW(\mathbf{u})}{\sqrt{2h \log 1/h}}. \quad (3.1.21)$$

On note  $\Theta_\varphi$  la fonctionnelle  $\Theta_\varphi(f) = \int_{[0, 1]^d} f(\mathbf{u}) \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$ . De plus, pour  $\Lambda \in [0, 1]$ , on pose

$$\mathcal{H}_\Lambda = \left\{ \Theta_\varphi(f), f \in \mathcal{F}, \varphi \in G_2([0, 1]^d) \text{ avec } \int_{[0, 1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \leq \Lambda^2 \right\}. \quad (3.1.22)$$

Nous avons montré dans le chapitre 2 que, pour tout compact  $J$  de  $\mathbb{R}^d$  d'intérieur non vide, l'ensemble  $\{\Theta_{h, \mathbf{z}}(\cdot), \mathbf{z} \in J\}$  est presque sûrement relativement compact et admet pour ensemble limite  $\mathcal{H}_1$ . Ce résultat nous mène à considérer les ensembles de points suivants, pour  $\Theta_\varphi \in \mathcal{H}_1$  et  $\varphi \in G_2([0, 1]^d)$ .

$$S(\Theta_\varphi) = \left\{ \mathbf{z} \in [0, 1]^d : \liminf_{h \downarrow 0} \|\Theta_{h, \mathbf{z}} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} = 0 \right\}, \quad (3.1.23)$$

et

$$S_\Lambda = \bigcup \left\{ S(\Theta_\varphi), \Theta_\varphi \in \mathcal{H}_1, \varphi \in G_2([0, 1]^d), \int_{[0,1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \geq \Lambda^2 \right\}. \quad (3.1.24)$$

Nous allons démontrer le théorème suivant.

**Théorème 3.1.11.** *Pour tout  $\Theta_\varphi \in \mathcal{H}_1$  et  $\varphi \in G_2([0, 1]^d)$  tel que  $\int_{[0,1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \in (0, 1)$  et pour  $\Lambda \in [0, 1)$ ,*

$$\dim S(\Theta_\varphi) = d \left( 1 - \int_{[0,1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right) \text{ et } \dim S_\Lambda = d(1 - \Lambda^2). \quad (3.1.25)$$

La démonstration de ce théorème est basée sur le même principe que pour le calcul de la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor (voir le chapitre 1.5.1, p. 42).

## 3.2 Démonstration de la borne supérieure

Nous allons d'abord montrer la borne supérieure du théorème, c'est à dire pour  $0 \leq \Lambda \leq 1$ ,

$$\dim S_\Lambda \leq d(1 - \Lambda^2). \quad (3.2.1)$$

En pratique, il nous suffit de montrer le résultat pour  $0 < \Lambda < 1$ . En effet, remarquons que si  $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ ,  $S_{\Lambda_2} \subseteq S_{\Lambda_1}$  et donc, par (1.2.4),  $\dim S_{\Lambda_2} \leq \dim S_{\Lambda_1}$ . Ainsi, pour tout  $0 < \Lambda < 1$ ,  $\dim S_1 \leq d(1 - \Lambda^2)$ . Puisque  $\Lambda \in (0, 1)$  est arbitraire,  $\dim S_1 = 0$ . L'inégalité  $\dim S_0 \leq d$  étant triviale, nous avons bien montré qu'il suffisait d'établir le résultat (3.2.1) pour  $0 < \Lambda < 1$ .

Nous allons exposer tout d'abord quelques notations qui nous serviront pour la suite de la démonstration. Soit

$$S_{\Lambda^+} = \bigcup \left\{ S(\Theta_\varphi) : \Theta_\varphi \in \mathcal{H}_1, \int_{[0,1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} > \Lambda^2 \right\}. \quad (3.2.2)$$

Rappelons que pour tout ensemble  $\mathcal{G}$  on définit son voisinage dans  $l_\infty(\mathcal{F})$  par

$$\mathcal{G}^\varepsilon = \{ \psi \in l_\infty(\mathcal{F}) : \inf_{\vartheta \in \mathcal{G}} \|\psi - \vartheta\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon \}.$$

Nous posons donc

$$S(h, \varepsilon, \Lambda) = \{ \mathbf{t} \in [0, 1]^d : \Theta_{h,\mathbf{t}} \notin \mathcal{H}_\Lambda^\varepsilon \}, \quad (3.2.3)$$

et

$$S(\varepsilon, \Lambda) = \{\mathbf{t} \in [0, 1]^d : \Theta_{h,\mathbf{t}} \notin \mathcal{H}_\Lambda^\varepsilon \text{ i.s.}\}. \quad (3.2.4)$$

On remarque alors que pour tout  $\Lambda > 0$  et tout entier  $m_0 \geq 1$ , on a

$$S_{\Lambda^+} \subseteq \bigcup_{m=m_0}^{\infty} S(1/m, \Lambda).$$

Ainsi, compte tenu des propriétés de la mesure et de la dimension de Hausdorff [50] et [51], pour montrer que  $s^c - \text{mes}(S_{\Lambda^+}) = 0$ , il suffit de montrer que pour tout  $m \geq m_0$ ,  $s^c - \text{mes}(S(1/m, \Lambda)) < \infty$ . Pour établir (3.2.1) il nous suffit donc de montrer que pour tout  $0 < \Lambda < 1$  et  $\varepsilon > 0$ ,

$$s^{d(1-\Lambda^2)} - \text{mes}(S(\varepsilon, \Lambda)) < \infty. \quad (3.2.5)$$

Le lemme suivant nous permettra de contrôler les oscillations entre deux points. Pour  $f \in \mathcal{F}$ , considérons le processus

$$Y(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{u}) dW(\mathbf{u}).$$

Pour  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ , nous notons  $\rho$  la pseudo-métrique usuelle

$$\rho(f_1, f_2) = \sqrt{E(Y(f_1) - Y(f_2))^2} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} (f_1 - f_2)^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u}}.$$

**Lemme 3.2.1.** *Il existe une fonction  $\psi(\delta)$ , de  $\delta > 0$ , où  $\psi(\delta) \rightarrow 0$  quand  $\delta \downarrow 0$  telle que*

$$\limsup_{h \downarrow 0} \sup_{\rho(f_1, f_2) \leq \sqrt{\delta h}} \frac{|Y(f_1) - Y(f_2)|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} = \psi(\delta) \quad p.s. \quad (3.2.6)$$

*Démonstration.* Voir Mason [85]. □

Rappelons ici que  $|\cdot|_2$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ . D'après F.i-ii, il existe une fonction  $A(\delta)$ ,  $\delta > 0$  telle que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = 0 \quad (3.2.7)$$

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{|\mathbf{w}|_2 \leq \delta} \int_{\mathbb{R}^d} (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} + \mathbf{w}))^2 d\mathbf{x} \leq A(\delta). \quad (3.2.8)$$

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{1-\delta \leq \lambda \leq 1+\delta} \int_{\mathbb{R}^d} (f(\mathbf{x}) - f(\lambda \mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \leq A(\delta). \quad (3.2.9)$$

Nous aurons souvent recours au lemme suivant pour utiliser le lemme 3.2.1.

**Lemme 3.2.2.** *Pour tout  $0 < \delta < 1$ ,  $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \mathbb{R}^d$  et  $h, h' > 0$*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{|\mathbf{t} - \mathbf{t}'|_2 \leq \delta h^{1/d}} E(W(h, \mathbf{t}; f) - W(h, \mathbf{t}'; f))^2 \leq A(\delta)h. \quad (3.2.10)$$

et

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{(1-\delta)^d \leq h/h' \leq (1+\delta)^d} E(W(h, \mathbf{t}; f) - W(h', \mathbf{t}; f))^2 \leq A(\delta)h. \quad (3.2.11)$$

*Démonstration.* Ce lemme est démontré au chapitre 2, (voir le lemme 2.2.3).  $\square$

Pour établir (3.2.1) nous avons besoin de nouvelles notations. Compte tenu de (2.2.10) et pour des entiers  $K \geq 1$  et  $k \geq 0$ , on pose

$$t_k(i_r, K) = \frac{i_r}{K\nu_k} \text{ pour } 0 \leq i_r \leq K\nu_k \text{ et } 1 \leq r \leq d.$$

De plus, avec la notation  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d)$ , nous posons

$$t_k(\mathbf{i}, K) = (t_k(i_1, K), \dots, t_k(i_d, K)).$$

Posons enfin

$$\mathbf{1}_{i_1, \dots, i_d, k}(\varepsilon, \Lambda) = \mathbb{1}\{\Theta_{1/\nu_k^d, t_k(\mathbf{i}, K)} \notin \mathcal{H}_\Lambda^{\varepsilon/2}\}, \quad (3.2.12)$$

$$I_{i_1, \dots, i_d, k}(\varepsilon) = \begin{cases} \prod_{r=1}^d [t_k(i_r - 1, K), t_k(i_r + 1, K)) & \text{si } \mathbf{1}_{i_1, \dots, i_d, k}(\varepsilon, \Lambda) = 1, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.2.13)$$

**Lemme 3.2.3.** *Pour  $K \geq 1$  suffisamment grand, il existe presque sûrement  $N < \infty$  tel que pour tout  $k \geq N$ ,*

$$V_k(\varepsilon, \Lambda) := \bigcup_{1/\nu_k \leq h < 1/\nu_{k-1}} S(h, \varepsilon, \Lambda) \subseteq \bigcup_{0 \leq i_1 < K\nu_k} \dots \bigcup_{0 \leq i_d < K\nu_k} I_{i_1, \dots, i_d, k}(\varepsilon). \quad (3.2.14)$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{t} \in \bigcup_{1/\nu_k^d \leq h < 1/\nu_{k-1}^d} S(h, \varepsilon, \Lambda)$ . Ainsi,  $\Theta_{h, \mathbf{t}} \notin \mathcal{H}_\Lambda^\varepsilon$  pour un certain  $h \in [1/\nu_k^d, 1/\nu_{k-1}^d[$ , ce qui signifie que pour tout  $\Theta_\varphi \in \mathcal{H}_\Lambda$ ,

$$\|\Theta_{h, \mathbf{t}} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} > \varepsilon \text{ pour } h \in [1/\nu_k^d, 1/\nu_{k-1}^d[.$$

Choisissons  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d)$  tel que  $\mathbf{t} \in \prod_{r=1}^d [t_k(i_r - 1, K), t_k(i_r + 1, K)]$ . Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|\Theta_{1/\nu_k^d, t_k(\mathbf{i}, K)} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} \geq \|\Theta_{h, \mathbf{t}} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} - \|\Theta_{h, \mathbf{t}} - \Theta_{h, t_k(\mathbf{i}, K)}\|_{\mathcal{F}} - \|\Theta_{h, t_k(i, K), h} - \Theta_{1/\nu_k^d, t_k(i, K)}\|_{\mathcal{F}}. \quad (3.2.15)$$

Nous allons commencer par borner le terme  $\|\Theta_{h, \mathbf{t}} - \Theta_{h, t_k(\mathbf{i}, K)}\|_{\mathcal{F}}$ . En se rappelant de (3.2.13), nous voyons que

$$|\mathbf{t} - t_k(\mathbf{i}, K)|_2 \leq \frac{2\sqrt{d}}{K\nu_k}.$$

Lorsque nous appliquons le lemme 3.2.2 et (3.2.10) avec  $\delta = 2\sqrt{d}/K$ , nous obtenons

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} E(W(h, \mathbf{t}; f) - W(h, t_k(\mathbf{i}, K); f))^2 \leq A \left( \frac{2\sqrt{d}}{K} \right) 1/\nu_k^d.$$

Remarquons que la fonction  $b(h) = \sqrt{2h \log(1/h)}$  est croissante pour  $0 < h < e^{-1}$ . Nous déduisons alors du lemme 3.2.1, pour  $1/\nu_k^d \leq h < 1/\nu_{k-1}^d$ , qu'il existe une fonction  $\psi(\delta)$  de  $\delta > 0$ , où  $\psi(\delta) \rightarrow 0$  lorsque  $\delta \downarrow 0$  telle que

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Theta_{h, \mathbf{t}} - \Theta_{h, t_k(\mathbf{i}, K)}\|_{\mathcal{F}} &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{|W(h, \mathbf{t}; f) - W(h, t_k(\mathbf{i}, K); f)|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{\rho(f_1, f_2) \leq \sqrt{A \left( \frac{2\sqrt{d}}{K} \right) \nu_k^{-d}}} \frac{|Y(f_1) - Y(f_2)|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{\rho(f_1, f_2) \leq \sqrt{A \left( \frac{2\sqrt{d}}{K} \right) \nu_k^{-d}}} \frac{|Y(f_1) - Y(f_2)|}{\sqrt{2\nu_k^{-d} \log(\nu_k^d)}} \\ &\leq \psi \left( A \left( \frac{2\sqrt{d}}{K} \right) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $K \geq 1$  suffisamment grand, il existe presque sûrement  $N < \infty$  tel que pour tout  $k \geq N$ ,

$$\|\Theta_{h, \mathbf{t}} - \Theta_{h, t_k(\mathbf{i}, K)}\|_{\mathcal{F}} \leq \varepsilon/4. \quad (3.2.16)$$

De manière analogue, nous nous occupons maintenant du deuxième terme de droite de (3.2.15). En remarquant que  $1 \leq h^{1/d} \nu_k < \nu_k / \nu_{k-1}$ , nous appliquons le lemme 3.2.2 et (3.2.11) puis le lemme 3.2.1. Pour  $K \geq 1$  suffisamment grand, nous obtenons qu'il existe presque sûrement  $N < \infty$  tel que pour tout  $k \geq N$ ,

$$\|\Theta_{h, t_k(i, K), h} - \Theta_{1/\nu_k^d, t_k(i, K)}\|_{\mathcal{F}} \leq \varepsilon/4. \quad (3.2.17)$$

Ainsi, nous déduisons de (3.2.15), (3.2.16) et de (3.2.17) que

$$\|\Theta_{1/\nu_k^d, t_k(i, K)} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} \geq \varepsilon/2.$$

D'après (3.2.12), cela implique (3.2.14).  $\square$

Ce lemme implique par conséquent que nous ayons, pour tout  $\Lambda \in (0, 1)$ , la majoration

$$s^{d(1-\Lambda^2)} - \text{mes}(V_k(\varepsilon, \Lambda)) \leq \sum_{i_1=0}^{K\nu_k} \cdots \sum_{i_d=0}^{K\nu_k} \left(\frac{2\sqrt{d}}{K\nu_k}\right)^{d(1-\Lambda^2)} \mathbf{1}_{i_1, \dots, i_d, k}(\varepsilon, \Lambda),$$

et donc

$$\begin{aligned} s^{d(1-\Lambda^2)} - \text{mes}(S_{\Lambda^+}) &\leq \sum_{k \geq 1} \left\{ s^{d(1-\Lambda^2)} - \text{mes}(V_k(\varepsilon, \Lambda)) \right\} \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \sum_{i_1=0}^{K\nu_k} \cdots \sum_{i_d=0}^{K\nu_k} \left(\frac{2\sqrt{d}}{K\nu_k}\right)^{d(1-\Lambda^2)} \mathbf{1}_{i_1, \dots, i_d, k}(\varepsilon, \Lambda) \end{aligned}$$

On note  $S_k = \sum_{i_1=0}^{K\nu_k} \cdots \sum_{i_d=0}^{K\nu_k} \mathbf{1}_{i_1, \dots, i_d, k}(\varepsilon, \Lambda)$ . Alors, pour établir l'inégalité (3.2.1), il suffit de prouver que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \left\{ \sum_{i_1=0}^{K\nu_k} \cdots \sum_{i_d=0}^{K\nu_k} \left(\frac{2\sqrt{d}}{K\nu_k}\right)^{d(1-\Lambda^2)} \mathbf{1}_{i_1, \dots, i_d, k}(\varepsilon, \Lambda) \right\} \\ \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{d}}{K\nu_k}\right)^{d(1-\Lambda^2)} \mathbb{E} S_k < \infty. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Or, dans cette dernière formule,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} S_k &= \sum_{i_1=0}^{K\nu_k} \cdots \sum_{i_d=0}^{K\nu_k} P(\Theta_{(1/\nu_k)^d, t_k(i, K)}(f) \notin \mathcal{H}_\Lambda^{\varepsilon/2}) \\ &= (K\nu_k + 1)^d P(\Theta_{(1/\nu_k)^d, \mathbf{0}}(f) \notin \mathcal{H}_\Lambda^{\varepsilon/2}), \end{aligned}$$

en notant  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ . On utilise alors la PROPOSITION 1 (p. 57) sur les grandes déviations avec  $\varepsilon_k = (2 \log \nu_k)^{-d}$  et  $F = l_\infty(\mathcal{F}) - \mathcal{H}_\Lambda^{\varepsilon/2}$ . Or pour  $\rho > 0$ ,  $2I(F) \geq \Lambda^2 + \rho$ . On obtient alors les inégalités

$$\begin{aligned} \mathbb{E} S_k &\leq (K\nu_k + 1)^d \exp\{-2d \log \nu_k (\Lambda^2 + \rho)/2\} \\ &\leq (K\nu_k + 1)^d \nu_k^{-d(\Lambda^2 + \rho)}. \end{aligned}$$

Or,

$$\left(\frac{2\sqrt{d}}{K\nu_k}\right)^{d(1-\Lambda^2)} (K\nu_k + 1)^d \nu_k^{-d(\Lambda^2+\rho)} = (1 + o(1))\nu_k^{-d\rho} = (1 + o(1))(1 + \gamma)^{-kd\rho}.$$

Cela nous permet bien d'avoir (3.2.18) et donc (3.2.1).

### 3.3 Démonstration de la borne inférieure

Dans cette partie, nous allons montrer que pour toute fonctionnelle  $\Theta_\varphi \in \mathcal{H}_1$  associée à une fonction  $\varphi$  telle que  $0 < \lambda^2 = \int_{[0,1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} < 1$ ,

$$\dim S(\Theta_\varphi) \geq d \left(1 - \int_{[0,1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u}\right). \quad (3.3.1)$$

Fixons  $\Lambda \in (0, 1)$ . En prenant  $\lambda = \Lambda$  et  $\varphi(\mathbf{u}) = \Lambda$ , pour tout  $\mathbf{u} \in [0, 1]^d$  et puisque  $S(\Theta_\varphi) \subseteq S_\Lambda$ , on obtient alors que  $\dim S_\Lambda \geq d(1 - \Lambda^2)$ . Ceci, combiné avec (3.2.1), nous donne pour  $0 < \Lambda < 1$ ,

$$\dim S_\Lambda = d(1 - \Lambda^2). \quad (3.3.2)$$

Pour  $\Lambda = 1$ , nous savons que  $\dim S_1 \geq 0$  car la dimension de Hausdorff est toujours positive ou nulle. Ainsi, en combinant ceci avec (3.2.1), nous trouvons que  $\dim S_1 = 0$ . Pour  $\Lambda = 0$ , en utilisant les propriétés de la dimension de Hausdorff [50] et (3.3.2), nous obtenons les égalités suivantes.

$$\dim S_0 = \dim \left( \bigcup_{m \geq 1} S_{1/m} \right) = \sup_{m \geq 1} \dim S_{1/m} = \sup_{m \geq 1} d(1 - m^{-2}) = d.$$

Donc, il suffit de montrer (3.3.1) pour  $\lambda \in (0, 1)$ . Un des outils principaux de la démonstration de (3.3.1) est le lemme suivant :

**Lemme 3.3.1.** *Soit  $A \in [0, 1]^d$  tel que  $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$ , où  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$  est une suite décroissante pour l'inclusion, de la forme  $E_m = \bigcup_{k=1}^{M_m} I_{m,k}$  où  $\{I_{m,k} : 1 \leq k \leq M_m\}$  est une collection de pavés d'intérieurs disjoints de  $\mathbb{R}^d$ , tels que*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \max_{1 \leq k \leq M_m} |I_{m,k}| \right] = 0 \text{ et } \lim_{m \rightarrow \infty} M_m = \infty. \quad (3.3.3)$$

Supposons maintenant qu'il existe deux constantes  $\Delta > 0$  et  $\delta > 0$  telles que, pour tout pavé  $I \subseteq [0, 1]^d$  tel que  $|I| \leq \Delta$ , il existe une constante  $m(I)$  telle que, pour tout  $m \geq m(I)$ ,

$$M_m(I) := \#\{I_{m,k} \subseteq I : 1 \leq k \leq M_m\} \leq \delta |I|^c M_m, \quad (3.3.4)$$

alors, on a  $s^c - \text{mes}(A) > 0$ .

*Démonstration.* Voir le lemme 3.5 de Deheuvels et Mason [41].  $\square$

Nous allons donc utiliser ce lemme en prenant pour  $A$  un sous-ensemble bien choisi de  $S(\Theta_\varphi)$  et  $c = d(1 - \lambda^2 - \eta)$  pour  $\eta > 0$  suffisamment petit. Ceci nous permettra de dire que

$$s^{d(1-\lambda^2-\eta)} - \text{mes}(S(\Theta_\varphi)) \geq s^{d(1-\lambda^2-\eta)} - \text{mes}(A) > 0.$$

En prenant  $\eta > 0$  arbitrairement petit, on complète ainsi la démonstration de (3.3.1). Nous allons voir dans la suite comment construire l'ensemble  $A$ . Tout d'abord, nous allons introduire quelques notations nécessaires au déroulement de la démonstration. Soit  $\{h_k : k \geq 1\}$  une suite de constantes telle que

(H1)  $h_k \rightarrow 0$ ,  $kh_k^d \rightarrow \infty$  et  $0 < h_k < 1$ ,

(H9) Pour tout  $0 < c < 1$  et pour tout  $k$  suffisamment grand,

$$\sum_{k \geq 1} h_k^{-1} \exp\{-h_k^{-c}/2\} \text{ est une série convergente.}$$

Pour tout  $k \geq 1$  on pose  $m_k = \lfloor h_k^{-1} \rfloor$  et  $t_k(\mathbf{i}) = (i_1 h_k, \dots, i_d h_k)$ . On définit également pour tout  $\varepsilon > 0$

$$W_{k,\varphi}(\varepsilon) = \left\{ \left( t_k(i_1), \dots, t_k(i_d) \right) : 1 \leq i_1, \dots, i_d \leq m_k, \right. \\ \left. \|\Theta_{h_k, t_k(\mathbf{i})} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon \right\}, \quad (3.3.5)$$

et

$$U_{k,\varphi}(\varepsilon) = \left\{ \mathbf{t} \in [0, 1]^d : \|\Theta_{h_k, \mathbf{t}} - \Theta_\varphi\| < \varepsilon \right\} \quad (3.3.6)$$

Nous définissons le  $\varepsilon$ -voisinage d'une partie mesurable  $V \subseteq [0, 1]^d$ , pour  $\varepsilon > 0$ , par

$$\mathbb{N}(\varepsilon, V) = \bigcup_{\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_d) \in V} \prod_{r=1}^d (x_r - \varepsilon, x_r + \varepsilon). \quad (3.3.7)$$

Nous montrons le lemme suivant, où la fonction  $\varphi$  est définie au lemme 3.2.1. C'est un résultat primordial dans la démonstration, car il nous permet de travailler uniquement sur les points de la grille, mais d'obtenir des résultats sur tous les points de  $[0, 1]^d$  si le pas de la grille est suffisamment petit.

**Lemme 3.3.2.** *Pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$  et  $\theta = \theta(\varepsilon) < 1$  tel que  $\psi(d\theta) \leq \varepsilon$ , il existe presque sûrement un  $k_0(\varepsilon, \vartheta)$  tel que, pour tout  $k \geq k_0(\varepsilon, \vartheta)$ ,*

$$\mathbb{N}(\theta h_k^{1/d}, W_{k,\varphi}(\varepsilon)) \subseteq U_{k,\varphi}(2\varepsilon). \quad (3.3.8)$$

*Démonstration.* Soit  $t_k(\mathbf{i}) = (t_k(i_1), \dots, t_k(i_d)) \in W_{k,\varphi}(\varepsilon)$  et  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d) \in [0, 1]^d$  tel que, pour tout  $1 \leq r \leq d$ , on ait  $|t_k(i_r) - t_r| < \theta h_k^{1/d}$ . L'inégalité triangulaire implique que

$$\|\Theta_{h_k, \mathbf{t}} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} \leq \|\Theta_{h_k, \mathbf{t}} - \Theta_{h_k, t_k(\mathbf{i})}\|_{\mathcal{F}} + \|\Theta_{h_k, t_k(\mathbf{i})} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}}.$$

En utilisant le lemme 3.2.2 et le lemme 3.2.1, nous pouvons affirmer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k_0(\varepsilon)$  tel que, pour tout  $k \geq k_0(\varepsilon)$

$$\|\Theta_{h_k, \mathbf{t}} - \Theta_{h_k, t_k(\mathbf{i})}\|_{\mathcal{F}} \leq \psi(d\theta).$$

Ainsi,

$$\|\Theta_{h_k, \mathbf{t}} - \Theta_{h_k, t_k(\mathbf{i})}\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon.$$

Donc,

$$\|\Theta_{h_k, \mathbf{t}} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} \leq 2\varepsilon.$$

La conclusion du lemme est ainsi immédiate. □

Pour la suite, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on pose  $\theta = \theta(\varepsilon)$  comme dans le Lemme 3.3.2 et  $k_0(\varepsilon) = k_0(\varepsilon, \theta(\varepsilon))$ . Pour toute partie mesurable  $E \subseteq [0, 1]^d$ , posons

$$m_k(E) = \#\left\{ (i_1, \dots, i_d) : 0 \leq i_1, \dots, i_d \leq m_k, \prod_{r=1}^d [t_k(i_r), t_k(i_r + 1)] \subseteq E \right\}, \quad (3.3.9)$$

ainsi que, compte tenu de (3.1.21)

$$N_{k,\varphi}(\varepsilon) = \#\left\{(i_1, \dots, i_d) : 1 \leq i_1, \dots, i_d \leq m_k, \|\Theta_{h_k, t_k(\mathbf{i})} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} \leq \varepsilon\right\}. \quad (3.3.10)$$

Posons de même, pour toute partie mesurable  $E \subseteq [0, 1]^d$ ,

$$N_{k,\varphi}(\varepsilon; E) = \#\left\{(i_1, \dots, i_d) : 1 \leq i_1, \dots, i_d \leq m_k; (t_k(i_1), \dots, t_k(i_d)) \in E, \|\Theta_{h_k, t_k(\mathbf{i})} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon\right\}. \quad (3.3.11)$$

Enfin, pour tout  $0 \leq i_1, \dots, i_d \leq m_k$ , posons

$$X_{i_1, \dots, i_d} = \mathbb{1}\{\|\Theta_{h_k, t_k(\mathbf{i})} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon\}. \quad (3.3.12)$$

On observera que les  $X_i$  sont indépendants et identiquement distribués et suivent une loi de Bernouilli, la probabilité de succès étant donnée par

$$p_k(\varepsilon) := P(X_{\mathbf{0}} = 1) = P(\|\Theta_{h_k, \mathbf{0}} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon), \quad (3.3.13)$$

où  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ . Les trois lemmes qui suivent (lemme 3.3.3, lemme 3.3.4 et lemme 3.3.5) sont des résultats qui nous permettent de mieux appréhender et évaluer les quantités que nous venons d'introduire.

**Lemme 3.3.3.** *Pour tout  $\delta \in (0, \lambda^2)$ , il existe des constantes  $0 < \delta' < \delta$ ,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$  et un entier  $k_1(\varepsilon, \delta) \geq 1$  tels qu'on ait, pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  et tout  $k \geq k_1(\varepsilon, \delta)$ ,*

$$p_k(\varepsilon) \geq h_k^{\lambda^2 - \delta'} \geq h_k^{\lambda^2}. \quad (3.3.14)$$

*Démonstration.* On note

$$N_\varepsilon(\Theta_\varphi) = \{\Xi \in l_\infty(\mathcal{F}) : \|\Xi(f) - \Theta_\varphi(f)\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon\}. \quad (3.3.15)$$

Rappelons la définition de  $\Theta_{h_k, t_k(\mathbf{i})}$  (3.1.21) ainsi que celle de  $p_k(\varepsilon)$  (3.3.13). On constate que

$$p_k(\varepsilon) = P\left(\Theta_{h_k, t_k(\mathbf{i})} \in N_\varepsilon(\Theta_\varphi)\right).$$

En posant  $G = N_\varepsilon(\Theta_\varphi)$ , on remarque que  $G$  est un ouvert de  $l_\infty(\mathcal{F})$ . On peut appliquer la PROPOSITION 1 (ii) en prenant  $\varepsilon_k = (2 \log h_k^{-1})^{-1}$ . On trouve alors que pour  $k$  suffisamment grand,

$$p_k(\varepsilon) \geq \exp\{-\varepsilon_k^{-1} I(N_\varepsilon(\Theta_\varphi))\} \geq \exp\{-2 \log(h_k^{-1}) I(N_\varepsilon(\Theta_\varphi))\}.$$

Or,  $I(N_\varepsilon(\Theta_\varphi)) < I(\Theta_\varphi) = \lambda^2/2$ . Donc, pour tout  $\delta > 0$  fixé, il existe un  $\varepsilon_0(\delta) > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0(\delta)]$ ,  $\lambda^2 - \delta < 2I(N_\varepsilon(\Theta_\varphi)) < \lambda^2$ . On obtient donc (3.3.14) en choisissant  $\delta' \in (0, \lambda^2 - I(N_\varepsilon(\Theta_\varphi)))$ .  $\square$

Soit  $E$  une union de pavés d'intérieurs disjoints de volume supérieur à  $S \geq 3^d h_k$ . Alors le résultat suivant est vérifié (on note  $\text{vol}(E)$  la mesure de Lebesgue de  $E$ ) :

**Lemme 3.3.4.** *Pour tout  $k \geq 1$ ,*

$$\frac{\text{vol}(E)}{3^d h_k} \leq \left(1 - \frac{2h_k^{1/d}}{S^{1/d}}\right)^d \frac{\text{vol}(E)}{h_k} \leq m_k(E) \leq \frac{\text{vol}(E)}{h_k}. \quad (3.3.16)$$

*Démonstration.* Puisque  $m_k(\cdot)$  est une fonction additive, il suffit de montrer le résultat lorsque  $E$  est un pavé de  $[0, 1]^d$ . La partie droite de (3.3.16) est évidente puisque  $m_k(E)h_k \leq \text{vol}(E)$ . D'un autre côté, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} h_k m_k(E) &\geq (\text{vol}(E)^{1/d} - 2h_k^{1/d})^d \geq \text{vol}(E) \left(1 - \frac{2h_k^{1/d}}{\text{vol}(E)^{1/d}}\right)^d \\ &\geq \text{vol}(E) \left(1 - \frac{2h_k^{1/d}}{S^{1/d}}\right)^d \geq \frac{\text{vol}(E)}{3^d}. \end{aligned}$$

On retrouve bien (3.3.16)  $\square$

**Lemme 3.3.5.** *Soit  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  où  $\varepsilon_0$  est défini dans le Lemme 3.3.3 et soit  $\delta \in (0, 1 - \lambda^2)$  fixé. Pour tout  $\sigma \in (0, 1)$  il existe presque sûrement un entier  $k_2(\varepsilon, \sigma, \delta) \geq 1$  tel qu'on ait, pour tout  $k \geq k_2(\varepsilon, \sigma, \delta)$ ,*

$$|N_{k,\varphi}(\varepsilon, E) - m_k(E)p_k(\varepsilon)| < \sigma m_k(E)p_k(\varepsilon), \quad (3.3.17)$$

pour tout  $E$ , où  $E$  est une union disjointe de pavés de mesure de Lebesgue  $\text{vol}(E)$  supérieure à  $h_k^{1-\lambda^2-\delta}$

*Démonstration.* Puisque  $N_{k,\varphi}(\varepsilon, \cdot)$  et  $m_k(\cdot)$  sont des fonctions additives, il suffit de montrer (3.3.17) lorsque  $E = I$  est un pavé de  $[0, 1]^d$  de volume  $\text{vol}(I) \geq h_k^{1-\lambda^2-\delta}$ .

On fixe  $\sigma'$  et  $\delta'$  tel que  $0 < \sigma' < \sigma$  et  $0 < \delta' < \delta$ . On va montrer qu'il suffit de prouver le lemme lorsque  $E = J$  est un pavé de la forme

$$\prod_{r=1}^d [t_k(i_r), t_k(i_r + \ell(k))],$$

défini pour  $0 \leq i_1, \dots, i_d \leq 2m_k$  et avec  $\ell(k) := \lfloor h_k^{-(\lambda^2+\delta')/d} \rfloor$ . Pour vérifier cela, supposons que (3.3.17) soit vrai pour  $E = J$ ,  $\sigma = \sigma'$  et  $\delta = \delta'$ . Soit  $K(k) := \lfloor h_k^{\delta'-\delta} \rfloor$ . Par (H1), on peut choisir  $k(\delta, \sigma) < \infty$  tel qu'on ait, pour tout  $k \geq k(\delta, \sigma)$ ,

$$3 \leq K(k), \tag{3.3.18}$$

$$3^d h_k < h_k^{1-\lambda^2-\delta}, \tag{3.3.19}$$

$$(1 + \sigma') \left\{ \frac{1 + 4/(K(k) - 2)}{1 - 2h_k^{(\lambda^2+\delta)/d}} \right\}^d \leq (1 + \sigma), \tag{3.3.20}$$

et

$$1 - \sigma \leq (1 - \sigma') \left\{ \frac{1 - 2h_k^{(\lambda^2+\delta')/d}}{1 + 4/(K(k) - 2)} \right\}^d. \tag{3.3.21}$$

Pour tout  $k \geq 1$ , on a

$$K := K(I, k) = \left\lfloor \frac{\text{vol}(I)^{1/d}}{h_k^{(1-\lambda^2-\delta)/d}} \right\rfloor.$$

On remarque que  $K \geq K(k) \rightarrow \infty$ . Pour  $k \geq k(\delta, \sigma)$ , il existe  $(K + 2)^d$  intervalles disjoints  $J_1, \dots, J_{(K+2)^d}$  de la forme  $\prod_{r=1}^d [t_k(i_r), t_k(i_r + \ell(k))]$  tels que

$$\bigcup_{\ell=1}^{(K-2)^d} J_\ell \subseteq I \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{(K+2)^d} J_\ell.$$

Étant donnée la forme des intervalles  $J_\ell$ , on voit que  $\text{vol}(J_\ell) \sim h_k^{1-\lambda^2-\delta'}$ . De plus, on a les inégalités suivantes :

$$(K - 2)^d \text{vol}(J_1) \leq \text{vol}(I) \leq (K + 2)^d \text{vol}(J_1).$$

Ainsi, en appliquant les Lemmes 3.3.4 et 3.3.5 pour  $E = J_\ell$ , on en déduit que, pour tout  $k$  suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned}
 N_{k,\varphi}(\varepsilon, I) &\leq \sum_{\ell=1}^{(K+2)^d} N_{k,\varphi}(\varepsilon, J_\ell) \leq (1 + \sigma') \left\{ \sum_{\ell=1}^{(K+2)^d} m_k(J_\ell) \right\} p_k(\varepsilon) \\
 &\leq (K + 2)^d (1 + \sigma') \text{vol}(J_1) h_k^{-1} p_k(\varepsilon) \\
 &\leq \frac{(K + 2)^d}{(K - 2)^d} (1 + \sigma') \text{vol}(I) h_k^{-1} p_k(\varepsilon) \\
 &\leq (1 + \sigma') \left\{ \frac{1 + \frac{4}{K-2}}{1 - 2h_k^{(\lambda^2+\delta)/d}} \right\}^d m_k(I) p_k(\varepsilon) \\
 &\leq (1 + \sigma) m_k(I) p_k(\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

Un argument similaire montre que

$$\begin{aligned}
 N_{k,\varphi}(\varepsilon, I) &\geq \sum_{\ell=1}^{(K-2)^d} N_{k,\varphi}(\varepsilon, J_\ell) \geq (K - 2)^d N_{k,\varphi}(\varepsilon, J_1) \\
 &\geq (K - 2)^d (1 - \sigma') m_k(J_1) p_k(\varepsilon) \\
 &\geq (K - 2)^d (1 - \sigma') \frac{\text{vol}(J_1)}{h_k} (1 - 2h_k^{(\Lambda_1^2+\delta')/d})^d p_k(\varepsilon) \\
 &\geq \frac{(K - 2)^d}{(K + 2)^d} (1 - \sigma') \frac{\text{vol}(I)}{h_k} (1 - 2h_k^{(\Lambda_1^2+\delta')/d})^d p_k(\varepsilon) \\
 &\geq (1 - \sigma') \left\{ \frac{1 - 2h_k^{(\lambda^2+\delta')/d}}{1 + \frac{4}{K-2}} \right\}^d m_k(I) p_k(\varepsilon) \\
 &\geq (1 - \sigma) m_k(I) p_k(\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

Ainsi, on a donc vu qu'il suffit de montrer le lemme lorsque  $E$  est un pavé  $J$  de la forme

$$J = \prod_{r=1}^d [t_k(i_r), t_k(i_r + \ell(k))] \text{ avec } 0 \leq i_r \leq 2m_k \text{ et } 1 \leq r \leq d. \tag{3.3.24}$$

On note que le nombre total de pavés de cette forme est inférieur à  $h_k^{-1}$ . Pour tout  $k \geq 1$  soit  $Q_k = P(N_{k,\varphi}(\varepsilon, J) > r_{k,1})$  où  $r_{k,1} = (1 + \sigma') m_k(J) p_k(\varepsilon)$ . On va alors utiliser le résultat suivant démontré par Deheuvels et Mason [41]

RÉSULTAT 3. Soit  $S_N$  une variable suivant une loi binomiale de paramètres  $N$  et  $p$ . Alors, pour tout  $r \in [1, \infty]$ ,

$$\mathbb{P}(S_N \geq Nrp) \leq \exp(-Nph(r)), \quad (3.3.25)$$

et pour tout  $r \in [0, 1]$ ,

$$\mathbb{P}(S_N \leq Nrp) \leq \exp(-Nph(r)), \quad (3.3.26)$$

où  $h$  est la fonction de Chernoff associée au processus de Poisson standard. Celle-ci est définie par

$$h(r) = \begin{cases} r \log r - r + 1 & \text{pour } r > 0, \\ 1 & \text{pour } r = 0, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On applique ce résultat pour  $S_N = N_{k,\varphi}(\varepsilon, J)$ ,  $p = p_k(\varepsilon)$ ,  $N = m_k(J)$  et  $r = 1 + \sigma'$ . On obtient alors, pour  $k$  suffisamment grand

$$Q_k \leq \exp\{-m_k(J)p_k(\varepsilon)h(1 + \sigma')\}.$$

De plus, pour  $k$  suffisamment grand, on a

$$m_k(J) \geq \left[ \frac{\text{vol}(J)^{1/d}}{h_k^{1/d}} - 2 \right]^d \geq \frac{1}{2^d} h_k^{-\lambda^2 - \delta'}.$$

Ainsi, en appliquant le Lemme 3.3.3, on constate que pour  $k$  suffisamment grand,

$$h_k^{-1} Q_k \leq h_k^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} h_k^{-\delta'} h(1 + \sigma')\right\}.$$

(H9) permet d'affirmer que  $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^{-1} Q_k < \infty$ . Donc, en appliquant le lemme de Borel-Cantelli on trouve qu'on a presque sûrement, pour tout  $k$  suffisamment grand,

$$N_{k,\varphi}(\varepsilon, J) \leq (1 + \sigma') m_k(J) p_k(\varepsilon).$$

De la même manière, on définit  $R_k = P(N_{k,\varphi}(\varepsilon, J) < r_{k,2})$  où  $r_{k,2} = (1 - \sigma') m_k(J) p_k(\varepsilon)$ . Par un raisonnement analogue on montre qu'on a presque sûrement, pour tout  $k$  suffisamment grand,

$$N_{k,\varphi}(\varepsilon, J) \geq (1 - \sigma') m_k(J) p_k(\varepsilon).$$

On a donc bien montré que (3.3.17) est vérifié pour les  $E$  de la forme  $E = J$  où  $J$  est un pavé de la forme (3.3.24). Ceci permet de conclure la démonstration du Lemme 3.3.5.  $\square$

REMARQUE 11. Notons ici que dans le lemme 3.3.5, le choix de  $k_2(\varepsilon, \sigma, \delta)$  se fait indépendamment de  $E$ . En effet,  $k_2$  ne dépendra pas de  $E$ , seulement du volume de  $E$ , mais la condition du lemme  $\text{vol}(E) > h_k^{1-\lambda^2-\delta}$  supprime la dépendance.

On va montrer à présent qu'il existe une suite d'ensembles  $E_1, E_2, \dots$  satisfaisant les conditions du Lemme 3.3.1 et telle que  $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m \subseteq S(\Theta_\varphi)$ . Le raisonnement se déroule en trois étapes. Dans l'ÉTAPE 1, on établit l'existence d'une telle suite, par un argument de récurrence. Dans l'ÉTAPE 2, on montre que  $\{E_m : m \geq 1\}$  satisfait (3.3.4). Enfin, l'ÉTAPE 3, on applique le lemme 3.3.1 pour montrer (3.3.1).

ÉTAPE 1 : EXISTENCE DE  $E_m$ . Dans un premier temps, nous introduirons plusieurs suites que nous utiliserons dans la construction de  $E_m$ . Nous choisissons donc deux suites de constantes non-négatives  $\{\sigma_m : m \geq 1\}$  et  $\{\delta_m : m \geq 1\}$  telles que

- (1i)  $0 < \sigma_m < 1/2$ , pour tout  $m \geq 1$ ,
- (1ii)  $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + \sigma_i)/(1 - \sigma_i) \leq 2$ ,
- (1iii)  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_m \geq 0$ , pour tout  $m \geq 1$ ,
- (1iv)  $\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \leq \eta/3 < \frac{1}{6} \min(\lambda^2, 1 - \lambda^2)$ .

Soit  $\Delta_m = \sum_{k=1}^m \delta_k$ . On remarque que pour tout  $m \geq 1$ ,

$$\Delta_m < \frac{1}{6} \min(\lambda^2, 1 - \lambda^2),$$

et  $0 < \delta_m < \Delta_m < 1$ . De plus, on choisit deux suites décroissantes de constantes  $\{\varepsilon_m : m \geq 1\}$  et  $\{\theta_m : m \geq 1\}$  telles que

- (2i)  $\varepsilon_1 < 1$ ,  $\varepsilon_m \downarrow 0$ ,  $\varepsilon_m < \delta_m$ ,
- (2ii)  $\theta_m < (1/2)\varepsilon_m^2$ ,
- (2iii)  $d^{d/2}(1 + 2\theta_{m-1})^{d(1-\lambda^2-2\Delta_{m-1})} \leq \frac{1+\sigma_m}{1+1/2\sigma_m}$ ,
- (2iv)  $\theta_{m-1}^d/(1 - \theta_{m-1})^d \leq \sigma_m/2$ ,
- (2v)  $(1 - \theta_m)^{-d} \leq (1 + \sigma_m/(2(2^d - 1)))/(1 + (1/2)\sigma_m)$ .

REMARQUE 12. L'existence des suites  $\{\sigma_m : m \geq 1\}$  et  $\{\delta_m : m \geq 1\}$  est assurée en prenant des suites qui convergent suffisamment vite vers 0. Les autres conditions imposent une relation d'ordre sur trois des suites :

$$\theta_m \leq \varepsilon_m \leq \delta_m, \text{ pour tout } m \geq 1.$$

La relation avec la suite  $\{\sigma_m : m \geq 1\}$  est donnée par les conditions (2iii-iv-v), qui imposent que  $\sigma_m$  tende vers 0 moins vite que  $\theta_m$ . Ces quatre suites sont donc compatibles.

Pour la suite, on choisit  $k_2(\varepsilon_m, \sigma_m, \delta_m) \geq k_1(\varepsilon_m, \delta_m) \geq k_0(\varepsilon_m)$  définis dans les Lemmes 3.3.2, 3.3.3 et 3.3.5.

Les ensembles  $E_m$  sont construits par récurrence. C'est à dire qu'étant donnés  $E_{m-1}$  et  $\{M_{m-1}, k_{m-1}, E_{m-1}^*\}$ , on construit  $E_m$  et  $\{M_m, k_m, E_m^*\}$ . Les constantes  $M_{m-1}$ ,  $k_{m-1}$  et l'ensemble  $E_{m-1}^*$  sont définis ci-dessous.

Soit

$$k_0 = 1, \quad L_0 = 1, \quad M_0 = 1, \quad (3.3.27)$$

et pour  $m \geq 1$

$$L_m = \theta_m h_{k_m}^{1/d} \quad \text{et} \quad L_{m-1}^* = L_{m-1} - L_m. \quad (3.3.28)$$

On choisit  $k_m$  un entier positif tel que les conditions suivantes soient vérifiées

- (3i)  $k_m > \max\{k_{m-1}, k_2(\varepsilon_m, \sigma_m, \delta_m)\}$ ,
- (3ii)  $3^d L_m < 3^d h_{k_m}^{1/d} < h_{k_m}^{(1-\lambda^2-\delta_m)/d} < L_{m-1}^* < L_{m-1}$ ,
- (3iii)  $L_{m-1}^d / (L_{m-1}^*)^d \leq 1 + (1/2)\sigma_m$ ,
- (3iv)  $1 - \sigma_m \leq \left(1 - \frac{2h_{k_m}^{1/d}}{L_{m-1}^*}\right)^d$ ,
- (3v)  $2 \frac{h_{k_m}^{\delta_m}}{\lambda^{2+\delta_{m-1}}} \leq \theta_m^d$  pour  $m \geq 2$ ,
- (3vi)  $2(1 - 3^{-d})^{-d} h_{k_m}^{\delta_m} \leq \theta_m^d$ , pour  $m \geq 1$ ,
- (3vii)  $6h_{k_m}^{\delta_m} \leq \theta_m^d M_{m-1} (L_{m-1}^*)^d$ , pour  $m \geq 1$ .

En utilisant (H1), on peut bien choisir  $k_m$  tel qu'on ait (3i-3vii). Maintenant, pour tout  $m \geq 1$ , étant donnés  $k_m$  et  $\{M_{m-1}, k_{m-1}, E_{m-1}^*\}$ , on va définir les ensembles  $E_m$ ,  $E_m^*$  et l'entier positif  $M_m$ . On pose

$$E_m = \bigcup_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq m_{k_m} \\ (t_{k_m}(i_1), \dots, t_{k_m}(i_d)) \in W_{k_m, \varphi}(\varepsilon_m) \cap E_{m-1}^*}} \prod_{r=1}^d [t_{k_m}(i_r), t_{k_m}(i_r) + L_m], \quad (3.3.29)$$

avec  $E_0 = [0, 1]^d$

$$E_m^* = \bigcup_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq m_{k_m} \\ (t_{k_m}(i_1), \dots, t_{k_m}(i_d)) \in W_{k_m, \varphi}(\varepsilon_m) \cap E_{m-1}^*}} \prod_{r=1}^d [t_{k_m}(i_r), t_{k_m}(i_r) + L_m^*], \quad (3.3.30)$$

avec  $E_0 = [0, L_0^*]^d$ . En se rappelant de (3.3.11), on pose  $M_0 = 1$  et, pour tout  $m \geq 1$ ,

$$M_m := N_{k_m, \varphi}(\varepsilon_m, E_{m-1}^*) = \#\{(i_1, \dots, i_d) : i_1, \dots, i_d = 1, \dots, m_{k_m}, \\ (t_{k_m}(i_1), \dots, t_{k_m}(i_d)) \in W_{k_m, \varphi}(\varepsilon_m) \cap E_{m-1}^*\}. \quad (3.3.31)$$

Il est alors évident que pour tout  $m \geq 0$ ,  $E_m$  (resp.  $E_m^*$ ) est une union de  $M_m$  pavés de longueur  $L_m$  (resp.  $L_m^*$ ) qui seront notés  $I_{m, \ell}$  (resp.  $I_{m, \ell}^*$ ) pour  $\ell = 1, \dots, M_m$ . De plus, ces pavés sont disjoints puisqu'on a bien  $t_{k_m}(i_r) + L_m < t_{k_m}(i_r + 1)$  et  $t_{k_m}(i_r) + L_m^* < t_{k_m}(i_r + 1)$  par (3ii). On peut donc noter

$$E_m = \bigcup_{\ell=1}^{M_m} I_{m, \ell} \quad \text{et} \quad E_m^* = \bigcup_{\ell=1}^{M_m} I_{m, \ell}^*. \quad (3.3.32)$$

Cette construction montre que

$$E_m \subseteq E_{m-1} \quad \text{et} \quad E_m^* \subseteq E_{m-1}^*. \quad (3.3.33)$$

Ainsi, pour le procédé de récurrence, il ne reste plus qu'à vérifier que  $M_m \geq 1$  pour tout  $m \geq 1$ . Pour cela, on va utiliser le lemme suivant.

**Lemme 3.3.6.** *On a  $M_0(L_0^*)^d \geq (1 - 3^{-d})^d$ . De plus, si  $M_{m-1} \geq 1$  pour  $m \geq 1$ , alors*

$$M_m(L_m^*)^d \geq h_{k_m}^{\lambda^2 + \delta_m}. \quad (3.3.34)$$

*Démonstration.* (3.3.27) et (3ii) impliquent conjointement que

$$M_0(L_0^*)^d = (L_0^*)^d = (L_0 - L_1)^d \geq (L_0 - 3^{-d}L_0^*)^d \geq (1 - 3^{-d})^d.$$

Supposons que  $\{M_k, h_k, E_k, E_k^*\}$  soient définis pour tout  $k \in \{0, \dots, m-1\}$  et supposons que  $M_{m-1} \geq 1$ . On va appliquer le Lemme 3.3.5 pour  $\delta = \delta_m$ ,  $\sigma = \sigma_m$  et  $E = E_{m-1}^*$ .  $\text{vol}(E_{m-1}^*) = M_{m-1}(L_{m-1}^*)^d \geq (L_{m-1}^*)^d \geq h_{k_m}^{1 - \lambda^2 - \delta_m}$  en utilisant (3ii). En se rappelant de (3.3.31), on obtient par application du lemme :

$$1 - \sigma_m \leq \frac{M_m}{m_{k_m}(E_{m-1}^*)p_{k_m}(\varepsilon)} \leq 1 + \sigma_m. \quad (3.3.35)$$

On peut aussi appliquer le Lemme 3.3.4 avec  $k = k_m$  et  $S = (L_{m-1}^*)^d$ , pour obtenir que

$$\left(1 - \frac{2h_{k_m}^{1/d}}{L_{m-1}^*}\right)^d \frac{\text{vol}(E_{m-1}^*)}{h_{k_m}} \leq m_{k_m}(E_{m-1}^*) \leq \frac{\text{vol}(E_{m-1}^*)}{h_{k_m}}. \quad (3.3.36)$$

Grace à (3iv), on voit alors que

$$(1 - \sigma_m)h_{k_m}^{-1} \leq \frac{m_{k_m}(E_{m-1}^*)}{M_{m-1}(L_{m-1}^*)^d} \leq h_{k_m}^{-1}. \quad (3.3.37)$$

En utilisant le Lemme 3.3.3, pour  $k = k_m$ ,  $\delta' = \delta_m$  et  $\varepsilon = \varepsilon_m$ , on trouve

$$h_{k_m}^{\lambda^2 - \delta_m} \leq p_{k_m}(\varepsilon_m). \quad (3.3.38)$$

Grâce à (3.3.35) et (3.3.37), on obtient les inégalités

$$\begin{aligned} (1 - \sigma_m)^2 h_{k_m}^{-1 + \lambda^2} &\leq (1 - \sigma_m)^2 h_{k_m}^{-1} p_{k_m}(\varepsilon_m) \\ &\leq \frac{M_m}{m_{k_m}(E_{m-1}^*) p_{k_m}(\varepsilon_m)} \frac{m_{k_m}(E_{m-1}^*)}{M_{m-1}(L_{m-1}^*)^d} p_{k_m}(\varepsilon_m) \\ &\leq \frac{M_m}{M_{m-1}(L_{m-1}^*)^d}. \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

Par (1i), on note que pour tout  $m \geq 1$ , on a les inégalités  $1/2 \leq 1 - \sigma_{m+1}$  et  $1 + \sigma_{m+1} \leq 3/2$ . On obtient alors que

$$1/6 \leq (1 - \sigma_m)^2 \frac{1}{1 + \sigma_{m+1}}. \quad (3.3.40)$$

À l'aide des dernières inégalités et de (3iii), on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \theta_m^d M_{m-1}(L_{m-1}^*)^d h_{k_m}^{\lambda^2} &\leq \frac{(1 - \sigma_m)^2}{(1 + \sigma_{m+1})} M_{m-1}(L_{m-1}^*)^d h_{k_m}^{-1 + \lambda^2} h_{k_m} \theta_m^d \\ &\leq M_m \frac{1}{1 + \sigma_{m+1}} L_m^d \leq M_m (L_m^*)^d. \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

En utilisant (3vii), on trouve alors

$$M_m (L_m^*)^d \geq h_{k_m}^{\lambda^2 + \delta_m}. \quad (3.3.42)$$

Cela achève donc la démonstration du Lemme 3.3.6.  $\square$

Ainsi, à l'aide du Lemme 3.3.6, nous sommes donc en mesure de montrer que  $M_m \geq 1$  pour tout  $m \geq 1$ . En effet, avec (1iv), on voit facilement que  $\lambda^2 - 1 + \delta_m \leq -2/3(1 - \lambda^2)$ . D'autre part, avec (2ii),  $\theta_m < (1/2)\varepsilon_m^2 < 1/2$ . Ainsi,  $L_m^* < L_m < h_{k_m}^{1/d}/2$ . On utilise le

Lemme 3.3.3 pour voir que  $M_m \geq 2^d h_{k_m}^{-1+\lambda^2+\delta_m} \geq 2^d h_{k_m}^{-2(1-\lambda^2)/3}$ . Ainsi, cette inégalité combinée avec (H1) et  $h_{k_m} < 1$  implique que  $M_m \geq 2^d \geq 1$ .

Cette dernière propriété établit l'existence de  $\{M_m, k_m, E_m, E_m^*\}$ , pour tout  $m \geq 0$ .

ÉTAPE 2 : PROPRIÉTÉS DE  $E_m$ . Dans cette étape, on prouve l'existence de constantes  $c$ ,  $d$  et  $\Delta$  telles que l'inégalité (3.3.4) du Lemme 3.3.1 est vérifiée pour tout pavé  $I \subseteq [0, 1]^d$  avec  $|I| \leq \Delta$ . L'ÉTAPE 2 est la plus longue, car nous devons nous ramener à plusieurs situations possibles pour  $I$ . On voit, en se rappelant de (3.3.4) et (3.3.11), que pour tout pavé  $I \subseteq [0, 1]^d$  et tout  $m \geq 1$

$$M_m(I) \leq N_{k_m, \varphi}(\varepsilon_m, I). \quad (3.3.43)$$

Nous sommes alors amenés à considérer différents cas.

**Cas 1** Pour  $m \geq 1$ ,  $I \subseteq I_{m-1, \ell_0}$ , pour  $\ell_0 \in \{1, \dots, M_{m-1}\}$ ,

**Cas 2** Pour  $m \geq 1$ ,  $I \cap I_{m-1, \ell_0} \neq \emptyset$ , pour  $\ell_0 \in \{1, \dots, M_{m-1}\}$ ,

**Cas 3** Pour  $m \geq 1$ ,  $I \cap I_{m-1, \ell} = \emptyset$ ,  $\forall \ell \in \{1, \dots, M_{m-1}\}$ .

**Cas 1.** Pour tout  $m \geq 1$ , on suppose que  $I \subseteq I_{m-1, \ell_0}$  où  $\ell_0 \in \{1, \dots, M_{m-1}\}$ . Il faut alors considérer 3 possibilités.

*Possibilité 1a.* On suppose que  $\text{vol}(I) \geq h_{k_m}^{1-\lambda-\delta_m}$  (Cela est possible par (3ii)). On applique le Lemme 3.3.5, avec  $\delta = \delta_m$ ,  $\sigma = \sigma_m$ ,  $E = I$  et  $k = k_m$ . En combinant ceci avec (3.3.43), on obtient alors que

$$M_m(I) \leq (1 + \sigma_m) h_{k_m}^{-1} \text{vol}(I) p_{k_m}(\varepsilon_m). \quad (3.3.44)$$

Lorsque  $m \geq 2$ , on obtient que

$$\text{vol}(I) \leq \text{vol}(I_{m-1, k_0}) = L_{m-1}^d = \theta_{m-1}^d h_{k_{m-1}} \leq h_{k_{m-1}}.$$

Donc, en utilisant le Lemme 3.3.6, on obtient les inégalités

$$M_{m-1}(L_{m-1}^*)^d \geq h_{k_{m-1}}^{\lambda^2+\delta_{m-1}} \geq \text{vol}(I)^{\lambda^2+\delta_{m-1}}.$$

Ensuite, à l'aide de (3.3.38) et (3.3.39), on trouve que

$$\begin{aligned}
 \frac{M_m(I)}{M_m} &= \frac{M_{m-1}(L_{m-1}^*)^d}{M_m} M_m(I) \frac{1}{M_{m-1}(L_{m-1}^*)^d} \\
 &\leq \frac{1}{(1 - \sigma_m^2) h_{k_m}^{-1} p_{k_m}(\varepsilon_m)} (1 + \sigma_m) h_{k_m}^{-1} \text{vol}(I) p_{k_m}(\varepsilon_m) \frac{1}{M_{m-1}(L_{m-1}^*)^d} \\
 &\leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} \text{vol}(I) \frac{1}{M_{m-1}(L_{m-1}^*)^d} \\
 &\leq \frac{(1 + \sigma_m)}{(1 - \sigma_m)^2} \text{vol}(I)^{1 - \lambda^2 - \delta_{m-1}} \leq \frac{(1 + \sigma_m)}{(1 - \sigma_m)^2} d^{-d/2(1 - \lambda^2 - \delta_{m-1})} |I|^{d - d\lambda^2 - d\delta_{m-1}}.
 \end{aligned} \tag{3.3.45}$$

Quand  $m = 1$ , on sait que  $M_0(L_0^*)^d \geq (1 - 3^{-d})^d$ , donc, en utilisant les inégalités précédentes, on obtient que

$$\begin{aligned}
 \frac{M_1(I)}{M_1} &\leq (1 - 3^{-d})^{-d} \frac{1 + \sigma_1}{(1 - \sigma_1)^2} \text{vol}(I) \\
 &\leq (1 - 3^{-d})^{-d} \frac{1 + \sigma_1}{(1 - \sigma_1)^2} d^{-d/2} |I|^d \leq (1 - 3^{-d})^{-d} \frac{1 + \sigma_1}{(1 - \sigma_1)^2} d^{-d/2} |I|^{d(1 - \lambda^2)}.
 \end{aligned}$$

*Possibilité 1b.* On considère la situation où

$$(\theta_m h_{k_m}^{1/d})^d / 2 \leq \text{vol}(I) \leq h_{k_m}^{1 - \lambda^2 - \delta_m}.$$

Dans ce cas, il est toujours possible de trouver un pavé  $I'$  tel que  $I \subseteq I' \subseteq [0, 1]^d$  avec  $\text{vol}(I') = h_{k_m}^{1 - \lambda^2 - \delta_m}$ . Il est alors facile de voir que  $h_{k_m} \leq \theta_m^{-1} (2\text{vol}(I))^{1/d}$  et donc que

$$h_{k_m}^{1 - \lambda^2 - 2\delta_m} \leq 2\theta_m^{-d} \text{vol}(I)^{1 - \lambda^2 - 2\delta_m}. \tag{3.3.46}$$

Pour tout  $m \geq 2$ , on applique (3.3.45) en remplaçant  $I$  par  $I'$ . En combinant ceci avec

l'inégalité précédente et (3v), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \frac{M_m(I)}{M_m} &\leq \frac{M_m(I')}{M_m} \leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} \text{vol}(I') h_{k_{m-1}}^{-\lambda^2 - \delta_{m-1}} \\
 &\leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} h_{k_m}^{1 - \lambda^2 - \delta_m} h_{k_{m-1}}^{-\lambda^2 - \delta_{m-1}} \\
 &\leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} h_{k_m}^{1 - \lambda^2 - 2\delta_m} \frac{h_{k_m}^{\delta_m}}{h_{k_{m-1}}^{\lambda^2 + \delta_{m-1}}} \\
 &\leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} \text{vol}(I)^{1 - \lambda^2 - 2\delta_m} 2\theta_m^{-d} \frac{h_{k_m}^{\delta_m}}{h_{k_{m-1}}^{\lambda^2 + \delta_{m-1}}} \\
 &\leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} \text{vol}(I)^{1 - \lambda^2 - 2\delta_m} \\
 &\leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} d^{-d/2(1 - \lambda^2 - 2\delta_m)} |I|^{d - d\lambda^2 - 2d\delta_m}. \tag{3.3.47}
 \end{aligned}$$

Pour  $m = 1$ , on applique le même résultat que dans le cas précédent en remplaçant  $I$  par  $I'$ . En utilisant (3vi), on obtient donc que

$$\begin{aligned}
 \frac{M_1(I)}{M_1} &\leq (1 - 3^{-d})^{-d} \frac{1 + \sigma_1}{(1 - \sigma_1)^2} \text{vol}(I') \\
 &\leq (1 - 3^{-d})^{-d} \frac{1 + \sigma_1}{(1 - \sigma_1)^2} h_{k_1}^{1 - \lambda^2 - \delta_1} \\
 &\leq (1 - 3^{-d})^{-d} \frac{1 + \sigma_1}{(1 - \sigma_1)^2} 2\theta_1^{-d} \text{vol}(I)^{1 - \lambda^2 - 2\delta_1} h_{k_1}^{\delta_1} \\
 &\leq \frac{1 + \sigma_1}{(1 - \sigma_1)^2} d^{-d/2(1 - \lambda^2 - 2\delta_1)} |I|^{d - d\lambda^2 - 2d\delta_1}. \tag{3.3.48}
 \end{aligned}$$

*Possibilité 1c.* Enfin, on suppose que  $\text{vol}(I) < (\theta_m h_{k_m}^{1/d})^d / 2$ . En rappelant que, pour tout  $\ell = 1, \dots, M_m$ , on a  $\text{vol}(I_{m,\ell}) = (\theta_m h_{k_m}^{1/d})^d$ . Donc, pour tout  $m \geq 1$ ,

$$\frac{M_m(I)}{M_m} = 0. \tag{3.3.49}$$

Ainsi, en comparant les résultats obtenus pour toutes les possibilités du cas 1, on conclut que pour tout  $I \subseteq [0, 1]^d$  vérifiant  $I \subseteq I_{m-1, \ell_0}$ , pour  $\ell_0 \in \{1, \dots, M_{m-1}\}$ , on a les inégalités :

$$\frac{M_1(I)}{M_1} \leq \frac{1 + \sigma_1}{(1 - \sigma_1)^2} d^{-d/2(1-\lambda^2-2\delta_1)} |I|^{d-d\lambda^2-2d\delta_1}, \quad (3.3.50)$$

$$\frac{M_m(I)}{M_m} \leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} d^{-d/2(1-\lambda^2-2\delta_m)} |I|^{d-d\lambda^2-2d\delta_m} \quad \text{pour } m \geq 2. \quad (3.3.51)$$

**Cas 2.** On est dans le cas où  $I$  n'est pas nécessairement un sous ensemble d'un  $I_{m-1, \ell_0}$ .

*Possibilité 2a.* Supposons que  $\ell_0 \in \{1, \dots, M_{m-1}\}$  soit l'unique entier vérifiant

$$I \cap I_{m-1, \ell_0} \neq \emptyset.$$

Soit  $I' := I \cap I_{m-1, \ell_0}$ . Nous avons l'égalité  $M_m(I) = M_m(I')$ . De plus,  $I'$  vérifie les conditions du cas 1. On trouve donc, en utilisant (3.3.51), que pour tout  $m \geq 2$ ,

$$\frac{M_m(I)}{M_m} \leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} d^{-d/2(1-\lambda^2-2\delta_m)} |I'|^{d-d\lambda^2-2d\delta_m} \quad (3.3.52)$$

$$\leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} d^{-d/2(1-\lambda^2-2\delta_m)} |I|^{d-d\lambda^2-2d\delta_m}. \quad (3.3.53)$$

*Possibilité 2b.* Supposons que  $I$  vérifie  $I \cap I_{m-1, \ell} \neq \emptyset$  pour au moins deux valeurs différentes de  $\ell \in \{1, \dots, M_{m-1}\}$ . Pour tout  $m \geq 1$ , on appelle  $H(m)$  la propriété suivante :  $\forall J \subseteq [0, 1]^d$ ,

$$\frac{M_m(J)}{M_m} \leq \prod_{i=1}^m \left( \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i} \right)^2 d^{-d/2(1-\lambda^2-2\Delta_m)} |J|^{d-d\lambda^2-2d\Delta_m}, \quad \text{où } \Delta_m := \sum_{k=1}^m \delta_k. \quad (3.3.54)$$

REMARQUE 13. Pour  $m = 1$  et pour tout  $J \subseteq [0, 1]^d$ , (3.3.50) implique (3.3.54). De plus, pour tout  $m \geq 1$  et  $J$  vérifiant les conditions du cas 1, (3.3.51) implique (3.3.54) et (3.3.54) est encore vrai pour tout  $m \geq 1$  vérifiant les conditions du cas 2a.

Dans la suite,  $\partial A$  signifie la frontière de  $A$  et  $\overset{\circ}{A}$  signifie l'intérieur de  $A$ , pour  $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $k \geq 1$ .

**Lemme 3.3.7.** *Soit  $m \geq 2$ . On suppose que  $H(m-1)$  est vrai et que  $J \subseteq [0, 1]^d$  un pavé tel que*

$$\partial J \cap \bigcup_{\ell=1}^{M_{m-1}} \overset{\circ}{I}_{m-1, \ell} = \emptyset. \quad (3.3.55)$$

Alors, on a

$$\frac{M_m(J)}{M_m} \leq \frac{1 + (1/2)\sigma_m}{1 + \sigma_m} \prod_{i=1}^m \left( \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i} \right) d^{-d/2(1-\lambda^2-2\Delta_{m-1})} |J|^{d-d\lambda^2-2d\Delta_{m-1}}. \quad (3.3.56)$$

Démonstration. Par (3.3.55), on voit que

$$M_m(J) = \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq M_{m-1} \\ I_{m-1, \ell} \subseteq J}} M_m(I_{m-1, \ell}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{M_m(J)}{M_m} &= \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq M_{m-1} \\ I_{m-1, \ell} \subseteq J}} \frac{M_m(I_{m-1, \ell})}{M_m} \\ &\leq M_{m-1}(J) \times \max_{\substack{1 \leq \ell \leq M_{m-1} \\ I_{m-1, \ell} \subseteq J}} \left( \frac{M_m(I_{m-1, \ell})}{M_m} \right). \end{aligned} \quad (3.3.57)$$

De plus, par (3ii), on sait que  $\text{vol}(I_{m-1, \ell}) = L_{m-1}^d \geq h_{k_m}^{1-\lambda^2-\delta_m}$ . Donc,  $I_{m-1, \ell}$  satisfait les conditions du cas 1a. On applique donc (3.3.45) en remplaçant  $I$  par  $I_{m-1, \ell}$  et  $\text{vol}(I)$  par  $L_{m-1}$  et en utilisant (3iii),

$$\begin{aligned} \frac{M_m(I_{m-1, \ell})}{M_m} &\leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} L_{m-1}^d \frac{1}{M_{m-1}(L_{m-1}^*)^d} \\ &\leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} \times (1 + (1/2)\sigma_m) \times \frac{1}{M_{m-1}}. \end{aligned} \quad (3.3.58)$$

Ainsi, en combinant l'hypothèse de récurrence  $H(m-1)$ , (3.3.57) et (3.3.58), on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{M_m(J)}{M_m} &\leq \frac{M_{m-1}(J)}{M_{m-1}} \times \left( \frac{1 + \sigma_m}{1 - \sigma_m} \right)^2 \times \frac{1 + (1/2)\sigma_m}{1 + \sigma_m} \\ &\leq \frac{1 + (1/2)\sigma_m}{1 + \sigma_m} \prod_{i=1}^m \left( \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i} \right)^2 d^{-d/2(1-\lambda^2-2\Delta_{m-1})} |J|^{d-d\lambda^2-2d\Delta_{m-1}}. \end{aligned}$$

On retrouve donc bien (3.3.56).  $\square$

On appelle  $I'$  le plus petit pavé qui contient les ensembles  $I_{m-1, \ell}$  vérifiant  $I_{m-1, \ell} \cap I \neq \emptyset$ , où  $1 \leq \ell \leq M_{m-1}$  et  $I'' = I \cap I'$ . On a alors

$$M_m(I) = M_m(I'') \leq M_m(I'). \quad (3.3.59)$$

On va alors montrer, par un raisonnement récursif, que pour  $I$  selon les conditions du cas 2b, (3.3.56) est vérifié. Nous pouvons voir que  $H(1)$  est vérifiée. Supposons que  $H(m-1)$  soit vérifiée pour tout  $m \geq 2$ . On voit que

$$\partial I' \cap \bigcup_{\ell=1}^{M_{m-1}} \overset{\circ}{I}_{m-1,\ell} = \emptyset.$$

On applique donc le Lemme 3.3.7 pour  $J = I'$ .

$$\begin{aligned} \frac{M_m(I')}{M_m} &\leq \frac{1 + (1/2)\sigma_m}{1 + \sigma_m} \prod_{i=1}^m \left( \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i} \right)^2 d^{-\frac{d}{2}(1-\lambda^2-2\Delta_{m-1})} |I'|^{d-d\lambda^2-2d\Delta_{m-1}} \\ &\leq \frac{1 + (1/2)\sigma_m}{1 + \sigma_m} \prod_{i=1}^m \left( \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i} \right)^2 \left( \text{vol}(I) \frac{\text{vol}(I')}{\text{vol}(I)} \right)^{1-\lambda^2-2\Delta_{m-1}}. \end{aligned} \quad (3.3.60)$$

Or, on a

$$\text{vol}(I') \leq \left[ (\text{vol}(I))^{1/d} + 2L_{m-1} \right]^d \leq \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} 2^{d-k} \text{vol}(I)^{k/d} L_{m-1}^{d-k}. \quad (3.3.61)$$

Dans un premier temps, on suppose que  $\text{vol}(I) \geq h_{k_{m-1}}$ . (3.3.61) et (3.3.28) impliquent alors que

$$\begin{aligned} \frac{\text{vol}(I')}{\text{vol}(I)} &\leq \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} 2^{d-k} \frac{L_{m-1}^{d-k}}{\text{vol}(I)^{(d-k)/d}} \\ &\leq \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} 2^{d-k} \theta_{m-1}^{d-k} \leq (1 + 2\theta_{m-1})^d. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité, combinée avec (3.3.59), (3.3.60) et (2iii), donne

$$\frac{M_m(I)}{M_m} \leq \frac{M_m(I')}{M_m} \leq \prod_{i=1}^m \left( \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i} \right)^2 d^{-\frac{d}{2}(1-\lambda^2-2\Delta_{m-1})} |I|^{d-d\lambda^2-2d\Delta_{m-1}}. \quad (3.3.62)$$

Supposons maintenant que  $\text{vol}(I) < h_{k_{m-1}}$ . Nous remarquons ici que nous pouvons écrire

$$I' \subseteq I_1 \cup \bigcup_{s=2}^S I_s,$$

où  $I_1$  est un pavé de côté  $L_{m-1}$  et les  $I_s$  sont de côté de longueur  $h_{k_{m-1}}^{1/d}$  et  $S \leq 2^d - 1$ . Nous avons donc les relations suivantes.

$$\text{vol}(I_s)^{1/d} \leq \text{vol}(I)^{1/d} + L_{m-1}, \text{ pour tout } 2 \leq s \leq S, \quad (3.3.63)$$

$$\text{vol}(I_1)^{1/d} = L_{m-1}, \quad (3.3.64)$$

$$\text{vol}(I_s) - L_{m-1} \geq h_{k_{m-1}}^{1/d} - L_{m-1}, \text{ pour tout } 2 \leq s \leq S. \quad (3.3.65)$$

Grâce à (3.3.51), (3.3.63), (3.3.64) et (3.3.65), nous trouvons directement que

$$\begin{aligned} \frac{M_m(I_1)}{M_m} &\leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} d^{-d/2(1-\lambda^2-2\delta_m)} |I_1|^{d-d\lambda^2-2d\delta_m} \\ &\leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} \left( \frac{\text{vol}(I) \text{vol}(I_1)}{\text{vol}(I)} \right)^{1-\lambda^2-2\delta_m} \\ &\leq \frac{1 + \sigma_m}{(1 - \sigma_m)^2} \left( \frac{\text{vol}(I_1)}{\text{vol}(I)} \right)^{1-\lambda^2-2\delta_m} d^{-d/2(1-\lambda^2-2\delta_m)} |I|^{d-d\lambda^2-2d\delta_m}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{\text{vol}(I_1)}{\text{vol}(I)} &\leq \left( \frac{L_{m-1}}{\text{vol}(I_2)^{1/d} - L_{m-1}} \right)^d \\ &\leq \left( \frac{L_{m-1}}{h_{k_{m-1}}^{1/d} - L_{m-1}} \right)^d = \left( \frac{\theta_{m-1}}{1 - \theta_{m-1}} \right)^d. \end{aligned}$$

En utilisant (2iv), nous trouvons donc que

$$\begin{aligned} \frac{M_m(I_1)}{M_m} &\leq \frac{(1/2)\sigma_m}{1 + \sigma_m} \left( \frac{1 + \sigma_m}{1 - \sigma_m} \right)^2 d^{-d/2(1-\lambda^2-2\delta_m)} |I|^{d-d\lambda^2-2d\delta_m} \\ &\leq \frac{(1/2)\sigma_m}{1 + \sigma_m} \prod_{i=1}^m \left( \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i} \right)^2 d^{-d/2(1-\lambda^2-2\Delta_m)} |I|^{d-d\lambda^2-2d\Delta_m}. \end{aligned} \quad (3.3.66)$$

Maintenant, nous allons étudier le cas similaire pour  $I_s$ ,  $2 \leq s \leq S$ . Nous pouvons

appliquer le lemme 3.3.7, (3.3.63) et (3.3.65), ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
 \frac{M_m(I_s)}{M_m} &\leq \frac{1 + (1/2)\sigma_m}{1 + \sigma_m} \prod_{i=1}^m \left( \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i} \right)^2 d^{-d/2(1-\lambda^2-2\Delta_{m-1})} |I_2|^{d-d\lambda^2-2d\Delta_{m-1}} \\
 &\leq \frac{1 + (1/2)\sigma_m}{1 + \sigma_m} \prod_{i=1}^m \left( \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i} \right)^2 \left( \frac{\text{vol}(I_2)}{\text{vol}(I)} \right)^{1-\lambda^2-2\Delta_m} d^{-d/2(1-\lambda^2-2\Delta_m)} |I|^{d-d\lambda^2-2d\Delta_m} \\
 &\leq \frac{1 + (1/2)\sigma_m}{1 + \sigma_m} \prod_{i=1}^m \left( \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i} \right)^2 d^{-d/2(1-\lambda^2-2\Delta_m)} |I|^{d-d\lambda^2-2d\Delta_m} \left( \frac{h_{km-1}}{\text{vol}(I_2)^{1/d} - L_{m-1}} \right)^d \\
 &\leq \frac{1 + (1/2)\sigma_m}{1 + \sigma_m} \prod_{i=1}^m \left( \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i} \right)^2 d^{-d/2(1-\lambda^2-2\Delta_m)} |I|^{d-d\lambda^2-2d\Delta_m} \left( \frac{1}{1 - \theta_{m-1}} \right)^d \\
 &\leq \frac{1 + \frac{\sigma_m}{2(2^d-1)}}{1 + \sigma_m} \prod_{i=1}^m \left( \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i} \right)^2 d^{-d/2(1-\lambda^2-2\Delta_m)} |I|^{d-d\lambda^2-2d\Delta_m}, \tag{3.3.67}
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (2v) pour le passage à la dernière ligne. En combinant (3.3.66) et (3.3.67), on trouve

$$\begin{aligned}
 \frac{M_m(I)}{M_m} &\leq \frac{M_m(I')}{M_m} \leq \frac{M_m(I_1)}{M_m} + \sum_{s=1}^S \frac{M_m(I_s)}{M_m} \\
 &\leq \frac{2 + \frac{1}{2}\sigma_m}{1 + \sigma_m} \prod_{i=1}^m \left( \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i} \right)^2 d^{-d/2(1-\lambda^2-2\Delta_m)} |I|^{d-d\lambda^2-2d\Delta_m} \\
 &\leq C \prod_{i=1}^m \left( \frac{1 + \sigma_i}{1 - \sigma_i} \right)^2 d^{-d/2(1-\lambda^2-2\Delta_m)} |I|^{d-d\lambda^2-2d\Delta_m}, \tag{3.3.68}
 \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante ne dépendant pas de  $m$ , grâce à (1i) ; Nous obtenons donc bien ce que nous espérons pour  $I$  selon les conditions du cas 2b.

**Cas 3.** On considère maintenant le cas où  $I \cap I_{m-1,\ell} = \emptyset$  pour tout  $\ell \in \{1, \dots, M_{m-1}\}$ . On remarque que

$$\frac{M_m(I)}{M_m} = 0. \tag{3.3.69}$$

Ceci implique (3.3.56) pour tout  $m \geq 1$ .

**ÉTAPE 3 : CALCUL DE LA DIMENSION DE  $S_\Lambda$ .** La remarque 13, combinée à (3.3.62) (3.3.68) et (3.3.69), montre que  $H(m)$  est vraie pour tout  $m \geq 1$ , à une constante près ne dépendant pas de  $m$ . Ainsi, en appliquant (1ii), on trouve que pour tout pavé  $I \subseteq [0, 1]^d$  et pour tout  $m \geq 1$ ,

$$M_m(I) \leq 2d^{-\frac{d}{2}(1-\lambda^2-2\Delta_{m-1})} |I|^{d(1-\lambda^2)-2d\Delta_{m-1}} M_m. \tag{3.3.70}$$

En utilisant alors le Lemme 3.3.1, avec  $A$  décrit précédemment et en prenant  $\Delta = 1$ ,  $\delta = d^{-\frac{d}{2}(1-\lambda^2-2\Delta_{m-1})}$  et  $c = d(1-\lambda^2) - d^2\Delta_{m-1}$ , on obtient que  $\dim A \geq d(1-\lambda^2) - d^2\Delta_{m-1}$ . Il ne reste plus qu'à montrer que

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m \subseteq S(\Theta_\varphi).$$

Pour cela, remarquons que  $L_m = \theta_m h_{k_m}^{1/d} < h_{k_m}^{1/d}$ . Le fait que

$$k_m > k_2(\varepsilon_m, \sigma_m, \delta_m) > k_0(\varepsilon_m)$$

implique par (3.3.2) que pour tout  $m \geq 1$ ,  $\mathbb{N}(L_m, W_{k_m, \varphi}(\varepsilon_m)) \subseteq U_{k_m, \varphi}(2\varepsilon_m)$ . Or, (3.3.29), (3.3.5) et (3.3.6) nous permettent de dire que pour tout  $m \geq 1$ ,  $E_m \subseteq \mathbb{N}(L_m, W_{k_m, \varphi}(\varepsilon_m))$ . Cela signifie que, pour tout  $m \geq 1$  et pour tout  $\mathbf{t} \in E_m$ ,

$$\|\Theta_{h_{k_m}, \mathbf{t}} - \Theta_\varphi\| \leq 2\varepsilon_m.$$

Puisque  $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$ , cette dernière inégalité est vérifiée pour tout  $\mathbf{t} \in A$  et tout  $m \geq 1$ . Enfin, puisque  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  quand  $m \rightarrow \infty$ , on en déduit donc que  $A \subseteq S(\Theta_\varphi)$ . Donc, pour tout  $\Lambda \in (0, 1)$  on a  $\dim S_\Lambda \geq d(1-\Lambda^2)$ . Ceci joint à (3.2.1) mène donc à (3.1.25). Le Théorème 3.1.11 est donc démontré.

### 3.4 Pour le processus empirique uniforme

Les résultats qui ont été obtenus dans les deux paragraphes précédents concernent le processus de Wiener indexé par des fonctions. Le même travail peut être réalisé pour le processus empirique uniforme indexé par des fonctions. Soit  $\mathbf{U}, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots$  une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur  $[0, 1]^d$ . Soit  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ . On définit le processus empirique uniforme local en  $\mathbf{z}$  indexé par la famille de fonction  $\mathcal{F}$  (définie précédemment comme vérifiant (Fi-v)) par

$$\alpha_n(\mathbf{z}; f) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left\{ f\left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{U}_i}{h_n^{1/d}}\right) - E f\left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{U}}{h_n^{1/d}}\right) \right\}, \quad (3.4.1)$$

où  $\{h_n; n \geq 1\}$  est une suite de constantes vérifiant les conditions suivantes

$$(H.i) \quad h_n \searrow 0, nh_n \nearrow \infty \text{ et } 0 < h_n < 1,$$

(H.ii)  $nh_n/\log(1/h_n) \rightarrow \infty$ ,

(H.iii)  $\log(1/h_n)/\log \log n \rightarrow \infty$ .

Pour étudier le comportement du processus, on considère sa version normalisée. On pose donc  $b_n = \sqrt{2h_n \log(1/h_n)}$  et

$$L_n(\mathbf{z}; f) = \frac{\alpha_n(\mathbf{z}; f)}{b_n} = \frac{\alpha_n(\mathbf{z}; f)}{\sqrt{2h_n \log(1/h_n)}}. \quad (3.4.2)$$

En utilisant les mêmes notations que pour le processus de Wiener, avec (2.2.4), (2.2.6), (2.2.7), (2.2.8) et (2.2.9), Mason [86] a montré que sous (H.i-iii) et (F.i-v), pour  $J$  un compact de  $\mathbb{R}^d$  d'intérieur non vide, avec probabilité 1,  $\{L_n(h_n, \mathbf{z}, \cdot) : \mathbf{z} \in J\}$  est presque sûrement relativement compact et son ensemble limite est  $\mathcal{H}_1$  ((2.2.6)). Ce résultat nous amène à considérer l'ensemble

$$L(\Theta_\varphi) = \left\{ \mathbf{z} \in [0, 1]^d : \liminf_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\mathbf{z}; \cdot) - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} = 0 \right\}. \quad (3.4.3)$$

Pour  $\Lambda \in [0, 1]$ ,  $\mathcal{H}_\Lambda$  est défini par (3.1.22). Enfin,

$$L_\Lambda = \bigcup \left\{ L(\Theta_\varphi), \Theta_\varphi \in \mathcal{H}_1, \varphi \in G_2([0, 1]^d), \int_{[0, 1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \geq \Lambda^2 \right\}. \quad (3.4.4)$$

De manière analogue au processus de Wiener, nous allons établir le théorème suivant :

**Théorème 3.4.1.** *Pour tout  $\Theta_\varphi \in \mathcal{H}_1$  et tout  $\varphi \in G_2([0, 1]^d)$  tel que  $\int_{[0, 1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \in (0, 1)$  et pour  $\Lambda \in [0, 1]$ ,*

$$\dim L(\Theta_\varphi) = d \left( 1 - \int_{[0, 1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right) \text{ et } \dim L_\Lambda = d(1 - \Lambda^2). \quad (3.4.5)$$

### 3.4.1 Préliminaires

Soit  $\gamma > 0$  et  $\nu_k = \lfloor (1 + \gamma)^k \rfloor$ , comme défini dans la partie précédente. Soit  $\eta_n$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson standard de paramètre  $n$ , indépendante des variables  $\mathbf{U}, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots$ . On considère alors une version poissonisée du processus empirique uniforme indexé par des fonction  $L_n$  :

$$\Pi_n(\mathbf{z}; f) = \frac{1}{\sqrt{2nh_n \log(1/h_n)}} \sum_{i=1}^{\eta_n} \left\{ f \left( \frac{\mathbf{z} - \mathbf{U}_i}{h_n^{1/d}} \right) - Ef \left( \frac{\mathbf{z} - \mathbf{U}}{h_n^{1/d}} \right) \right\}. \quad (3.4.6)$$

On va utiliser le résultat suivant qui va nous servir pour passer du processus empirique au processus de Poisson. On peut trouver sa démonstration dans le Lemme 2.1 de Giné, Mason et Zaitsev [57]

RÉSULTAT 4. *Soit  $\Pi_n$  le processus défini ci-dessus. Pour tout  $n$  suffisamment grand, pour tout  $\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^n \in [0, 1]^d$  et pour tous boréliens  $B_1, \dots, B_m \in l_\infty(\mathcal{F})$ , il existe une constante  $C$  telle que*

$$P(L_n(\mathbf{z}^i; f) \notin B_i, i = 1, \dots, m) \leq CP(\Pi_n(\mathbf{z}^i; f) \notin B_i, i = 1, \dots, m). \quad (3.4.7)$$

On aura également besoin pour la suite d'un résultat de grandes déviations. La fonction de taux  $I(\cdot)$  sera la même que celle utilisée précédemment (2.2.11). Mason [86] a montré le résultat suivant :

RÉSULTAT 5. *Sous les conditions (F.i-ii) et (H.i-iii), pour toute suite  $\{m_n : n \geq 1\}$  d'entiers positifs et tous points  $\mathbf{z}^{i,n}, i = 1, \dots, m_n, n \geq 1$ , on a*

1. *Pour tout fermé  $F$  de  $l_\infty(\mathcal{F})$*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq m_n} \varepsilon_n \log P(\Pi_{i,n}(\cdot) \in F) \leq -I(F);$$

2. *Pour tout ouvert  $G$  de  $l_\infty(\mathcal{F})$*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq i \leq m_n} \varepsilon_n \log P(\Pi_{i,n}(\cdot) \in G) \geq -I(G);$$

où  $\Pi_{i,n}(\cdot) = \Pi_n(\mathbf{z}_{i,n}; \cdot)$ ,  $i = 1, \dots, m_n, n \geq 1$  et

$$\varepsilon_n = (2 \log(1/h_n))^{-1}. \quad (3.4.8)$$

D'autre part, grâce au Lemme 3 de Mason [86], on sait que

RÉSULTAT 6.

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{z} \in J} \sup_{f \in \mathcal{F}} |L_n(\mathbf{z}, f)| = 0.$$

Enfin, pour la suite de la démonstration, il est utile de montrer le résultat suivant. La démonstration est établie par Mason [86] et repose sur une version généralisée du lemme d'Ottaviani.

RÉSULTAT 7. *Pour  $\varepsilon > 0$  et  $\Lambda > 0$ , on a pour tout  $\mathbf{z} \in [0, 1]^d$  et  $j$  suffisamment grand,*

$$\begin{aligned} P\left(\frac{b_n}{b_{\nu_{j+1}}} L_n(\mathbf{z}; f((h_n/h_{\nu_{j+1}})\cdot)) \notin \mathcal{H}_\Lambda^\varepsilon \text{ pour } \nu_j < n \leq \nu_{j+1}\right) \\ \leq 2P(L_{\nu_{j+1}}(\mathbf{z}; \cdot) \notin \mathcal{H}_\Lambda^{\varepsilon/2}). \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

### 3.4.2 Démonstration de la borne supérieure

On va montrer une partie du Théorème 3.4.1 et plus précisément que, pour tout  $\Lambda \in [0, 1]$ , on a

$$\dim L_\Lambda \leq d(1 - \Lambda^2). \quad (3.4.10)$$

Pour cette démonstration, nous allons nous servir des notations suivantes :

$$L_n(\varepsilon, \Lambda) = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^d : L_n(\mathbf{z}; f) \notin \mathcal{H}_\Lambda^\varepsilon\}, \quad (3.4.11)$$

et

$$L(\varepsilon, \Lambda) = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^d : L_n(\mathbf{z}; f) \notin \mathcal{H}_\Lambda^\varepsilon \text{ i.s.}\}, \quad (3.4.12)$$

et enfin

$$L_\Lambda^+ = \bigcup \left\{ L(\Theta_\varphi), \Theta_\varphi \in \mathcal{H}_1, \int_{[0,1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} > \Lambda^2 \right\}. \quad (3.4.13)$$

En raisonnant de la même façon que pour le processus de Wiener, on voit que pour obtenir (3.4.10), il suffit de montrer que, pour tout  $\Lambda \in (0, 1), \eta \in (0, d(1 - \Lambda^2))$  et  $\varepsilon > 0$ ,

$$s^{d-d\Lambda^2+d\eta} - \text{mes}(L(\varepsilon, \Lambda)) < \infty. \quad (3.4.14)$$

On rappelle que pour  $\gamma > 0, \nu_k = \lfloor (1 + \gamma)^k \rfloor$ . Pour  $j \geq 1$  et  $\theta > 0$ , on pose

$$t_j(i_r, \theta) = i_r \theta h_{\nu_{j+1}}^{1/d}, 0 \leq i_r \leq m_j \text{ avec } m_j = \lfloor (\theta h_{\nu_{j+1}}^{1/d})^{-1} \rfloor - 1 \text{ et } 1 \leq r \leq d, \quad (3.4.15)$$

et en notant  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d), t_j(\mathbf{i}) = t_j(i_1, \dots, i_d) = (i_1 h_{\nu_{j+1}} \theta, \dots, i_d h_{\nu_{j+1}} \theta)$ . De plus, pour  $0 < \varepsilon < \Lambda/2$ ,

$$\mathbb{1}_{i_1, \dots, i_d, j}(\varepsilon, \Lambda) = \mathbb{1} \left\{ \frac{b_n}{b_{\nu_{j+1}}} L_n(t_j(\mathbf{i}); f((h_n/h_{\nu_{j+1}})^{1/d} \cdot)) \notin \mathcal{H}_\Lambda^{\varepsilon/2} \text{ pour } \nu_j < n \leq \nu_{j+1} \right\}, \quad (3.4.16)$$

et

$$I_{i_1, \dots, i_d, j}(\varepsilon) = \begin{cases} \prod_{r=1}^d \left[ \frac{t_j(i_r-1)}{\sqrt{d}}, \frac{t_j(i_r+1)}{\sqrt{d}} \right] & \text{si } \mathbb{1}_{i_1, \dots, i_d, j}(\varepsilon, \Lambda) = 1, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.4.17)$$

Nous allons montrer qu'à partir d'un certain rang,

$$L_n(\varepsilon, \Lambda) \subseteq \bigcup_{i_1=0}^{m_j} \cdots \bigcup_{i_d=0}^{m_j} I_{i_1, \dots, i_d, j}(\varepsilon), \quad (3.4.18)$$

pour  $j$  suffisamment grand. Pour cela, on va se servir des deux résultats suivants :

**Lemme 3.4.2.** *Avec probabilité 1*

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \max_{\nu_j < n \leq \nu_{j+1}} \left| \frac{b_n}{b_{\nu_{j+1}}} - 1 \right| \sup_{\mathbf{z} \in [0,1]^d} \sup_{f \in \mathcal{F}} |L_n(\mathbf{z}; f)| \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 0, \quad (3.4.19)$$

et

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \max_{\nu_j < n \leq \nu_{j+1}} \sup_{\mathbf{z} \in [0,1]^d} \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| L_n(\mathbf{z}; f((h_n/h_{\nu_{j+1}})^d \cdot)) - L_n(\mathbf{z}; f) \right| \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 0. \quad (3.4.20)$$

*Démonstration.* Voir le lemme 4 de Mason [86]. La démonstration est analogue à celle des Lemmes 3.5 et 3.6 de Deheuvels et Mason [38].  $\square$

**Inégalité 3.4.3.** *Soit  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$  une suite de classes de fonctions mesurables sur  $\mathbb{R}^d$  à valeurs réelles, bornées et vérifiant les conditions Fiv-v. Supposons que pour un certain  $\kappa > 0$ , pour  $n$  suffisamment grand,*

$$\sigma_n^2 := \sup_{f \in \mathcal{F}_n} E(g^2(X)) \leq \kappa^2 h_n. \quad (3.4.21)$$

Alors, il existe des constantes  $D_0 > 0$  et  $D_1 > 0$  telles que, pour tout  $\rho > 0$  et  $n$  suffisamment grand,

$$P\left(\max_{1 \leq m \leq 2n} \|T_m\|_{\mathcal{F}_n} \geq (\kappa + \rho) D_1 b_n\right) \leq 2 \exp\{-D_0(\rho/\kappa)^2 \log(1/h_n)\}, \quad (3.4.22)$$

où  $T_m(f) = \sum_{j=1}^m \{g(X_j) - Eg(X)\}$ .

Revenons à la démonstration de (3.4.18). Soit  $\mathbf{t} \in L_n(\varepsilon, \Lambda)$  et  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d)$  tel que  $\mathbf{t} \in \prod_{r=1}^d \left[ \frac{t_j(i_r-1)}{\sqrt{d}}, \frac{t_j(i_r+1)}{\sqrt{d}} \right]$ . Pour tout  $\Theta_\varphi \in \mathcal{H}_\Lambda$ ,

$$\|L_n(\mathbf{t}; \cdot) - \Theta_\varphi\| > \varepsilon. \quad (3.4.23)$$

Or, pour  $\nu_j < n \leq \nu_{j+1}$ , nous obtenons en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |L_n(\mathbf{t}, f) - \Theta_\varphi(f)| &\leq |L_n(\mathbf{t}, f) - L_n(t_j(\mathbf{i}), f)| + |L_n(t_j(\mathbf{i}), f) - \frac{b_n}{b_{\nu_{j+1}}} L_n(t_j(\mathbf{i}), f)| \\ &\quad + \frac{b_n}{b_{\nu_{j+1}}} \left| L_n(t_j(\mathbf{i}), f) - L_n(t_j(\mathbf{i}), f((h_n/h_{\nu_{j+1}})^{1/d} \cdot)) \right| \\ &\quad + \left| \frac{b_n}{b_{\nu_{j+1}}} L_n(t_j(\mathbf{i}), f((h_n/h_{\nu_{j+1}})^{1/d} \cdot)) - \Theta_\varphi(f) \right|. \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

Dans un premier temps, nous allons majorer le premier terme de droite de (3.4.24). Remarquons que  $|\mathbf{t} - t_j(\mathbf{i})|_2 \leq 2\theta h_{\nu_j}^{1/d}$ . Appliquons l'inégalité 3.4.3 pour la classe de fonctions suivantes.

$$\mathcal{F}_n = \left\{ f\left(\frac{\mathbf{t} - \cdot}{h_n^{1/d}}\right) - f\left(\frac{t_j(\mathbf{i}) - \cdot}{h_n^{1/d}}\right) : |\mathbf{t} - t_j(\mathbf{i})|_2 \leq 2\theta h_{\nu_j}^{1/d} \right\}.$$

Pour cela, nous allons calculer  $\sigma_n^2$ .

$$\begin{aligned} E\left(f(h_n^{-1/d}(\mathbf{t} - X)) - f(h_n^{-1/d}(t_j(\mathbf{i}) - X))\right)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(f(h_n^{-1/d}(\mathbf{t} - \mathbf{u})) - f(h_n^{-1/d}(t_j(\mathbf{i}) - \mathbf{u}))\right)^2 d\mathbf{u} \\ &= h_n \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) - f\left(\mathbf{x} + \frac{t_j(\mathbf{i}) - \mathbf{t}}{h_n^{1/d}}\right) d\mathbf{x} \\ &\leq h_n A(2\theta). \end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité, nous avons utilisé (3.2.8) et le fait que  $h_{\nu_{j+1}}/h_n \leq 1$  lorsque  $\nu_j \leq n \leq \nu_{j+1}$ . Nous pouvons donc appliquer l'inégalité 3.4.3 pour  $\kappa^2 = A(2\theta)$ . Avec Borel Cantelli, nous en déduisons donc que pour  $\theta$  suffisamment petit et  $n$  suffisamment grand,

$$|L_n(\mathbf{t}, f) - L_n(t_j(\mathbf{i}), f)| \leq \varepsilon/6. \quad (3.4.25)$$

Ensuite, le lemme 3.4.2 nous permet d'affirmer que, pour  $\gamma$  suffisamment proche de 0,

$$|L_n(t_j(\mathbf{i}), f) - \frac{b_n}{b_{\nu_{j+1}}} L_n(t_j(\mathbf{i}), f)| \leq \varepsilon/6, \quad (3.4.26)$$

et

$$\frac{b_n}{b_{\nu_{j+1}}} \left| L_n(t_j(\mathbf{i}), f) - L_n\left(t_j(\mathbf{i}), f\left(\frac{h_n}{h_{\nu_{j+1}}}\right)^{1/d} \cdot\right) \right| \leq \varepsilon/6. \quad (3.4.27)$$

Nous obtenons donc à partir de (3.2.15), (3.4.25), (3.4.26) et (3.4.27) que

$$\left| \frac{b_n}{b_{\nu_{j+1}}} L_n(t_j(\mathbf{i}), f\left(\frac{h_n}{h_{\nu_{j+1}}}\right)^{1/d} \cdot\right) - \Theta_\varphi(f) \right| > \varepsilon/2.$$

Nous avons donc établi l'inclusion (3.4.18) pour  $j$  suffisamment grand. Ainsi, pour tout  $\Lambda \in (0, 1)$ ,

$$s^{d(1-\Lambda^2)} - mes(L_n(\varepsilon, \Lambda)) \leq \sum_{i_1=0}^{m_j} \cdots \sum_{i_d=0}^{m_j} (2\theta h_{\nu_{j+1}}^{1/d})^{d(1-\Lambda^2)} \mathbb{1}_{i_1, \dots, i_d, j}(\varepsilon, \Lambda). \quad (3.4.28)$$

On pose  $S_j = \sum_{i_1=0}^{m_j} \cdots \sum_{i_d=0}^{m_j} \mathbf{1}_{i_1, \dots, i_d, j}(\varepsilon, \Lambda)$ . Ainsi, pour montrer (3.4.10), il faut que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} E \sum_{i_1=0}^{m_j} \cdots \sum_{i_d=0}^{m_j} (2\theta h_{\nu_{j+1}}^{1/d})^{d(1-\Lambda^2)} \mathbf{1}_{i_1, \dots, i_d, j}(\varepsilon, \Lambda) \\ \leq \sum_{j=1}^{\infty} (2\theta h_{\nu_{j+1}}^{1/d})^{d(1-\Lambda^2)} ES_j < \infty. \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

Or,

$$ES_j = \sum_{i_1=0}^{m_j} \cdots \sum_{i_d=0}^{m_j} P\left(\frac{b_n}{b_{\nu_{j+1}}} L_n(t_j(\mathbf{i}), f((h_n/h_{\nu_{j+1}})^{1/d} \cdot)) \notin \mathcal{H}_{\Lambda}^{\varepsilon/2} \text{ pour } \nu_{j-1} \leq n \leq \nu_j\right).$$

On utilise alors le Résultat 7, avec  $\varepsilon = \varepsilon/2$ . On trouve donc

$$ES_j \leq 2(m_j + 1)^d P(L_{\nu_{j+1}}(\mathbf{0}; f) \notin \mathcal{H}_{\Lambda}^{\varepsilon/4}). \quad (3.4.30)$$

On voit alors que pour obtenir (3.4.29), il faut obtenir une borne supérieure de

$$P(L_{\nu_{j+1}}(\mathbf{0}; f) \notin \mathcal{H}_{\Lambda}^{\varepsilon/4}).$$

Pour cela, nous allons utiliser les inégalités de grandes déviations. Puisqu'il n'est pas possible de les appliquer directement au processus empirique, nous utilisons un processus poissonisé  $\Pi_n(h_n, \mathbf{z}; f)$  en intermédiaire (sur lequel nous pourrions appliquer les résultats de grandes déviations). Rappelons que  $\Pi_n$  est défini selon (3.4.6). On sait alors, d'après le Résultat 4, qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$P(L_{\nu_{j+1}}(\mathbf{0}; f) \notin \mathcal{H}_{\Lambda}^{\varepsilon/4}) \leq CP(\Pi_{\nu_j}(\mathbf{0}; f) \notin \mathcal{H}_{\Lambda}^{\varepsilon/4}).$$

On utilise à présent le Résultat 5. On obtient que

$$P(\Pi_{\nu_{j+1}}(\mathbf{0}; f) \notin \mathcal{H}_{\Lambda}^{\varepsilon/4}) \leq \exp\{-2 \log(1/h_{\nu_{j+1}}) I(F)\},$$

avec  $F = l_{\infty}(\mathcal{F}) - \mathcal{H}_{\Lambda}^{\varepsilon/4}$ . Or, il existe une constante positive  $\rho > 0$  telle que  $2I(F) \geq \Lambda^2 + \rho$ . Ainsi,

$$ES_j \leq 2C(m_j + 1)^d h_{\nu_{j+1}}^{\Lambda + \rho},$$

pour  $j$  suffisamment grand. Donc

$$\sum_{j=1}^{\infty} (2\theta h_{\nu_{j+1}}^{1/d})^{d(1-\Lambda^2)} ES_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} h_{\nu_{j+1}}^{\rho}.$$

D'après l'hypothèse (H-iii) et pour  $n$  suffisamment grand  $h_n \leq (\log n)^{-2/\rho}$ . Donc  $h_{\nu_j}^\rho \leq (\log \nu_j)^{-2} = O(j^{-2})$  quand  $j \rightarrow \infty$ . Donc

$$\sum_{j=1}^{\infty} (2\theta h_{\nu_{j+1}}^{1/d})^{d(1-\Lambda^2)} ES_j < \infty,$$

et on a donc (3.4.10) qui est vérifiée.

### 3.4.3 Démonstration de la borne inférieure

La démonstration reste très similaire à celle pour le processus de Wiener indexé par des fonctions. On montre donc dans cette partie que pour tout  $\Theta_\varphi \in \mathcal{H}_1$  telle que  $0 < \lambda^2 = \int_{[0,1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} < 1$ ,

$$\dim L(\Theta_\varphi) \geq d \left( 1 - \int \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right). \quad (3.4.31)$$

Pour  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$ , on a vu que le calcul reste valable. La démonstration est basée sur le Lemme 3.3.1. C'est à dire que l'on va trouver un ensemble  $A$  vérifiant les conditions du Lemme 3.3.1 et qui soit inclus dans  $L(\Theta_\varphi)$ . De cette façon, on aura, pour  $\eta > 0$ ,

$$s^{d(1-\lambda^2-\eta)} - mes(L(\Theta_\varphi)) \geq s^{d(1-\lambda^2-\eta)} - mes(A) > 0.$$

En prenant  $\eta > 0$  arbitrairement petit, on montre alors (3.4.31). La construction de l'ensemble  $A$  et son application étant très similaire au cas du processus de Wiener, on ne la réécrit pas.

## 3.5 Conclusion

### 3.5.1 Topologie non uniforme

Il serait à présent intéressant de continuer sur le raisonnement du chapitre 2.3, c'est à dire obtenir des résultats analogues en travaillant sur des plus fortes topologies. Des résultats ont déjà été obtenus dans ce domaine. En effet, Deheuvels et Lifshits [36] étudient le processus

$$\frac{\Delta W(h, t; s)}{\sqrt{2h \log(1/h)}},$$

où  $\Delta W(h, t; s) = W(t + hs) - W(t)$ . C'est l'analogue de (3.1.12) pour le processus de Wiener. Ils définissent la *consistance* d'une norme  $\nu$  par les deux conditions suivantes. (Se référer à l'annexe D p.173 pour les notions de topologie).

(C1')  $\nu$  est semi-continue inférieurement respectivement à la topologie uniforme.

(C2') Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, avec probabilité 1,

$$\sup_{\theta_1, \theta_2 \in [0, \varepsilon]} \nu \left( W(\theta_1 + (1 - \theta_2)\cdot) - W(\theta_1) \right) < \infty.$$

On note  $\mathcal{C}$  la classe des normes consistantes. Pour tout semi-norme consistante  $\nu$ ,  $f \in C[0, 1]$  et  $\alpha \geq 0$ , les ensembles suivants sont introduits.

$$T(\nu, f) = \left\{ t \in [0, 1] : \liminf_{h \downarrow 0} \nu((2h \log(1/h))^{-1/2} \Delta W(h, t; \cdot) - f) = 0 \right\}, \quad (3.5.1)$$

$$T(\nu, \alpha) = \left\{ t \in [0, 1] : \limsup_{h \downarrow 0} \left( \inf_{f \in \alpha \mathbb{K}_0^1} \nu((2h \log(1/h))^{-1/2} \Delta W(h, t; \cdot) - f) \right) > 0 \right\}, \quad (3.5.2)$$

où  $\lambda K = \{\lambda z : z \in K\}$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $K$  un ensemble. Deheuvels et Lifshits [36] établissent le théorème suivant :

**Théorème 3.5.1.** *Soit  $\mathcal{N} = \{\nu_n : n \geq 1\} \subseteq \mathcal{C}$  une famille dénombrable de normes consistantes. Alors, avec probabilité 1,*

$$\dim \left( \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} T(\nu, \alpha) \right) = 1 - \alpha^2, \quad \forall \alpha \in [0, 1], \quad (3.5.3)$$

et

$$\dim \left( \bigcap_{\nu \in \mathcal{N}} T(\nu, f) \right) = 1 - |f|_{\mathbb{H}_0^1}^2 \quad \forall f \in \mathbb{K}_0^1. \quad (3.5.4)$$

Il reste donc à montrer une généralisation de ce théorème pour des processus multivariés, indexés par des familles de fonctions. On pourrait commencer par le processus de Wiener multivarié indexé par une famille de fonctions (3.1.21), puis pour le processus empirique uniforme multivarié indexé par une famille de fonctions (3.4.2).

### 3.5.2 Vitesses de convergence

Une autre généralisation pourrait se faire à partir des travaux sur les vitesses de convergence. Reprenons l'étude des fonctions d'oscillations  $\Delta W(h, t; s) = W(t + hs) - W(t)$ . Nous savons que de Acosta [2] a montré que pour tout  $0 < h < 1$ , la suite de fonctions

$$\{(2h \log(1/h))^{-1/2} \Delta W(h, t; s) : 0 \leq t \leq 1 - h\}$$

est presque sûrement relativement compacte dans  $\mathbb{K}_0^1$ . Nous pouvons même préciser que ce recouvrement est complet. Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbb{K}_0^1 \subseteq \{(2h \log(1/h))^{-1/2} \Delta W(h, t; \cdot) : 0 \leq t \leq 1 - h\}^\varepsilon \subseteq (\mathbb{K}_0^1)^{2\varepsilon}.$$

Nous pouvons étudier la vitesse de la convergence intérieure et de la convergence extérieure (voir Annexe B). En 1985, de Acosta [2] établit pour tout  $f \in \mathbb{K}_0^1$ , avec probabilité 1, que

$$\liminf_{h \downarrow 0} \inf_{0 \leq t \leq 1} |\log h| \times \|(2h \log h)^{-1/2} \Delta W(h, t; s) - f\| = b_f, \quad (3.5.5)$$

où  $b_f = \pi/\{4(1 - |f|_{\mathbb{H}_0^1}^2)^{1/2}\}$ . Il s'agit de la vitesse de convergence intérieure. Ce genre de résultat est souvent appelé *résultat de type Chung*. Pour tout  $f \in \mathbb{K}_0^1$ ,  $c > 1$  et  $|f|_{\mathbb{H}_0^1}^2 < 1$ , Deheuvels et Mason [42] considèrent alors l'ensemble  $S(f, c)$  défini par

$$S(f, c) = \left\{ t \in [0, 1] : \liminf_{h \downarrow 0} |\log h| \times \|(2h \log h)^{-1/2} \Delta W(h, t; \cdot) - f\| \leq cb_f \right\}. \quad (3.5.6)$$

Ils montrent le théorème suivant.

**Théorème 3.5.2.** *Soit  $f \in \mathbb{K}_0^1$  et  $|f|_{\mathbb{H}_0^1} < 1$ . Alors, pour tout  $c > 0$ , avec probabilité 1,*

$$\dim S(f, c) = (1 - |f|_{\mathbb{H}_0^1})(1 - c^{-2}). \quad (3.5.7)$$

Gorn et Lifshits [58] (voir également Lucas [80] ainsi que Berthet et Lifshits [17]) obtiennent une vitesse de convergence pour  $\liminf_{h \downarrow 0} \|(2h \log h)^{-1/2} \Delta W(h, t; s) - f\|$  dans le cas où  $|f|_{\mathbb{H}_0^1} = 1$ , lorsque la variation totale de  $\dot{f}$  est bornée. Plus précisément, notons  $\nu$  la mesure définie par  $\int_a^b \nu = \dot{f}(b) - \dot{f}(a)$ ,  $\nu_s$  (resp.  $\nu_{ac}$ ) la partie singulière de  $\nu$  (resp. la partie absolument continue de  $\nu$ ) par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la *fonction de Csáki* (voir [58]) définie en posant  $\mu(a)$  la plus petite valeur propre du système de Sturm-Liouville. Nous avons alors le théorème suivant.

**Théorème 3.5.3.** *Pour tout  $f \in \mathbb{K}_0^1$  telle que  $|f|_{\mathbb{H}_0^1}^2 = 1$  et  $|\dot{f}|_V < \infty$ ,*

$$\lim_{h \downarrow 0} (\log(1/h))^{2/3} \inf_{t \in [0, 1-h]} \left\| \frac{\Delta W(h, t; \cdot)}{(2h \log(1/h))^{1/2}} - f \right\| = z_f,$$

où  $z_f$  est l'unique solution de l'équation

$$\delta(z) := 4z^3(|\dot{f}(1)| + |\nu_s|_V) - \int_0^1 \mu(4z^3 \dot{\nu}_{ac}(u)) du = 0 \quad z > 0.$$

*Pour tout  $f \in \mathbb{K}_0^1$  telle que  $|f|_{\mathbb{H}_0^1}^2 = 1$  et  $|\dot{f}|_V = \infty$*

$$\lim_{h \downarrow 0} (\log(1/h))^{2/3} \inf_{t \in [0, 1-h]} \left\| \frac{\Delta W(h, t; \cdot)}{(2h \log(1/h))^{1/2}} - f \right\| = 0,$$

Lucas [80; 82] étudie pour  $f \in \mathbb{K}_0^1$ ,  $|f|_{\mathbb{H}_0^1}^2 = 1$ ,  $|\dot{f}|_V < \infty$  et  $c > 1$  l'ensemble

$$D(f, c) = \left\{ t \in [0, 1] : \liminf_{h \downarrow 0} |\log h| \times \|(2h |\log h|)^{-1/2} \Delta W(h, t; \cdot) - f\| \leq cz_f \right\}.$$

Il montre qu'avec probabilité 1,

$$\dim D(f, c) = 0.$$

Afin d'obtenir plus d'information sur cet ensemble, Lucas [82] s'intéresse alors à sa mesure de Hausdorff.

Un travail analogue a été effectué pour le processus empirique uniforme. En effet, nous avons presque sûrement le recouvrement de  $\mathbb{K}_0^1$  par la suite

$$\{(2h_n \log(1/h_n))^{-1/2} \Delta \alpha(h_n, t; \cdot) : 0 \leq t \leq 1 - h_n\},$$

pour  $(h_n)_{n \geq 1}$  une suite vérifiant les conditions CRS (voir p.22). Berthet établit des vitesses de convergence extérieure (dans [15]) ainsi que des vitesses de convergences intérieures (dans [16]) pour différentes tailles d'accroissement (c'est à dire pas seulement sous les conditions standard CRS).

Au vu des résultats obtenus, nous pouvons imaginer trouver la vitesse de convergence intérieure du processus  $\Theta_{h,z}$  vers  $\mathcal{H}_1$  analogue à celle trouvée par de Acosta donnée dans

l'équation (3.5.5). La conjecture que nous pouvons faire est que pour tout  $\varphi \in G_2([0, 1]^d)$  tel que  $\int_{[0,1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} < 1$ , il existe une certaine constante  $d_\varphi$  telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \log(1/h) \inf_{\mathbf{z} \in [0, 1-h]^d} \|\Theta_{h, \mathbf{z}} - \Theta_\varphi\|_{\mathcal{F}} = d_\varphi.$$

Nous serions ainsi amenés à étudier pour tout  $\varphi \in G_2([0, 1]^d)$  tel que  $\int_{[0,1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} < 1$  et  $c > 1$ , l'ensemble

$$L(\Theta_\varphi, c) = \left\{ \mathbf{z} \in [0, 1]^d : \liminf_{h \downarrow 0} \log(1/h) \|\Theta_{h, \mathbf{z}} - \varphi\|_{\mathcal{F}} \leq cd_\varphi \right\}.$$

Nous pourrions également étudier la vitesse de convergence extérieure, qui est vraisemblablement plus lente (voir Berthet [16]) et trouver des résultats de vitesse de convergence relativement au processus empirique indexés par une classe de fonctions  $L_n(\mathbf{z}, f)$  (3.4.2). Ceci n'est pas exhaustif mais nous pouvons voir qu'il reste un nombre important de résultats à développer dans cette thématique.

### 3.5.3 Nouvelle démonstration

D'autre part, nous pourrions étudier le problème présenté dans ce chapitre sous l'angle abordé par Khoshnevisan et Shi [65]. Ces auteurs donnent en effet une nouvelle démonstration au fameux théorème d'Orey et Taylor [90]. Leur démonstration est basée sur le « *principe de distribution de masse* » (voir p. 36). Rappelons que l'ensemble étudié est

$$E(\Lambda) = \left\{ t \in [0, 1) : \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|W(t+h) - W(t)|}{\sqrt{2h \log(1/h)}} \right\},$$

et le but est de démontrer que

$$1 - \Lambda^2 \leq \dim E(\Lambda) \leq 1 - \Lambda^2. \quad (3.5.8)$$

Dans leur article, le résultat précédent est donné généralisé pour un mouvement brownien fractionnaire  $X$  (voir Définition 1 p. 46). Ils définissent ainsi l'ensemble

$$E_\alpha(\Lambda) := \left\{ t \in [0, 1] : \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{\sqrt{2h^{2\alpha} \log(1/h)}} \geq \Lambda \right\}.$$

**Théorème 3.5.4.** *Soit  $X$  un mouvement brownien fractionnaire de paramètre  $\alpha$ ,  $E \subseteq [0, 1]$  un fermé et  $\Lambda > 0$ . Alors, avec probabilité 1,*

$$\dim(E) - \Lambda^2 \leq \dim(E \cap E_\alpha(\Lambda)) \leq \dim_B(E) - \Lambda^2, \quad (3.5.9)$$

où  $\dim_B$  désigne la « box dimension » (voir p.38).

En prenant  $E = [0, 1]$  on retrouve le résultat (3.5.8) d'Orey et Taylor [90]. Le *principe de distribution de masse* est introduit sous la forme du lemme suivant (Frostman's lemma). Notons  $\mathcal{B}(0, 1)$  la classe des boréliens mesurables sur  $[0, 1]$  et pour toute mesure positive  $\mu$  et  $\beta > 0$ ,

$$A_\beta(\mu) := \sup_{0 < h < 1/2} \sup_{t \in [h, 1-h]} \frac{\mu[t-h, t+h]}{h^\beta}.$$

**Lemme 3.5.5.** *Pour tout  $E \in \mathcal{B}(0, 1)$  satisfaisant  $\beta < \dim(E)$ , il existe une mesure positive  $\mu$  telle que  $A_\beta(\mu) < \infty$ .*

Khoshnevisan et Shi [65] introduisent également la notion de *co-dimension supérieure stochastique* ( $\overline{\text{codim}}$ ) d'un ensemble aléatoire  $E$  par

$$\overline{\text{codim}}(E) := \inf\{\beta \in [0, 1] : \forall G \in \mathcal{B}(0, 1) \text{ avec } \dim(G) > \beta, P(E \cap G \neq \emptyset) = 1\}. \quad (3.5.10)$$

Un des résultats fondamentaux de cette notion est le lemme suivant.

**Lemme 3.5.6.** *Soit  $E$  un ensemble aléatoire. Alors, pour tout  $G \in \mathcal{B}(0, 1)$ ,*

$$\dim(E \cap G) \geq \dim(G) - \overline{\text{codim}}(E), \quad p.s. \quad (3.5.11)$$

Pour montrer la borne inférieure de (3.5.8), Khoshnevisan et Shi [65] introduisent l'ensemble

$$E_\alpha(h, \Lambda) = \left\{ t \in [0, 1] : \sup_{0 \leq r \leq h} \frac{|X(t+r) - X(t)|}{\sqrt{2r^{2\alpha} \log(1/r)}} > \Lambda \right\},$$

et montrent grâce au lemme 3.5.5 que, pour tout  $\Lambda \in [0, \dim(E))$ ,

$$P(E_\alpha(\Lambda) \cap E \neq \emptyset) = 1.$$

D'après la définition de la codimension, cela montre que

$$\overline{\text{codim}}(E_\alpha(\Lambda)) \leq \Lambda^2.$$

Ainsi, en appliquant le lemme 3.5.6, ils retrouvent la borne inférieure de (3.5.9) et donc la borne inférieure de (3.5.8).

Il serait donc intéressant de reprendre la démonstration du Théorème 3.1.11 en utilisant la méthode proposée par Khoshnevisan et Shi [65], en généralisant si possible le concept de *mouvement brownien fractionnaire indexé par une classe de fonctions*.

### 3.5.4 Application statistique

Pour terminer ce chapitre, nous pouvons voir quelles applications statistiques nous pourrions obtenir des résultats précédents. Une application qui vient à l'esprit porte sur l'estimation de la densité par noyau. Cela vient de la similarité entre l'expression du processus empirique uniforme indexé par des fonctions et celle de l'estimateur à noyau. Rappelons rapidement ces notations.

Soit  $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_n$  un échantillon de variables aléatoires i.i.d. de densité  $f_{\mathbf{Z}}$ . Les oscillations locales en  $\mathbf{z} \in [0, 1]^d$  du processus empirique engendré par l'échantillon  $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_n$ , indexé par une classe de fonction  $\mathcal{F}$  s'exprime pour  $f \in \mathcal{F}$  de la façon suivante.

$$\alpha_n(\mathbf{z}, f) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left\{ f\left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{Z}_i}{h_n^{1/d}}\right) - Ef\left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{Z}_i}{h_n^{1/d}}\right) \right\}.$$

L'estimateur à noyau de  $f_{\mathbf{Z}}$  en  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$  est donné par

$$f_{K,n}(\mathbf{z}) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{Z}_i}{h_n^{1/d}}\right),$$

où  $K$  est un noyau, c'est à dire une fonction non-négative bornée à support borné, intégrable telle que  $\int_0^1 K(\mathbf{u})d\mathbf{u} = 1$ .

On remarque alors que

$$\frac{\alpha_n(\mathbf{z}, K)}{\sqrt{2f_{\mathbf{Z}}h_n \log(1/h_n)}} = \sqrt{\frac{nh_n}{2 \log(1/h_n)}} \frac{f_{K,n}(\mathbf{z}) - Ef_{K,n}(\mathbf{z})}{\sqrt{f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}}.$$

Or, nous avons calculé la dimension de l'ensemble des points où les oscillations du processus empirique renormalisées approchent une fonction cible de l'ensemble limite. Plus précisément, si

$$L(\Theta_\varphi) = \left\{ \mathbf{z} \in [0, 1]^d : \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\alpha_n(\mathbf{z}, f)}{\sqrt{2f_{\mathbf{Z}}h_n \log(1/h_n)}} - \Theta_\varphi \right\|_{\mathcal{F}} = 0 \right\},$$

alors,  $\dim L(\Theta_\varphi) = d \left( 1 - \int_{[0,1]^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right)$ . Ce résultat nous montre donc qu'il existe des points où  $f_{\mathbf{Z}}$  est mal estimé, même en utilisant une infinité d'estimateurs, c'est à dire une infinité de noyaux.



# Chapitre 4

## Espacements multivariés

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>121</b>
<b>4.2</b>	<b>Espacements multi-dimensionnels blocs</b>	<b>123</b>
<b>4.3</b>	<b>Démonstration du Théorème 4.2.2</b>	<b>124</b>
4.3.1	Borne supérieure pour $\dim V(c)$	124
4.3.2	Borne inférieure pour $\dim L(c)$	128
<b>4.4</b>	<b>Espacements multi-dimensionnels</b>	<b>134</b>

---

### 4.1 Introduction

De la même manière que nous avons obtenu des ensembles exceptionnels à partir des oscillations de processus empiriques et processus de Wiener, nous allons étudier les dimensions d'ensembles exceptionnels construits à partir des espacements d'une distribution uniforme. Contrairement à précédemment, les résultats dans ce domaine sont peu nombreux. On peut néanmoins citer l'article remarquable de Hawkes [61]. Afin d'exposer ses résultats, nous allons introduire quelques notations. Soit  $U_1, \dots, U_{n-1}$  un échantillon de  $n - 1$  variables indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Les statistiques d'ordre correspondantes sont notées

$$0 = U_0^{(n-1)} < U_1^{(n-1)} < \dots < U_{n-1}^{(n-1)} < U_n^{(n-1)} = 1.$$

Les *espacements uniformes* d'ordre  $n$  correspondent aux intervalles  $[U_{i-1}^{(n-1)}, U_i^{(n-1)})$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Ainsi, la longueur associée à l'espacement  $[U_{i-1}^{(n-1)}, U_i^{(n-1)})$  est donc

$$D_i^{(n)} = U_i^{(n-1)} - U_{i-1}^{(n-1)}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \quad (4.1.1)$$

Il existe une vaste littérature sur les résultats de distribution des espacements et les statistiques associées (voir Pyke [92]). L'étude de fonctions d'espacements telles que l'espacement uniforme maximal de rang  $n$ , noté  $M_n = \max_{1 \leq i \leq n+1} D_i^{(n)}$  débute avec les travaux de Lévy [73] et Darling [28]. En 1978, Slud [98] montre que  $nM_n - \log n = O(\log_2 n)$ , où  $\log_j$  est le logarithme itéré  $j$  fois. Devroye [43] affine ce résultat en montrant que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{nM_n - \log n}{2 \log_2 n} = 1 \quad \text{p.s.},$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{nM_n - \log n}{\log_2 n} = -1 \quad \text{p.s.}$$

Deheuvels [29] établit le résultat suivant, pour  $j \geq 4$ .

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (nM_n - \log n - 2 \log_2 n - \log_2 n - \dots - \log_{j-1} n) (\log_j n)^{-1} = 1 \quad \text{p.s.}$$

Hawkes [61] étudie le comportement local des espacements. Notons  $u_n(x)$  l'unique espacement contenant  $x \in [0, 1)$  et  $Z_n(x)$  sa longueur. Il montre le théorème suivant.

**Théorème 4.1.1.** *Avec probabilité 1,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{nZ_n(x)}{\log \log n} = 1, \quad (4.1.2)$$

pour presque tout  $x \in [0, 1)$ .

Pour comprendre le sens de ce théorème, rappelons le résultat suivant obtenu par Slud [98] en 1978.

**Théorème 4.1.2.** *Avec probabilité 1,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x \frac{nZ_n(x)}{\log n} = 1. \quad (4.1.3)$$

Au vu de ces résultats, Hawkes étudie les ensembles exceptionnels des points pour lesquels l'espacement est égal ou supérieur à l'ordre de grandeur donné dans le Théorème 4.1.2. Il montre qu'il s'agit d'ensembles fractals et calcule leur dimension de Hausdorff.

**Théorème 4.1.3.** *Soit, pour  $0 \leq c \leq 1$ ,*

$$D(c) = \{x \in [0, 1) : \limsup_{n \rightarrow \infty} nZ_n(x) / \log n = c\}, \quad (4.1.4)$$

et

$$U(c) = \{x \in [0, 1) : \limsup_{n \rightarrow \infty} nZ_n(x) / \log n > c\}. \quad (4.1.5)$$

Alors, presque sûrement,

$$\dim D(c) = 1 - c, \quad \text{et} \quad \dim U(c) = 1 - c. \quad (4.1.6)$$

Nous allons montrer une version plus générale de ce théorème, en considérant des variables uniformes à valeurs dans  $[0, 1]^d$ .

## 4.2 Espacements multi-dimensionnels blocs

L'étude des espacements multivariés commence avec les travaux de Deheuvels [30]. La définition qu'il propose (voir ci-dessous) n'est pas la seule possible. Nous pouvons citer en particulier Janson [64] et Deheuvels *et al.* [34].

**Définition 3.** Soit  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$  un échantillon de  $n$  variables aléatoires uniformément distribuées dans  $[0, 1]^d$ . On définit un *espacement bloc* d'ordre  $n$  comme tout sous-ensemble de  $[0, 1]^d$  de la forme  $\prod_{i=1}^d [a_i, a_i + c[$  (qu'on appelle pavé) qui ne contient aucun point parmi  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$  et qui ne peut pas être agrandi par stricte inclusion en un pavé ayant les mêmes propriétés (inclus dans  $[0, 1]^d$  et ne contenant aucun des  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$ ). L'espacement correspondant est défini par la longueur du côté du pavé.

REMARQUE 14. Avec probabilité 1, il existe une infinité d'espacements blocs distincts associés à une longueur d'espacement donnée.

REMARQUE 15. Dans le cas unidimensionnel ( $d = 1$ ), le nombre total d'espacements d'ordre  $n$  est égal à  $n + 1$ . Pour  $d \geq 2$ , le nombre total de longueurs d'espacements est inférieur à  $dC_{n+2}^2 - d$ .

REMARQUE 16. Nous verrons dans la section 4.4 que nous pouvons définir des espacements multi-dimensionnels plus généraux, qui ne se réduisent pas à des pavés mais peuvent adopter des formes plus générales.

Deheuvels [30] étudie le comportement asymptotique de ces espacements multidimensionnels. En notant  $M_{k,n}$  le  $k^{\text{ième}}$  plus grand espacement associé à  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$ . Il établit le théorème suivant.

**Théorème 4.2.1.** *Pour tout  $k \geq 1$ ,*

$$n\{M_{k,n}\}^d - \log n = O(\log_2 n) \quad p.s. \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (4.2.1)$$

Soit  $\mathbf{z} \in [0, 1]^d$ . Notons  $\chi_n(\mathbf{z})$  l'espacement (en terme de longueur) associé à  $\mathbf{z}$ . Considérons les ensembles suivants.

$$V(c) = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} n\chi_n^d(\mathbf{z}) / \log n > c\}, \quad (4.2.2)$$

$$L(c) = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} n\chi_n^d(\mathbf{z}) / \log n = c\}. \quad (4.2.3)$$

Nous allons établir le théorème suivant.

**Théorème 4.2.2.** *Si  $0 \leq c \leq 1$ , alors, presque sûrement,*

$$\dim V(c) = \dim L(c) = d(1 - c). \quad (4.2.4)$$

Nous ferons la démonstration de ce théorème en deux étapes. Dans la première, nous obtiendrons une borne supérieure pour  $\dim V(c)$  et dans la deuxième, une borne inférieure pour  $\dim L(c)$ .

## 4.3 Démonstration du Théorème 4.2.2

### 4.3.1 Borne supérieure pour $\dim V(c)$

Nous voulons montrer dans cette partie l'inégalité

$$\dim V(c) \leq d(1 - c). \quad (4.3.1)$$

Si (4.3.1) est vérifiée, en remarquant que  $L(c) \subseteq \bigcap_{n \geq 1} V(c - 1/n)$ , on en déduit que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\dim L(c) \leq d(1 - c + 1/n)$  et donc que

$$\dim L(c) \leq d(1 - c). \quad (4.3.2)$$

Nous allons donc montrer que l'inégalité (4.3.1) est bien vérifiée. Soit  $p \geq 1$  un entier positif. Posons  $v_j = j^{4p}$  pour  $j \geq 1$ . On introduit les ensembles

$$V_{p,j}(c) = \left\{ \mathbf{z} \in [0, 1]^d : v_j \chi_{v_j}^d(\mathbf{z}) > \left(c + \frac{1}{p}\right) \log v_j \right\},$$

et

$$V_p(c) = \left\{ \mathbf{z} \in [0, 1]^d : v_j \chi_{v_j}^d(\mathbf{z}) > \left(c + \frac{1}{p}\right) \log v_j, \text{ i.s. en } j \right\}.$$

Nous allons montrer que

$$V(c) = \bigcup_{p \geq 1} V_p(c). \quad (4.3.3)$$

L'inclusion  $\bigcup_{p \geq 1} V_p(c) \subseteq V(c)$  est évidente. Montrons l'inclusion opposée. Soit  $\mathbf{z} \in V(c)$ . Soit un entier  $p \geq 1$ , tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n \chi_n^d(\mathbf{z}) / \log n > c + 1/p.$$

Or, pour tout  $j$ , il existe un entier  $n$  tel que  $n - 1 \leq v_j = j^{2p} \leq n$ . Alors,

$$\frac{v_j \chi_{v_j}^d(\mathbf{z})}{\log v_j} \geq \frac{(n - 1) \chi_n^d(\mathbf{z})}{\log n} = \frac{n \chi_n^d(\mathbf{z})}{\log n} \frac{n - 1}{n}.$$

On obtient donc que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} v_j \chi_{v_j}^d(\mathbf{z}) / \log v_j > c + 1/p,$$

et donc  $V(c) \subseteq \bigcup_{p \geq 1} V_p(c)$ . Pour obtenir (4.3.1), il nous suffit donc de montrer que pour tout  $p \geq 1$ ,  $s^{d(1-c)} - \text{mes}(V_p(c)) = 0$  (on se référera au chapitre 1 pour des détails sur la mesure de Hausdorff et la dimension de Hausdorff). Pour cela, nous aurons besoin de nouvelles notations. Nous désignons par  $v_j$  la taille de l'échantillon considéré (nombre de variables) et  $\tau_j^{-1} = (c \log v_j / v_j)^{1/d}$ . Pour tout  $0 \leq i_1, \dots, i_d \leq \lceil \tau_j \rceil$  et  $j \geq 1$ , nous posons

$$J(i_1, \dots, i_d; j) = \prod_{r=1}^d \left[ \frac{i_r}{\tau_j}, \frac{i_r + 1}{\tau_j} \right]. \quad (4.3.4)$$

D'autre part, pour tout  $0 \leq i_1, \dots, i_d \leq \lfloor \tau_j \rfloor$  et  $j \geq 1$ ,

$$\mathbb{1}_{i_1, \dots, i_d; j} = \begin{cases} 1 & \text{si } J(i_1, \dots, i_d; j) \text{ contient au moins un coin d'un espacement de côté} \\ & \text{de longueur supérieure à } \left( (c + \frac{1}{p}) \frac{\log v_j}{v_j} \right)^{1/d}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.3.5)$$

et enfin,

$$I(i_1, \dots, i_d; j) = \begin{cases} J(i_1, \dots, i_d; j) & \text{si } \mathbb{1}_{i_1, \dots, i_d; j} = 1, \\ \emptyset & \text{si } \mathbb{1}_{i_1, \dots, i_d; j} = 0. \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Nous voyons facilement que  $\bigcup_{i_1=0}^{\lfloor \tau_j \rfloor} \dots \bigcup_{i_d=0}^{\lfloor \tau_j \rfloor} I(i_1, \dots, i_d; j)$  est un  $\sqrt{d}/\tau_j$ -recouvrement de  $V_p(c)$ . L'idée de la démonstration est donc de montrer que la dimension de

$$\bigcup_{i_1=0}^{\lfloor \tau_j \rfloor} \dots \bigcup_{i_d=0}^{\lfloor \tau_j \rfloor} I(i_1, \dots, i_d; j),$$

est inférieure à  $d(1-c)$ . En utilisant les propriétés de la dimension de Hausdorff, cela se ramène à montrer que

$$\sum_{j \geq 1} \mathbb{E} \sum_{i_1=0}^{\lfloor \tau_j \rfloor} \dots \sum_{i_d=0}^{\lfloor \tau_j \rfloor} |J(i_1, \dots, i_d; j)|^{d(1-c)} \mathbb{1}_{i_1, \dots, i_d; j} < \infty. \quad (4.3.7)$$

Pour montrer ce résultat, nous allons utiliser le lemme suivant.

**Lemme 4.3.1.** *Soit un échantillon  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{v_j}$ , de taille  $v_j$  et  $J$  un pavé de  $[0, 1]^d$  de côté de longueur  $\tau_j^{-1} = (c \log v_j / v_j)^{1/d}$ . Notons  $B_j$  le nombre d'espacements de  $J$  dont la longueur est supérieure à  $((c + 1/p) \log v_j / v_j)^{1/d}$ . Nous obtenons alors que, pour une constante  $a > 0$  et pour tout  $j$  suffisamment grand,*

$$P(B_j \geq 1) \leq a v_j^{-(c+1/2p)}. \quad (4.3.8)$$

*Démonstration.* Supposons que l'événement  $\{B_j \geq 1\}$  soit vérifié. Il existe alors un espacement  $\Delta_{v_j, p}$  de côté de longueur supérieure à

$$\left( (c + 1/p) \log v_j / v_j \right)^{1/d},$$

tel que  $\Delta_{v_j, p} \cap J \neq \emptyset$ . Soit alors  $R(\Delta_{v_j, p})$  le pavé de côté de longueur

$$\left( (c + 1/p) \log v_j / v_j \right)^{1/d},$$

ayant l'un de ses sommets coïncidant avec l'un des sommets de  $\Delta_{v_j, p}$ . Mais  $R(\Delta_{v_j, p})$  étant aléatoire, nous ne pouvons pas faire directement des calculs de probabilités. Nous procédons alors par recouvrement (en utilisant des pavés non aléatoires). Considérons une grille de pas  $1/2(1/2p)^{1/d}(\log v_j/v_j)^{1/d}$  sur le pavé  $J$ . Pour la suite, nous noterons  $K_m$ ,  $1 \leq m \leq K$  les pavés de sommets courant sur la grille, de côté de longueur  $(c + 1/2p) \log v_j/v_j$ , avec

$$K = \left( \frac{\left( \frac{c \log v_j}{v_j} \right)^{1/d}}{\frac{1}{2} \left( \frac{\log v_j}{2pv_j} \right)^{1/d}} \right)^d = c2^d 2p. \quad (4.3.9)$$

Pour l'expliquer autrement, pour chaque point de la grille nous construisons les  $2^d$  hypercubes tous de côté de longueur  $((c + 1/2p) \log v_j/v_j)^{1/d}$  correspondant à ce point. Puisque  $R(\Delta_{v_j, p})$  est vide, au moins l'un des  $K_m$ ,  $1 \leq m \leq K$  est également vide. Cela est vrai car

$$\left( (c + 1/p) \frac{\log v_j}{v_j} \right)^{1/d} \geq \left( (c + 1/2p) \frac{\log v_j}{v_j} \right)^{1/d} + 2 \times 1/2(1/2p)^{1/d}(\log v_j/v_j)^{1/d}.$$

Ainsi,

$$P(B_j \geq 1) \leq \sum_{m=1}^K P(K_m \text{ ne contient aucun des } \mathbf{U}_i).$$

Or

$$\begin{aligned} P(K_m \text{ ne contient aucun des } \mathbf{U}_i) &= K \left( 1 - \frac{(c + 1/2p) \log v_j}{v_j} \right)^{v_j} \\ &= (1 + o(1)) \frac{K}{v_j^{c+1/2p}}. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc que pour une constante  $a > 0$ ,

$$P(B_j \geq 1) \leq \frac{a}{v_j^{c+1/2p}},$$

pour  $j$  suffisamment grand. □

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j \geq 1} \mathbb{E} \sum_{i_1=0}^{\lfloor \tau_j \rfloor} \dots \sum_{i_d=0}^{\lfloor \tau_j \rfloor} |J(i_1, \dots, i_d; j)|^{d(1-c)} \mathbf{1}_{i_1, \dots, i_d; j} \\
 &= \sum_{j \geq 1} \left( \frac{\sqrt{d}}{\tau_j} \right)^{d(1-c)} \tau_j^d P(B_j \geq 1) \\
 &\leq \sum_{j \geq 1} d^{d(1-c)/2} \tau_j^{dc} P(B_j \geq 1) \leq \sum_{j \geq 1} d^{d(1-c)/2} c 2^d 2p (c \log v_j)^{-c} \frac{v_j^c}{v_j^{c+1/2p}} \\
 &\leq b \sum_{j \geq 1} (\log v_j)^{-c} \frac{1}{v_j^{1/2p}},
 \end{aligned}$$

où  $b > 0$  est une constante. En se rappelant que  $v_j = j^{4p}$  nous pouvons en déduire que (4.3.7) est vérifiée et donc que (4.3.1) et (4.3.2) le sont aussi.

### 4.3.2 Borne inférieure pour $\dim L(c)$

Nous allons dans ce paragraphe, établir l'inégalité suivante.

$$\dim L(c) \geq d(1-c). \quad (4.3.10)$$

Cela suffit pour montrer le Théorème 4.2.2. En effet, supposons que (4.3.10) soit vérifiée. En remarquant que  $\bigcup_{n \geq 1} L(c + 1/n) \subseteq V(c)$ , nous avons alors  $\dim V(c) \geq d(1-c)$ . En combinant ce résultat avec (4.3.2) et (4.3.1), nous obtenons bien (4.2.4).

Soient  $A$  et  $B$  deux pavés de  $[0, 1]^d$ . La distance entre  $A$  et  $B$  est notée

$$d(A, B) = \min_{\mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (4.3.11)$$

Pour montrer (4.3.10), nous aurons besoin des deux lemmes suivants. Ce sont les analogues des lemmes 1.3.3 et 1.3.4, pour des ensembles inclus dans  $\mathbb{R}^d$ . Les démonstrations ci-dessous sont basées sur le « *principe de distribution de masse* » (voir p. 36).

**Lemme 4.3.2.** *Soit  $[0, 1]^d = E_0$  et pour tout entier  $j \geq 1$ ,  $E_j$  est une union finie de pavés disjoints fermés  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell(j)$ . On suppose que  $E_{j-1}$  contient au moins  $m_j$  pavés de  $E_j$  et que pour tout  $i \neq i' \in \{1, \dots, \ell(j)\}$ ,  $d(Q_i, Q_{i'}) \geq \varepsilon_j$  où  $0 < \varepsilon_{j+1} < \varepsilon_j$ . Alors,*

$$\dim \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} d \frac{\log(m_1 \dots m_{j-1})}{-\log(m_j \varepsilon_j^d)}. \quad (4.3.12)$$

*Démonstration.* On suppose que  $E_{j-1}$  contient exactement  $m_j$  pavés de  $E_j$ . Si ce n'est pas le cas, on élimine les pavés en trop, ce qui ne changera pas la borne inférieure (4.3.12). On définit une mesure positive  $\mu$  sur  $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ , en attribuant à chacun des  $m_1 \dots m_j$  pavés de  $E_j$  la mesure (ou *masse*)  $(m_1 \dots m_j)^{-1}$ .

Soit  $U$  un pavé tel que  $0 < \text{vol}(U) < \varepsilon_1^d$ ,  $\text{vol}(U)$  représentant la mesure de Lebesgue de  $U$ . Rappelons également que  $|U|$  désigne le diamètre de  $U$ . Nous voulons estimer  $\mu(U)$ . Soit  $j$  l'entier tel que

$$\varepsilon_j^d \leq \text{vol}(U) < \varepsilon_{j-1}^d. \quad (4.3.13)$$

Le nombre de pavés de  $E_j$  qui rencontrent  $U$  est

- (i) au plus  $m_j$  puisque  $U$  rencontre au plus un pavé de  $E_{j-1}$ ,
- (ii) au plus  $\left(\frac{|U|}{\sqrt{d}\varepsilon_j} + 1\right)^d \leq 2^d \frac{\text{vol}(U)}{\varepsilon_j^d}$ .

Le deuxième point s'explique par le fait que les hypercubes de  $E_j$  sont espacés d'une distance d'au moins  $\varepsilon_j$ . Or d'après (4.3.13),  $1 \leq \frac{|U|}{\varepsilon_j \sqrt{d}}$ . L'inégalité (ii) se démontre alors naturellement. Nous trouvons donc que

$$\begin{aligned} \mu(U) &\leq (m_1 \dots m_j)^{-1} \min \left\{ 2^d \frac{\text{vol}(U)}{\varepsilon_j^d}, m_j \right\} \\ &\leq (m_1 \dots m_j)^{-1} \left( 2^d \frac{\text{vol}(U)}{\varepsilon_j^d} \right)^s m_j^{1-s}, \end{aligned}$$

pour tout  $0 \leq s \leq 1$ . Ainsi,

$$\frac{\mu(U)}{|U|^{ds}} \leq \frac{2^{ds} d^{-ds/2}}{(m_1 \dots m_{j-1}) m_j^s \varepsilon_j^{ds}}. \quad (4.3.14)$$

Or, (4.3.14) est borné par une constante ssi

$$s < \liminf_{j \rightarrow \infty} \log(m_1 \dots m_{j-1}) / -\log(m_j \varepsilon_j^d).$$

Le résultat se déduit directement de l'application du « principe de distribution de masse ». □

**Lemme 4.3.3.** Soit  $0 < s < 1$  et soit  $n_1, n_2, \dots$  une suite croissante d'entiers telle que  $n_{j+1} \geq \max\{n_j^j, 4n_j^{1/s}\}$  pour tout  $j$ . Pour tout  $j$ , soit  $H_j \subset \mathbb{R}^d$  les pavés de côtés de longueur  $n_j^{-1/s}$ , la longueur entre les milieux de pavés consécutifs étant de  $n_j^{-1}$ . Alors

$$\dim \bigcap_{j=1}^{\infty} H_j \geq ds. \quad (4.3.15)$$

*Démonstration.* Soit  $E_0 = [0, 1]^d$  et pour tout  $j \geq 1$ ,  $E_j$  correspond aux pavés de  $H_j$  inclus dans  $E_{j-1}$ . Ainsi, chaque pavé  $I$  de  $E_{j-1}$  contient au moins  $(n_{j-1}^{-1/s} n_j - 2)^d \geq 2^d$  pavés de  $E_j$ . De plus, la distance entre deux pavés consécutifs de  $E_j$  (voir (4.3.11)) est au moins de  $n_j^{-1} - n_j^{-1/s} \geq 1/2n_j^{-1}$  pour  $j$  suffisamment grand. On applique alors le Lemme 4.3.2, en remarquant que remplacer  $(n_{j-1}^{-1/s} n_j - 2)^d$  par  $n_{j-1}^{-d/s} n_j^{-d}$  ne change pas la limite.

$$\dim \bigcap_{j=1}^{\infty} H_j \geq \dim \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \liminf_{j \rightarrow \infty} d \frac{\log((n_1 n_2 \dots n_{j-2})^{d-d/s} n_{j-1}^d)}{-\log(n_{j-1}^{-d/s} n_j^d n_j^{-d}) - \log 2^d}. \quad (4.3.16)$$

Puisque  $n_{j+1} \geq n_j^j$ , alors  $\log n_{j-1}$  est le terme dominant dans le numérateur et le dénominateur. Or,

$$d \frac{\log n_{j-1}^d}{-\log n_{j-1}^{-d/s}} = d \frac{d}{d/s} = ds.$$

La conclusion du Lemme 4.3.3 est alors immédiate.  $\square$

Expliquons en quelques mots l'idée de la démonstration. Nous construisons un réseau sur  $[0, 1]^d$ . Pour  $K_j$  un entier suffisamment grand, les pavés  $\Pi_{r=1}^d [i_r/K_j, (i_r + 1)/K_j]$  sont les composants du réseau. Nous montrons que « la plupart » des pavés du réseau contiennent un sous-espacement  $T(i_1, \dots, i_d, j)$  d'un échantillon de taille  $N_j$ , dont la longueur des côtés est à peu près  $(c \log N_j)/N_j$ . Alors, l'ensemble

$$A_j = \bigcup_{i_1, \dots, i_d \text{ pairs}} T(i_1, \dots, i_d, j),$$

est constitué de  $(1/2K_j)^d$  pavés de côtés de longueur  $(c \log N_j)/N_j$ , séparés par une distance d'au moins  $1/K_j$ . Nous vérifierons que nous pouvons appliquer le Lemme 4.3.3 à  $A_j$  et que le nombre de pavés du réseau qui ne contiennent pas d'espacement de la longueur considérée est « petit »

Nous avons donc besoin de résultats sur la distribution des espacements. Soit  $\{\delta_j, j \geq 1\}$  une suite décroissant vers 0. La suite  $\{N_j, j \geq 1\}$  correspond à la taille de l'échantillon considéré. Elle vérifiera les conditions suivantes.

N1) La suite  $N_j$  est croissante et croît suffisamment vite pour que la suite  $n_j = \lfloor \nu_j \rfloor = \lfloor (c \log N_j / N_j)^{-(1-c)/d} \rfloor$  vérifie les conditions du Lemme 4.3.3, c'est à dire  $n_{j+1} \geq \max\{n_j^j, 4n_j^{1/s}\}$  pour tout  $j$ .

N2) La série  $\sum_{j \geq 1} N_j^{-(c+2\delta_j)} - \frac{2^{2d}}{\delta_j} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{2-c}$  est convergente.

**Lemme 4.3.4.** *Supposons que  $0 \leq c \leq 1$  et que  $\{\delta_j, j \geq 1\}$  soit une suite décroissante vers 0. Soit  $J$  un pavé de  $[0, 1]^d$ , de côté de longueur  $\nu_j^{-1}$ . Pour tout  $j \geq 1$ , notons  $M_j$  le nombre d'espacements de  $J$  dont la longueur des côtés est comprise dans l'intervalle*

$$\left[ \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{\frac{1}{d}}, \left( \frac{(c + \delta_j) \log N_j}{N_j} \right)^{\frac{1}{d}} \right].$$

Alors,

$$\sum_{j \geq 1} P(M_j = 0) < \infty. \quad (4.3.17)$$

*Démonstration.* Pour tout  $j \geq 1$ , notons  $C_j$  le nombre d'espacements de  $J$ , de côté de longueur strictement inférieure à  $(c \log N_j / N_j)^{1/d}$ . De plus reprenons la définition de  $B_j$  du lemme 4.3.1 en remplaçant  $1/p$  par  $\delta_j$ ,  $\tau_j$  par  $\nu_j$  et  $v_j$  par  $N_j$ . Nous pouvons alors remarquer que

$$P(M_j \geq 1) \geq P(B_j = 0) \times P(C_j = 0). \quad (4.3.18)$$

Supposons que  $\{C_j \geq 1\}$ . Il existe donc un espacement  $\Upsilon$  de côté de longueur strictement inférieure à  $(c \log N_j / N_j)^{1/d}$ . Soit  $Q$  un pavé de  $[0, 1]^d$  de côté de longueur  $(c \log N_j / N_j)^{1/d}$  et tel que  $\Upsilon \subset Q$ . Comme précédemment, puisque  $Q$  dépend de l'échantillon, nous ne pouvons calculer de probabilité l'utilisant. Nous construisons alors sur le pavé  $J$  une grille de pas  $\delta_j^{1/d} (\log N_j / N_j)^{1/d} / 2$  et sur chaque point, 4 hypercubes de côté de longueur  $((c + \delta_j) \log N_j / N_j)^{1/d}$ . Le nombre de pavés construits sur la grille est donné par la formule suivante.

$$2^d \left( \frac{\left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{\frac{1-c}{d}}}{\frac{\delta_j^{1/d}}{2} \left( \frac{\log N_j}{N_j} \right)^{1/d}} \right)^d = \frac{2^{2d}}{\delta_j} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{-c}. \quad (4.3.19)$$

Puisque  $\Upsilon$  est un espacement inclus dans  $Q$ ,  $Q$  contient au moins 2 points de l'échantillon  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$  Ainsi, puisque

$$(c + \delta_j)^{1/d} \left( \frac{\log N_j}{N_j} \right)^{1/d} \geq \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{1/d} + 2 \times \frac{\delta_j^{1/d}}{2} \left( \frac{\log N_j}{N_j} \right)^{1/d},$$

il existe au moins un pavé de la grille qui contient au moins 2 points de l'échantillon. Ce qui signifie que

$$\begin{aligned} P(C_j \geq 1) &\leq \frac{2^{2d}}{\delta_j} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{-c} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^2 \\ &\leq \frac{2^{2d}}{\delta_j} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{2-c}. \end{aligned}$$

Donc,

$$P(C_j = 0) \geq 1 - \frac{2^{2d}}{\delta_j} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{2-c}. \quad (4.3.20)$$

Alors, (4.3.8) et (4.3.20) impliquent que

$$\begin{aligned} P(M_j \geq 1) &\geq \left( 1 - \frac{1}{N_j^{c+2\delta_j}} \right) \left( 1 - \frac{2^{2d}}{\delta_j} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{2-c} \right) \\ &\geq 1 - \frac{2^{2d}}{\delta_j} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{2-c} - \frac{1}{N_j^{c+2\delta_j}} + \frac{2^{2d}}{\delta_j} \frac{1}{N_j^{c+2\delta_j}} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{2-c}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(M_j = 0) \leq \frac{1}{N_j^{c+2\delta_j}} + \frac{2^{2d}}{\delta_j} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{2-c} - \frac{2^{2d}}{\delta_j} \frac{1}{N_j^{c+2\delta_j}} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{2-c}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_j^{c+2\delta_j}} + \frac{2^{2d}}{\delta_j} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{2-c} - \frac{2^{2d}}{\delta_j} \frac{1}{N_j^{c+2\delta_j}} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{2-c} \\ = (1 + o(1)) \left( \frac{1}{N_j^{c+2\delta_j}} - \frac{2^{2d}}{\delta_j} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{2-c} \right). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc que pour  $j$  suffisamment grand,

$$P(M_j = 0) \leq \frac{1}{N_j^{c+2\delta_j}} - \frac{2^{2d}}{\delta_j} \left( \frac{c \log N_j}{N_j} \right)^{2-c}.$$

Nous utilisons enfin la condition N2) pour obtenir la conclusion de ce lemme.  $\square$

Nous allons maintenant démontrer l'inégalité (4.3.10). Rappelons d'abord que  $\nu_j^{-1} = (c \log N_j / N_j)^{(1-c)/d}$ . Pour tout  $0 \leq i_1, \dots, i_d \leq \lfloor \nu_j \rfloor$ , nous posons

$$J(i_1, \dots, i_d, j) = \prod_{r=1}^d [i_r \nu_j^{-1}, (i_r + 1) \nu_j^{-1}).$$

Si  $J(i_1, \dots, i_d, j)$  contient un espacement (de l'échantillon de taille  $N_j$ ) de côté de longueur dans

$$\left[ \left( c \frac{\log N_j}{N_j} \right)^{1/d}, \left( (c + \delta_j) \frac{\log N_j}{N_j} \right)^{1/d} \right],$$

(c'est le cas si  $M_j \geq 1$ ), on choisit cet espacement et on l'appelle  $T(i_1, \dots, i_d, j)$ . Sinon, on prend n'importe quel pavé de côté de longueur  $(c \log N_j / N_j)^{1/d}$  et on l'appelle  $S(i_1, \dots, i_d, j)$ . On définit ensuite

$$S_j = \bigcup_{i_1, \dots, i_d \text{ pairs}} S(i_1, \dots, i_d, j); \quad T_j = \bigcup_{i_1, \dots, i_d \text{ pairs}} T(i_1, \dots, i_d, j);$$

et enfin

$$R_j = S_j \cup T_j; \quad R = \bigcap_{j \geq 1} R_j; \quad S = \bigcap_{j \geq 1} S_j; \quad T = \bigcap_{j \geq 1} T_j. \quad (4.3.21)$$

Par construction, les  $R_j$  sont des pavés dont le côté a une longueur comprise entre  $(c \log N_j / N_j)^{1/d}$  et  $((c + \delta_j) \log N_j / N_j)^{1/d}$  et chacun séparé par une distance supérieure à  $(c \log N_j / N_j)^{(1-c)/d}$ . Remarquons que le Lemme 4.3.3 est encore vrai lorsque les pavés  $H_j$  ont des côtés de longueur équivalente à  $n_j^{-1/s}$ . En utilisant la condition N1), nous pouvons alors appliquer le Lemme 4.3.3 avec  $n_j^{-1} = \nu_j^{-1} = (c \log N_j / N_j)^{(1-c)/d}$  et  $s = 1 - c$ . Nous obtenons donc que

$$\dim R \geq d(1 - c). \quad (4.3.22)$$

Or, d'après (4.3.21)  $R = S \cup T$  et  $T \cap V(c) \subset L(c)$ . De plus, (4.3.22) nous permet d'affirmer que  $s^{d(1-c)} - \text{mes}(R) > 0$ . Donc si nous montrons que  $s^{d(1-c)} - \text{mes}(S) = 0$ , nous aurons alors  $s^{d(1-c)} - \text{mes}(L(c)) > 0$  et donc (4.3.10). Pour cela, nous savons que les  $S(i_1, \dots, i_d, j)$ ,  $0 \leq i_1, \dots, i_d \leq \lfloor \nu_j \rfloor$ , forment un recouvrement de  $S$ . Il faut donc que

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{i_1=0}^{\lfloor \nu_j \rfloor} \dots \sum_{i_d=0}^{\lfloor \nu_j \rfloor} |S(i_1, \dots, i_d, j)|^{d(1-c)} < \infty,$$

où  $|A|$  désigne le diamètre de  $A$ . Or, pour montrer l'inégalité précédente, il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} \mathbb{E} \sum_{i_1=0}^{\lfloor \nu_j \rfloor} \dots \sum_{i_d=0}^{\lfloor \nu_j \rfloor} |S(i_1, \dots, i_d, j)|^{d(1-c)} \\ = \sum_{j \geq 1} \left(\frac{1}{2}\nu_j\right)^d P(M_j = 0) \left(\frac{c \log N_j}{N_j}\right)^{1-c} < \infty. \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

Mais, en se rappelant que  $\nu_j^{-1} = (c \log N_j / N_j)^{(1-c)/d}$ , on trouve en remplaçant  $\nu_j$  dans (4.3.23) et en utilisant le Lemme 4.3.4, que

$$\sum_{j \geq 1} \left(\frac{1}{2}\nu_j\right)^d P(M_j = 0) \left(\frac{c \log N_j}{N_j}\right)^{1-c} = \sum_{j \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^d P(M_j = 0) < \infty.$$

Nous avons ainsi obtenu l'inégalité suivante.

$$s^{d(1-c)} - \text{mes}(L(c)) > 0.$$

Nous pouvons donc en conclure que

$$\dim L(c) \geq d(1-c) \text{ et } \dim V(c) \geq d(1-c).$$

Le Théorème 4.2.2 est donc démontré.

## 4.4 Espacements multi-dimensionnels

Au vu des précédents résultats, il est naturel de se demander si ceux-ci resteraient valables, si au lieu de se restreindre à des espacements blocs, nous autorisons les espacements à prendre des formes plus générales, comme par exemple des boules, ou des boréliens quelconques parmi un famille d'ensembles convenables. Cette question a été soulevée par Deheuvels [30] à la fin de son article et une nouvelle définition plus générale d'*espacements multi-dimensionnels* est donnée par Deheuvels *et al.* [34]. Les formes autorisées doivent satisfaire certaines conditions d'« entropie ».

Nous allons dans un premier temps donner la définition d'*espacements multi-dimensionnels*, puis nous étudierons le comportement asymptotique d'ensembles de points analogues aux précédents.

Rappelons quelques notations. Nous considérons l'échantillon  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$  de  $n$  variables aléatoires uniformément distribuées sur  $[0, 1]^d$ . Nous rappelons que la mesure empirique d'un borélien  $B$  de  $[0, 1]^d$  au rang  $n$  est définie par

$$\mu_n(B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\mathbf{U}_i \in B\}} = \frac{1}{n} \#\{\mathbf{U}_i \in B, 1 \leq i \leq n\}.$$

Notons  $\mathbf{B}^d$  la classe de tous les boréliens de  $[0, 1]^d$ . Soit  $\mathbf{C} \subset \mathbf{B}^d$  une classe de sous-ensembles de  $[0, 1]^d$  telle que

(C.1)  $\emptyset \in \mathbf{C}$  et  $[0, 1]^d \in \mathbf{C}$ ,

(C.2) Pour tout  $a > 0$  « petit »,  $\mathbf{C}_a = \{C \in \mathbf{C} : \lambda(C) = a\}$  est non-vide, où  $\lambda$  dénote la mesure de Lebesgue,

(C.3) Pour tout  $a > 0$  « petit », si  $C \in \mathbf{C}$  et  $\lambda(C) > a$ , il existe  $C' \in \mathbf{C}_a$  tel que  $C' \subset C$ ,

(C.4) Pour tout  $a > 0$  « petit », si  $C \in \mathbf{C}$  est tel que  $\lambda(C) < a$ , alors, il existe  $C' \in \mathbf{C}_a$ , tel que  $C \subset C'$ .

Nous donnons une définition d'un espacement multivarié.

**Définition 4.** Soit  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots$  une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur  $[0, 1]^d$ . On définit un espacement multivarié de rang  $n$ , relativement à la classe  $\mathbf{C}$ , tout ensemble  $C \in \mathbf{C}$  tel que  $C$  ne contient aucun des  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$  et  $C$  ne peut être élargi au sens de l'inclusion en un ensemble  $C' \in \mathbf{C}$  ayant les mêmes propriétés (c'est à dire que  $C'$  ne contienne aucun des  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$ ). L'espacement est alors le volume de  $C$  (au sens de la mesure de Lebesgue).

Soit  $\mathbf{z} \in [0, 1]^d$ . On définit, relativement à  $\mathbf{C}$ , (noté w.r.t  $\mathbf{C}$  pour la traduction anglaise *with respect to*) l'espacement multi-dimensionnel contenant  $\mathbf{z}$  associé à l'échantillon  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$ , par

$$S_n(\mathbf{z}) = \sup \left\{ \lambda(C) : C \in \mathbf{C}, C \ni \mathbf{z} \text{ et } n\mu_n(C) = 0 \right\}. \quad (4.4.1)$$

Clairement,  $S_n(\mathbf{z})$  dépend de la « quantité » de formes autorisées pour les espacements. On se place donc dans le cadre de l'article de Deheuvels *et al.* [34], qui pour caractériser cette « quantité », définissent les nombres suivants. Soit  $\mathbf{E} \subset \mathbf{B}^d$  une classe d'ensembles,  $\mathbf{E}_a = \{E \in \mathbf{E} : \lambda(E) = a\}$ .

Pour tout  $0 < (l - \nu)a < a < 1$ ,

$$N_{\mathbf{E}}(a, \nu) = \begin{cases} \min\{m \geq 1 : \text{il existe des ensembles } B_1, \dots, B_m \in \mathbf{B}^d \\ \text{tels que pour tout } E \in \mathbf{E}_a, B_i \subset E, \\ \text{et } \lambda(E - B_i) \leq \nu a \text{ pour } 1 \leq i \leq m\}, \\ \infty \text{ s'il n'existe pas un tel } m \geq 1, \end{cases}$$

et pour tout  $0 < a < 1$ ,

$$K_{\mathbf{E}}(a) = \begin{cases} \max\{m \geq 1 : \text{il existe des ensembles } E_1, \dots, E_m \in \mathbf{B}^d \\ \text{tels que } \lambda(E_i \cap E_j) = 0 \text{ pour tout } i \neq j, \\ \text{pour } 1 \leq i, j \leq m\}, \\ 0 \text{ s'il n'existe pas un tel } m \geq 1. \end{cases}$$

Nous nous plaçons donc dans le cas où les deux conditions suivantes sont vérifiées.

$$Q1) \limsup_{a \downarrow 0} \log N_{\mathbf{C}}(a, \nu) / \log(1/a) \leq 1 \quad \text{pour } \nu > 0 \text{ petit,}$$

$$Q2) \liminf_{a \downarrow 0} \log K_{\mathbf{C}}(a) / \log(1/a) \geq 1.$$

Considérons alors les ensembles suivants.

$$W(c) = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} nS_n(\mathbf{z}) / \log n > c\}, \quad (4.4.2)$$

$$\mathcal{U}(c) = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} nS_n(\mathbf{z}) / \log n = c\}. \quad (4.4.3)$$

Ce sont les analogues respectifs de (4.2.2) et (4.2.3).

**Théorème 4.4.1.** *Relativement à la classe  $\mathbf{C}$  définie plus haut, sous les conditions Q1) et Q2), si  $0 \leq c \leq 1$ , alors, presque sûrement,*

$$\dim W(c) = \dim \mathcal{U}(c) = d(1 - c). \quad (4.4.4)$$

La démonstration de ce théorème étant très similaire à celle du théorème 4.2.2, on ne la réécrit pas.

REMARQUE 17. Les conditions Q1) et Q2) sont les mêmes que celles données par Deheuvels *et al.* [34]. Elles nous permettent de limiter la quantité d'ensembles appartenant

à la classe  $\mathbf{C}$ . Les quantités  $N_{\mathbf{C}}(a, \nu)$  et  $K_{\mathbf{C}}(a)$  sont liées au concepts de l' $\varepsilon$ -entropie et l' $\varepsilon$ -capacité (voir par exemple l'article de Kolmogorov et Tihomirov [68]). Dans la démonstration du Théorème 4.4.1, Q1) intervient dans le lemme 4.3.1, où (4.3.9) est remplacée par

$$K' = N_{\mathbf{C}}\left(\left(c + 1/(2p)\right) \frac{\log v_j}{v_j}, \nu\right) \times \frac{c \log v_j}{v_j}.$$

La condition Q1) permettra de ne pas avoir  $K'$  trop grand. Elle est utilisée de la même façon dans le Lemme 4.3.4 (voir (4.3.19)). La condition Q2) intervient dans la démonstration de la borne inférieure lors de la construction d'un réseau d'ensembles disjoints.



# Chapitre 5

## Propositions de perspectives sur l'étude des espacements

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Mesure de Hausdorff exacte</b>	<b>139</b>
<b>5.2</b>	<b>Processus empirique des espacements</b>	<b>146</b>
5.2.1	Introduction	146
5.2.2	Oscillations exceptionnelles	151
5.2.3	Conclusion	153

---

### 5.1 Mesure de Hausdorff exacte

Les travaux présentés ci-dessus pourraient être prolongés par l'étude de la *mesure de Hausdorff exacte*. Nous allons exposer les résultats de la littérature qui nous ont amenés à proposer cette direction de recherche. En 1954, Lévy [74] étudie la continuité uniforme du processus de Wiener  $\{W(t); t \geq 0\}$ . Afin d'avoir plus de précisions quant aux grandes valeurs de  $|W(t+h) - W(t)|$  quand  $h \downarrow 0$ , deux groupes de fonctions sont définis : la classe supérieure  $\mathcal{U}$  et la classe inférieure  $\mathcal{V}$ . Notons  $\Phi$  la classe de fonctions  $\varphi$  vérifiant certaines conditions que nous n'explicitons pas ici. La fonction  $\varphi \in \Phi$  appartient à  $\mathcal{U}$  si pour  $t$  donné,

$$|W(t+h) - W(t)| < (2h)^{\frac{1}{2}}\varphi(h),$$

pour  $h$  suffisamment petit.  $\mathcal{V}$  est le complément de  $\mathcal{U}$  dans  $\Phi$ . Lévy [72] montre que la fonction

$$\varphi(t) = c(2 \log t)^{\frac{1}{2}},$$

appartient à  $\mathcal{U}$  (resp.  $\mathcal{V}$ ) si  $c > 1$  (resp.  $c < 1$ ). Le résultat suivant est un *test intégral* qui permet de conclure quant à l'appartenance à une classe ou l'autre selon la convergence de l'intégrale.

**Théorème 5.1.1.** *Une fonction  $\varphi$  positive, continue et strictement croissante appartient à la classe supérieure ou inférieure selon que l'intégrale*

$$\int^{\infty} \varphi^3(t) e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)} dt$$

*converge ou diverge.*

Ce résultat est démontré par Chung, Erdős et Sirao [23]. Jain et Taylor [63] obtiennent un résultat similaire pour le processus de Wiener à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . En 1977, Kôno [70] utilise ce principe de *test intégral* pour obtenir la mesure de Hausdorff des points d'irrégularité du mouvement brownien. Ses résultats sont motivés par les travaux d'Orey et Taylor [90] dont nous avons déjà largement parlé p.73 et de Jain et Taylor [63]. Il définit  $\{W^d(t); 0 \leq t \leq 1\}$  un processus de Wiener standard, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et  $\phi$  une fonction positive, continue telle que

$$\phi(x) \uparrow \infty \quad (x \downarrow 0). \tag{5.1.1}$$

De plus,  $\mathcal{S}$  est la classe des couples  $\{(u_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$  de suites telles que  $u_n \geq 0, v_n \geq 0, \frac{1}{2} \geq u_n + v_n > 0$  et  $u_n + v_n \downarrow 0$  ( $n \uparrow \infty$ ). Kôno [70] définit l'ensemble suivant, pour  $\phi$  sous la condition (5.1.1).

$$E(\phi) = \{0 < t < 1; \exists \{(u_n, v_n)\} \in \mathcal{S} \\ \|W^d(t + u_n) - W^d(t - v_n)\| > \sqrt{u_n + v_n} \phi(u_n + v_n)\}. \tag{5.1.2}$$

Il s'intéresse alors à la mesure de Hausdorff de cet ensemble. Nous utilisons ici la forme générale de la définition de la mesure de Hausdorff d'un ensemble  $A$ , pour une fonction  $h$  notée  $h - m(A)$ . La fonction  $h$  est une fonction positive, continue, telle que

$$h(x) \downarrow 0 \text{ quand } x \downarrow 0, \tag{5.1.3}$$

et

$$h(x)/x \uparrow \infty \text{ quand } x \downarrow 0. \quad (5.1.4)$$

On définit la mesure de Hausdorff sur l'ensemble de  $A$  par

$$h - m(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \inf \left\{ \sum_{i \geq 1} h(|U_i|) : \{U_i\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } A \right\} \right], \quad (5.1.5)$$

où l'infimum est pris sur toutes les collections de  $\delta$ -recouvrements  $\{U_i : i \geq 1\}$  de  $A$ . Il est clair qu'il suffit de prendre  $h(x) = x^c$  pour retrouver la définition habituelle. Kôno établit le résultat suivant.

**Théorème 5.1.2.** *Sous la condition 5.1.1 et pour  $n$  suffisamment grand,*

$$\phi(2^{-n-2}) \leq 2^{10} 10^{-3} \phi(2^{-n-2} n^5), \quad (5.1.6)$$

alors,

$$h - m(E(\phi)) = 0 \quad (\text{resp. } \infty) \quad p.s.$$

si et seulement si l'intégrale

$$I(h, \phi) = \int_{+0} x^{-2} \phi^{d+2}(x) e^{-\phi^2(x)/2} h(x) dx$$

converge (resp. diverge).

Ce que nous proposons serait d'obtenir un analogue de ce théorème pour les espacements. Rappelons brièvement les notations et résultats obtenus sur les espacements, au cours de ce chapitre. Soit  $U_1, \dots, U_n$  un échantillon de variables aléatoires uniformément distribuées dans  $(0, 1)$ . Nous avons noté  $u_n(x)$  l'unique espacement contenant  $x \in [0, 1)$  et  $Z_n(x)$  sa longueur. Hawkes a établi le résultat suivant.

**Théorème 5.1.3.** *Soit, pour  $0 \leq c \leq 1$ ,*

$$D(c) = \{x \in [0, 1) : \limsup_{n \rightarrow \infty} nZ_n(x)/\log n = c\},$$

et

$$U(c) = \{x \in [0, 1) : \limsup_{n \rightarrow \infty} nZ_n(x)/\log n > c\}.$$

Alors, presque sûrement,

$$\dim D(c) = 1 - c, \quad \text{et} \quad \dim U(c) = 1 - c.$$

Soit  $\varphi$  une fonction vérifiant les conditions suivantes.

$$\varphi(x) \rightarrow \infty \text{ et } \varphi(x)/x \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow \infty. \quad (5.1.7)$$

Dans le même esprit que Kôno, nous définissons, pour toute fonction  $\varphi$  vérifiant (5.1.7), l'ensemble

$$F(\varphi) = \{x \in [0, 1] : Z_n(x) > \frac{\varphi(n)}{n} \text{ i.s. en } n\}. \quad (5.1.8)$$

Nous conjecturons que le théorème à obtenir devrait être le suivant.

**Conjecture 5.1.4.** *Sous certaines conditions,*

$$h - m(F(\varphi)) = 0 \quad (\text{resp. } +\infty) \quad p.s. \quad (5.1.9)$$

*si et seulement si*

$$J(h, \varphi) = \int_0^\infty e^{-\varphi(x)} h\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (5.1.10)$$

*converge (resp. diverge).*

La borne supérieure reste comme d'habitude la partie la plus simple à montrer. En effet, nous voulons montrer que la convergence de  $J(h, \varphi)$  implique que  $h - m(F(\varphi)) = 0$ . Pour  $k = 1, 2, \dots$ , notons  $\nu_k = 2^k$  et  $t_i^k = i/\nu_k$ ,  $i = 0, \dots, \nu_k$ . Nous introduisons alors l'ensemble

$$A_i^k = \left\{ \sup_{s \in [t_i^k, t_{i+1}^k]} |Z_{\nu_k}(s)| > \frac{\varphi(\nu_k)}{\nu_k} \right\}. \quad (5.1.11)$$

En utilisant le même raisonnement que pour le Lemme 4.3.1, ainsi que la condition (5.1.7), nous obtenons que

$$\begin{aligned} P(A_i^k) &\leq \left(1 - \frac{\varphi(\nu_k)}{\nu_k}\right)^{\nu_k} \\ &= (1 + o(1)) \exp\{-\varphi(\nu_k)\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\nu_k} P(A_i^k) h(|[t_i^k, t_{i+1}^k]|) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\nu_k} \exp\{-\varphi(\nu_k)\} h(\nu_k^{-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \exp\{-\varphi(\nu_k)\} h(\nu_k^{-1}) \\ &\leq \int_0^\infty \exp\{-\varphi(x)\} h(1/x) dx. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, la conclusion est alors immédiate. Pour la borne inférieure, nous supposons que  $J(h, \varphi) = \infty$  et nous voulons montrer l'inégalité

$$h - m(F(\varphi)) > 0. \quad (5.1.12)$$

Pour cela, nous allons utiliser un résultat d'Eggleston [48], dans la version donnée par Hawkes [61] (Lemma 1, p.299).

**Lemme 5.1.5.** *Soit  $m_j$  une suite d'entiers et soient  $d_j$  et  $\rho_j$  deux suites décroissantes d'entiers. On suppose que  $R_0 = [0, 1]$  et  $R_j$  correspond aux intervalles de longueur au moins  $d_j$ , séparés d'une distance d'au moins  $\rho_j$  et chaque intervalle de  $R_j$  contient au moins  $m_{j+1}$  intervalles de  $R_{j+1}$ . Alors, si  $L_j = \prod_{i \leq j} m_i$  et*

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} h(d_j)L_{j+1}\rho_{j+1}/d_j \geq \delta > 0, \quad (5.1.13)$$

l'ensemble  $h - m(\bigcap_{j \geq 0} R_j) > 0$ .

*Démonstration.* Voir le théorème 6, page 56 d'Eggleston [48]. □

L'idée de la démonstration est la même que celle utilisée précédemment (voir p. 130). Soit  $\{\delta_j, j \geq 1\}$  une suite décroissant vers 0. La suite  $\{N_j, j \geq 0\}$  correspond à la taille de l'échantillon considéré. Elle vérifiera certaines conditions qu'il faudra expliciter et les conditions ci-dessous.

N1) La suite  $N_j$  est croissante,

N2) La série  $\sum_{j \geq 0} \exp\{-(1 + \delta_j)\varphi(N_j)\}$  est convergente .

**Lemme 5.1.6.** *Soit  $J$  un intervalle de longueur  $\nu_j^{-1} = h(\varphi(N_j)/N_j)$ . Pour tout  $j \geq 1$ , notons  $M_j$  le nombre d'espacements de  $J$  dont la longueur est comprise dans l'intervalle*

$$\left[ \frac{\varphi(N_j)}{N_j}, (1 + \delta_j) \frac{\varphi(N_j)}{N_j} \right].$$

Alors,

$$\sum_{j \geq 1} P(M_j = 0) < \infty. \quad (5.1.14)$$

*Démonstration.* La démonstration est analogue à celle du Lemme 4.3.4. Pour tout  $j \geq 1$ , notons  $C_j$  le nombre d'espacements de  $J$  donc la longueur est strictement inférieure à  $\varphi(N_j)/N_j$ . Nous pouvons alors remarquer que

$$P(M_j \geq 1) \geq M(B_j = 0) \times P(C_j = 0).$$

En utilisant le même raisonnement que précédemment, on trouve que

$$P(C_j \geq 1) \leq \frac{\varphi(N_j)}{N_j}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(M_j \geq 1) &\geq \left(1 - \exp\{-(1 + \delta_j)\varphi(N_j)\}\right) \left(1 - \frac{\varphi(N_j)}{N_j}\right) \\ &\geq 1 - \frac{\varphi(N_j)}{N_j} - \exp\{-(1 + \delta_j)\varphi(N_j)\} \\ &\quad + \frac{\varphi(N_j)}{N_j} \exp\{-(1 + \delta_j)\varphi(N_j)\} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc l'inégalité suivante.

$$P(M_j = 0) \leq \frac{\varphi(N_j)}{N_j} + \exp\{-(1 + \delta_j)\varphi(N_j)\} - \frac{\varphi(N_j)}{N_j} \exp\{-(1 + \delta_j)\varphi(N_j)\}$$

Or, pour  $j$  suffisamment grand,  $\varphi(N_j)/N_j - \varphi(N_j)/N_j e^{-(1+\delta_j)\varphi(N_j)} \leq 0$ . Nous obtenons donc, pour  $j$  suffisamment grand,

$$P(M_j = 0) \leq \exp\{-(1 + \delta_j)\varphi(N_j)\}.$$

L'utilisation de la condition N2) nous permet de conclure la démonstration de ce lemme.  $\square$

Rappelons ici que nous avons posé  $\nu_j^{-1} = h(\varphi(N_j)/N_j)$ . Nous construisons une subdivision de  $[0, 1]$ , en posant pour  $0 \leq i \leq \nu_j$  et  $j \geq 1$ ,

$$J(i, j) = [i\nu_j^{-1}, (i + 1)\nu_j^{-1}).$$

Si  $J(i, j)$  contient un espacement (de l'échantillon de taille  $N_j$ ) de longueur dans  $[\varphi(N_j)/N_j, (1 + \delta_j)\varphi(N_j)/N_j]$ , (c'est le cas si  $M_j \geq 1$ ), on choisit cet espacement et

on l'appelle  $T(i, j)$  sinon, on prend n'importe quel intervalle de longueur  $\varphi(N_j)/N_j$  et on l'appelle  $S(i, j)$ . Nous définissons ensuite

$$S_j = \bigcup_{i \text{ pairs}} S(i, j) \quad T_j = \bigcup_{i \text{ pairs}} T(i, j),$$

$$R_j = S_j \cup T_j, \quad R = \bigcap_{j \geq 1} R_j, \quad S = \bigcap_{j \geq 1} S_j, \quad \text{et } T = \bigcap_{j \geq 1} T_j.$$

Par construction, les  $R_j$  sont des intervalles de longueur comprise entre  $\varphi(N_j)/N_j$  et  $(1 + \delta_j)\varphi(N_j)/N_j$  et chacun séparés par une distance supérieure à  $\nu_j^{-1}$ . Nous voulons appliquer le lemme 5.1.5 afin de montrer que  $h - m(R) > 0$ . Pour cela, il nous faut vérifier que nous avons bien (5.1.13). Selon les notations utilisées, nous avons

$$d_j = \frac{\varphi(N_j)}{N_j}, \quad \rho_j = \nu_j^{-1},$$

Une nouvelle condition sur  $N_j$  sera à trouver de manière à ce que chaque intervalle de  $R_{j-1}$  contienne au moins  $m_j = d_{j-1}\nu_j - 2 \geq 2$  intervalles de  $R_j$  et

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{h(d_j)L_{j+1}\rho_{j+1}}{d_j} > 0.$$

Nous pourrions donc appliquer le lemme 5.1.5, ce qui nous permettra d'obtenir  $h - m(R) > 0$ . L'objectif étant de montrer que  $h - m(T) > 0$ , il suffira donc de montrer que  $h - m(S) > 0$ . Il faut donc que

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{\lfloor \nu_j \rfloor} h(|S(i, j)|) < \infty.$$

Autrement dit, il suffit que

$$\sum_{j \geq 1} \mathbb{E} \sum_{i=0}^{\lfloor \nu_j \rfloor} h(|S(i, j)|) = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{2} \nu_j P(M_j = 0) h(\varphi(N_j)/N_j) < \infty.$$

Or, rappelons nous que  $\nu_j^{-1} h(\varphi(N_j)/N_j)$ . En utilisant le lemme 5.1.6, on trouve donc que

$$\sum_{j \geq 1} \frac{1}{2} \nu_j P(M_j = 0) h(\varphi(N_j)/N_j) = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{2} P(M_j = 0) < \infty.$$

Nous aurons donc obtenu que  $h - m(S) = 0$  et donc  $h - m(T) > 0$ .

## 5.2 Processus empirique des espacements

### 5.2.1 Introduction

Une autre perspective de travail est l'étude du *processus empirique des espacements*. Nous allons commencer par donner quelques rappels et définitions. Soit  $\{U_n : n \geq 1\}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Nous utilisons les mêmes notations qu'au Chapitre 4. Ainsi, rappelons que  $U_0^{(n)}, \dots, U_{n+1}^{(n)}$  désignent les statistiques d'ordre de l'échantillon  $U_1, \dots, U_n$  et les *espacements uniformes* sont notés  $D_i^{(n)} = U_i^{(n-1)} - U_{i-1}^{(n-1)}$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . Nous allons commencer par donner des résultats classiques sur les espacements, sous forme de lemmes.

**Lemme 5.2.1.** *Pour tout  $n \geq 1$  et pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $D_i^{(n)} \stackrel{d}{=} D_1^{(n)}$ .*

*Démonstration.* Voir Pyke [92], p. 397. □

**Lemme 5.2.2.** *Soit  $\{\omega_n : n \geq 1\}$  une suite de variables aléatoires i.i.d de loi exponentielle standard  $\text{Exp}(1)$  et  $S_m = \omega_1 + \dots + \omega_m$  pour tout  $m \geq 1$ . Alors, nous avons l'égalité en loi suivante.*

$$\{D_i^{(n)} : 1 \leq i \leq n\} \stackrel{d}{=} \{\omega_i/S_n : 1 \leq i \leq n\}. \quad (5.2.1)$$

*Démonstration.* Voir Pyke [92], p. 403. □

**Lemme 5.2.3.** *Indépendamment de  $i$ , pour  $1 \leq i \leq n$ , la loi de  $nD_i^{(n)}$  tend vers la loi exponentielle standard  $\text{Exp}(1)$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ .*

*Démonstration.* Dans (5.2.1),  $n/S_n \xrightarrow{P} 1$ . On applique alors le lemme de Slutsky. □

De nombreux résultats sur les lois limites d'espacements ont été donnés par Darling [28] qui étudie les statistiques de la forme

$$S_n = \sum f(D_i^{(n)}),$$

pour des fonctions réelles convenables. Cressie [25] étudie des statistiques similaires pour des espacements d'ordre  $k$ . Pyke [92] étudie d'autres constructions probabilistes des

espacements et obtient plusieurs théorèmes limites pour les statistiques d'espacements. On consultera à ce sujet les articles de Beirlant *et al.* [11] et de Beirlant et van Zuijlen [12].

Introduisons quelques notations qui seront utiles par la suite. La fonction de distribution empirique des espacements re-normalisés est notée

$$\mathbb{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{nD_i^{(n)} \leq t\}} \quad \text{pour } -\infty < t < \infty. \quad (5.2.2)$$

Notons

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0, \\ 1 - e^{-t} & \text{pour } 0 \leq t < \infty, \\ \infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.2.3)$$

la f.d.r. de la loi exponentielle standard  $\text{Exp}(1)$ . Le *processus empirique des espacements* est alors défini par

$$\delta_n(t) = n^{1/2} (\mathbb{F}_n(t) - F(t)) \quad \text{pour } -\infty < t < \infty.$$

Il est naturel d'introduire la fonction de quantile de la loi  $\text{Exp}(1)$ . Celle-ci est définie par

$$G(s) = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : F(t) \geq s\} = -\log(1 - s) & \text{si } 0 \leq s < 1, \\ \infty & \text{si } s = 1. \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Observons que  $F(G(s)) = s$  pour  $0 \leq s < 1$  et  $G(F(x)) = x$  pour  $x \geq 0$ . De manière analogue, nous définissons la fonction empirique de quantiles des espacements re-normalisés en remplaçant formellement dans (5.2.4)  $F(t)$  par la fonction  $\mathbb{F}_n(t)$  de (5.2.2). On obtient ainsi

$$\mathbb{G}_n(s) = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{F}_n(t) \geq s\} \quad \text{pour } 0 \leq s \leq 1.$$

Le *processus empirique de quantiles des espacements* est alors défini par

$$\gamma_n(s) = n^{1/2} (\mathbb{G}_n(s) - G(s)) / G'(s) \quad \text{pour } 0 \leq s < 1.$$

Nous introduisons maintenant de nouvelles versions des processus empiriques et processus empiriques de quantiles des espacements. Leur intérêt est d'être plus facilement contrôlables. Pour cela, notons, pour  $0 \leq s \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} U_n(s) &= \mathbb{F}_n(G(s)), \\ V_n(s) &= F(\mathbb{G}_n(s)). \end{aligned}$$

Nous définissons alors le *processus empirique des espacements modifié*, pour  $0 \leq s \leq 1$ , par

$$\begin{aligned} a_n(s) &= n^{1/2}(U_n(s) - s) = \delta_n(G(s)) \\ &= \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^n [\mathbb{1}_{\{F(nD_i^{(n)}) \leq s\}} - s] = \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^n [\mathbb{1}_{\{nD_i^{(n)} \leq -\log(1-s)\}} - s], \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

et le *processus de quantiles des espacements modifié*, pour  $0 \leq s \leq 1$ , par

$$b_n(s) = n^{1/2}(V_n(s) - s). \quad (5.2.6)$$

De nombreux résultats limites ont été obtenus pour ces processus (voir en particulier Shorack [96], Rao et Sethuraman [93]). En 1984, Beirlant [9] obtint pour la première fois des résultats d'approximation forte pour ces processus. Ses deux théorèmes principaux sont les suivants.

**Théorème 5.2.4.** *Sur un espace de probabilité convenable, il est possible de définir le processus  $\{a_n(s) : 0 \leq s \leq 1\}$  construit à partir de  $U_1, U_2, \dots$  ainsi qu'une suite de ponts browniens  $B_1, B_2, \dots$ , de telle sorte qu'avec probabilité 1,*

$$\sup_{0 \leq s \leq 1} |a_n(s) - \Gamma_n(s)| = O(n^{-1/4}(\log n)^{3/4}) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \quad (5.2.7)$$

où

$$\Gamma_n(s) = B_n(s) - G(s)e^{-G(s)} \int_0^1 B_n(u) dG(u) \text{ pour } 0 \leq s \leq 1. \quad (5.2.8)$$

*Démonstration.* Voir Beirlant [9]. □

**Théorème 5.2.5.** *Sur un espace de probabilité convenable, il est possible de définir le processus  $\{\gamma_n(s) : 0 \leq s \leq 1\}$  construit à partir de  $U_1, U_2, \dots$  ainsi qu'une suite de ponts browniens  $B_1, B_2, \dots$ , de telle sorte qu'avec probabilité 1,*

$$\sup_{0 \leq s \leq 1} |\gamma_n(s) - \Gamma'_n(s)| = O(n^{-1/2}(\log n)^2) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \quad (5.2.9)$$

où

$$\Gamma'_n(s) = B_n(s) - G(s)e^{-G(s)} \int_0^1 B_n(u)dG(u) \text{ pour } 0 \leq s \leq 1. \quad (5.2.10)$$

*Démonstration.* Voir Beirlant [9]. □

Aly, Beirlant et Horváth [4] ont généralisé ces résultats d'approximation pour les processus basés sur des espacements d'ordre  $k$ . Après pondération éventuelle Beirlant *et al.* [10] établissent en 1991 des lois faibles de type Bahadur-Kiefer pour ces processus. Ils obtiennent le théorème suivant.

**Théorème 5.2.6.** *Nous avons la convergence en probabilité suivante.*

$$n^{1/4}(\log n)^{-1/2} \|a_n + b_n\| / \|b_n\|^{1/2} \xrightarrow{P} 1 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (5.2.11)$$

Beirlant *et al.* [10] ont également obtenu des résultats de type Bahadur-Kiefer, du type de (5.2.11), pour des processus pondérés. Dindar [44] établit des lois fonctionnelles du logarithme itéré pour le processus empirique des espacements et le processus de quantile des espacements. Rappelons quelques notations que nous avons déjà utilisées dans les chapitres précédents. Notons  $\mathbb{H}_0^1$  l'espace de Hilbert auto-reproduisant [RKHS] associé au processus de Wiener standard sur  $[0, 1]$  (voir p.50).  $\mathbb{K}_0^1$  désigne la boule unité du RKHS  $\mathbb{H}_0^1$ . Plus généralement, on note pour tout  $c \geq 0$ ,

$$\mathbb{K}_0^c = \left\{ f \in \mathbb{H}_0^1 : \|f\|_{\mathbb{H}_0^1}^2 \leq c \right\}. \quad (5.2.12)$$

Soit une suite de constantes positives  $\{h_n : n \geq 1\}$ . Nous imposerons à cette suite des conditions parmi les suivantes.

- (H1)  $h_n \downarrow 0$ ,  $nh_n \uparrow \infty$  et  $0 < h_n < 1$ ,
- (H2)  $(\log(1/h_n)) / \log_2 n \rightarrow c \in [0, \infty]$ ,
- (H3)  $1/h_n = o(n^{1/2}(\log_2 n) / (\log n)^{3/2})$ ,
- (H4)  $h_n \rightarrow h$ ,  $h \in (0, 1)$ ,
- (H5)  $(1/h_n) = o(n \log_2 n / (\log n)^4)$ ,
- (H6)  $(1/h_n) = o(n^{1/2}(\log n)^{-1/2})$ ,
- (H7)  $nh_n / \log n \rightarrow \infty$ ,
- (H8)  $(\log(1/h_n)) / \log_2 n \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Notons ici que (H8) correspond à (H2) pour  $c = \infty$ . Dans le théorème suivant, nous supposons que  $\mathcal{E}$  est l'espace des fonctions bornées sur  $[0, 1]$  et  $d$  la distance uniforme.

D'autre part, notons pour  $t \in [0, 1 - h]$  et  $s \in [0, 1]$ ,

$$\Delta a_n(h, t; s) = a_n(t + hs) - a_n(t). \quad (5.2.13)$$

**Théorème 5.2.7.** *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), l'ensemble*

$$\left\{ \frac{\Delta a_n(h, t; \cdot)}{(2h_n \{\log(1/h_n) + \log_2 n\})^{1/2}} : 0 \leq t \leq 1 - h_n \right\}$$

*recouvre complètement en probabilité  $\mathbb{K}_0^{\frac{c}{c+1}}$ .*

*Démonstration.* Voir Dindar [44]. □

Dindar [44] obtient également une loi du logarithme itéré pour les incréments du processus empirique des espacements lorsque la taille de la fenêtre est plus grande (sous la condition (H4)).

**Théorème 5.2.8.** *Sous l'hypothèse (H4), l'ensemble des fonctions sur  $[0, 1]$  défini par*

$$\left\{ \frac{\Delta a_n(h, t; \cdot)}{(2 \log_2 n)^{1/2}} : 0 \leq t \leq 1 - h_n \right\}$$

*est relativement compact en probabilité dans l'ensemble des fonctions bornées de  $[0, 1]$  muni de la norme uniforme et a pour ensemble limite l'ensemble  $\mathbb{L}$  défini par*

$$\mathbb{L} = \{f(t + hI) - f(t) : f \in \mathbb{K}_0^1, t \in [0, 1 - h]\}.$$

Dans l'énoncé de ce théorème,  $I$  désigne la fonction identité de  $[0, 1]$  dans lui-même.

*Démonstration.* Voir Dindar [44]. □

Enfin, Dindar [44] établit un théorème analogue au Théorème 5.2.7 pour le cas du processus de quantiles des espacements. Nous notons pour  $t \in [0, 1 - h]$  et  $s \in [0, 1]$ ,

$$\Delta \gamma_n(h, t; s) = \gamma_n(t + hs) - \gamma_n(t).$$

**Théorème 5.2.9.** *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H5), nous avons en probabilité le recouvrement complet par*

$$\left\{ \frac{\Delta\gamma_n(h, t; \cdot)}{(2h_n \{\log(1/h_n) + \log_2 n\})^{1/2}} : 0 \leq t \leq 1 - h_n \right\}$$

de l'ensemble  $\mathbb{K}_0^{\frac{c}{c+1}}$ .

*Démonstration.* Voir Dindar [44]. □

### 5.2.2 Oscillations exceptionnelles

L'objectif serait d'étudier les oscillations exceptionnelles du processus empirique des espacements,  $\{a_n(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ , à la manière des travaux d'Orey et Taylor [90]. Pour cela, nous allons rappeler des résultats présentés précédemment et que nous utiliserons dans cette partie. Soit

$$\alpha_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

un processus empirique uniforme généré par des variables aléatoires, indépendantes  $U_1, \dots, U_n$ , de même loi uniforme sur  $[0, 1]$  et où

$$F_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,t]}(U_i).$$

Notons  $\beta_n = (2h_n \log(1/h_n))^{-1/2}$  et

$$\Delta\alpha_n(h, t; s) = \alpha_n(t + hs) - \alpha_n(t), \quad t \in [0, 1 - h], s \in [0, 1].$$

Deheuvels et Mason [41] considèrent l'ensemble défini pour tout  $f \in \mathbb{K}_0^1$  telle que  $\int_0^1 f^2(u) du \in (0, 1)$  par

$$L(f) = \{t \in [0, 1) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\beta_n \Delta\alpha_n(h_n, t; \cdot) - f\| = 0\}.$$

Rappelons ici que  $\|\cdot\|$  désigne la norme-sup sur  $[0, 1]$ . Deheuvels et Mason [41] établissent le théorème suivant.

**Théorème 5.2.10.** *Sous (H1), (H7), (H8) et pour tout  $f \in \mathbb{K}_0^1$  telle que  $\int_0^1 \dot{f}^2(u)du \in (0, 1)$ , nous avons avec probabilité 1,*

$$\dim L(f) = 1 - \int_0^1 \dot{f}^2(u)du. \quad (5.2.14)$$

*Démonstration.* Voir l'article de Deheuvels et Mason [41]. □

Dans ce théorème,  $\dim L(f)$  désigne la dimension de Hausdorff de  $L(f)$  définie auparavant (voir p.33). Nous voudrions donc obtenir un analogue de ce théorème pour les oscillations du processus empirique des espacements. Dans ce but, pour  $f \in \mathbb{K}_0^1$ , nous introduisons l'ensemble

$$R(f) = \left\{ t \in [0, 1) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\beta_n \Delta a_n(h, t; \cdot) - f\| = 0 \right\}. \quad (5.2.15)$$

Nous proposons la conjecture suivante.

**Conjecture 5.2.11.** *Sous les conditions (H1), (H6), (H8) et pour tout  $f \in \mathbb{K}_0^1$  telle que  $\int_0^1 \dot{f}^2(u)du \in (0, 1)$ , nous avons avec probabilité 1,*

$$\dim R(f) = 1 - \int_0^1 \dot{f}^2(u)du. \quad (5.2.16)$$

Nous remarquons que nous obtiendrions ici le même type de résultat que pour le processus empirique classique (Théorème 5.2.10). Voyons comment, de manière intuitive, nous pouvons prédire ce résultat. Rappelons que le processus empirique des espacements s'écrit

$$a_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [\mathbb{1}_{\{nD_i^{(n)} \leq -\log(1-t)\}} - t] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [\mathbb{1}_{\{F(nD_i^{(n)}) \leq t\}} - t],$$

où  $F(t)$ , définie par (5.2.3) est la f.d.r. de la loi exponentielle standard. Par le lemme 5.2.3, nous savons que la loi de  $nD_i^{(n)}$  tend vers la loi exponentielle standard lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Donc  $F(nD_i^{(n)})$  tend vers une loi uniforme. Les oscillations du processus empirique classique vont ainsi être du même ordre, asymptotiquement, que les oscillations du processus empirique des espacements.

Une autre manière de le voir est de remarquer que le processus empirique classique et le processus empirique des espacements admettent tous deux des approximations fortes avec des ponts browniens. Or nous savons que leurs oscillations sont régies par

les oscillations d'un processus de Wiener. Il est d'ailleurs à noter que le même type de résultat est obtenu pour l'étude des oscillations du processus de Wiener (voir Théorème 3.1.10).

### 5.2.3 Conclusion

Au vu des résultats obtenus au cours de cette thèse et des perspectives de recherche déjà proposées, une série d'extension vient naturellement à l'esprit : Que se passe-t-il pour des topologies différentes de la topologie uniforme ? Peut-on étendre les résultats pour des oscillations du processus empirique uniforme des espacements indexées par des classes de fonctions ? Peut-on calculer la mesure de Hausdorff exacte de l'ensemble des points exceptionnels ? Il semble raisonnable de penser obtenir des résultats similaires à ceux déjà obtenus.



# Conclusion

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous avons présenté le concept de *fractale* lié à la notion de dimension, ainsi que les principales applications qui en découlent. Nous nous sommes alors intéressés aux oscillations du processus de Wiener indexé par une classe de fonctions. Suite à une loi limite du logarithme (voir **Chapitre 2**) et dans la continuité des travaux d'Orey et Taylor [90] et Deheuvels et Mason [41], nous avons introduit un ensemble de points exceptionnels générés par les oscillations du processus de Wiener indexé par une classe de fonctions. Nous avons calculé alors la dimension de Hausdorff de cet ensemble dans le **Chapitre 3**. Nous avons obtenu un résultat analogue en remplaçant le processus de Wiener par le processus empirique uniforme.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux espacements uniformes engendrés par un échantillon de variables indépendantes et identiquement distribuées dans  $[0, 1]^d$ , selon la loi uniforme. Nous avons considéré, dans la suite des travaux de Hawkes [61] l'ensemble des points de  $[0, 1]^d$  appartenant infiniment souvent à de *grands espacements* (voir **Chapitre 4**) et nous avons calculé la dimension de Hausdorff de cet ensemble. La difficulté à travailler dans  $[0, 1]^d$  survient déjà au moment de définir un *espacement multidimensionnel*. Nous avons utilisé la première définition donnée par Deheuvels [30] qui se restreint à des « espacements blocs » puis nous avons fait l'étude qui, dans le cadre plus général donné par Deheuvels *et al.* [34], autorise des formes plus générales aux espacements.

De nombreuses perspectives de recherche découlent naturellement de ces travaux. Nous en présentons ici quelques unes.

Nous avons vu dans la conclusion du **Chapitre 3** que Khoshnevisan et Shi [65] abordent

le résultat d'Orey et Taylor sous un angle différent et en obtiennent alors une démonstration différente. La différence se situe principalement dans le calcul de la borne inférieure. Ils se servent du « *Principe de distribution de masse* » exposé au **Chapitre 1** et utilisé pour calculer la borne inférieure des ensembles exceptionnels engendrés par les espacements (**Chapitre 4**). Il serait alors intéressant de reprendre la démonstration du théorème 3.1.11 et du théorème 3.4.1 dans le but de réduire sa longueur. Nous pourrions également envisager de généraliser ces résultats au cas du mouvement brownien fractionnaire.

La plupart des résultats ont été obtenus dans le cadre de la topologie uniforme. Celle-ci n'étant pas forcément la mieux adaptée, Deheuvels et Lifshits [35; 36] ont étudié ces phénomènes dans des topologies plus fortes. Nous avons obtenu au **Chapitre 2** un résultat limite fonctionnel pour une topologie semi-consistante. Il est donc envisageable de poursuivre dans cette direction et d'étudier les ensembles fractales générés par les oscillations du processus de Wiener indexé par une classe de fonctions pour une norme semi-consistante.

Des résultats de type Chung ont été obtenus par de Acosta [2] et précisent la vitesse de convergence des fonctions d'oscillation vers l'ensemble limite (voir p. 114). Les résultats sur la dimension de Hausdorff des ensembles exceptionnels peuvent alors être améliorés avec ces vitesses de convergence. Des résultats de ce type sont obtenus par Deheuvels et Mason [42], Lucas [80; 81] et Lucas et Thilly [83]. Nous pourrions donc poursuivre les travaux dans cette direction.

De plus, nous avons vu p.139 qu'une manière d'affiner les résultats consiste à calculer la mesure de Hausdorff exacte. On peut citer ici les travaux de Chung, Erdős et Sirao [23], Kôno [70] et Jain et Taylor [63]. Un objectif serait d'obtenir les résultats proposés dans le paragraphe 5.1, relatifs aux espaces engendrés par les espacements uniformes et réussir ainsi à montrer la conjecture 5.1.4. De plus, nous pourrions trouver des analogues de ces résultats pour les ensembles engendrés par les oscillations du processus de Wiener ou du processus empirique uniforme, tous deux indexés par une classe de fonctions.

Enfin, nous avons orienté notre recherche vers l'étude du *processus empirique des espacements modifié*. Nous pourrions poursuivre ainsi les travaux de Dindar [44] qui établit

---

une loi fonctionnelle du logarithme. Nous introduisons l'ensemble des points généré par les oscillations du processus empirique des espacements et proposons de calculer sa dimension de Hausdorff et prouver alors la Conjecture 5.2.11. Comme mentionné dans le paragraphe 5.2.3, nous pouvons proposer d'étudier les diverses pistes de recherche proposées (topologies non-uniformes, oscillations indexées par une classe de fonctions, mesure exacte de Hausdorff) relativement au processus empirique des espacements.



# Annexes



# Annexe A

## Processus de Wiener

Un processus stochastique  $\{W(t) : t \geq 0\}$  sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est un *processus de Wiener* si c'est un processus gaussien centré de covariance

$$\text{cov}(s, t) = s \wedge t.$$

On en déduit alors que le processus de Wiener s'annule à l'origine. Découle de cette définition, le corollaire suivant.

**Corollaire A.0.12.**

$$E(W(t) - W(s))^2 = |t - s|.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} E(W(t) - W(s))^2 &= EW(t)^2 + EW(s)^2 - 2EW(t)W(s) \\ &= \text{cov}(t, t) + \text{cov}(s, s) - 2 \text{cov}(s, t) \\ &= t + s - 2s \wedge t = |t - s|. \end{aligned}$$

□

De cette propriété, nous obtenons la propriété de stationnarité des accroissements (en calculant la covariance). Nous pouvons également vérifier que les accroissements sont indépendants. D'autre part, nous avons un résultat d'auto-similarité, exposé dans la propriété ci-dessous.

**Proposition A.0.13.** *Les processus  $\{W(t) : t \geq 0\}$  et  $\{\gamma^{-1/2}W(\gamma t) : t \geq 0\}$  sont égaux en distribution.*

*Démonstration.* D'après la définition, pour tout  $t \geq 0$  et  $h > 0$ , les accroissements du processus de Wiener  $W(t+h) - W(t)$  suivent une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance nulle. Ainsi,

$$P(W(t+h) - W(t) \leq x) = (2\pi h)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{-u^2}{2h}\right) du.$$

Ainsi, pour tout  $\gamma > 0$ ,

$$P(W(t+h) - W(t) \leq x) = P(W(\gamma t + \gamma h) - W(\gamma t) \leq \gamma^{1/2}x).$$

□

Nous définissons l'*intégrale de Wiener* ou *intégrale stochastique* de la manière suivante. Soit  $W$  un processus de Wiener standard et  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 1}$  sa filtration. Nous définissons premièrement l'intégrale stochastique pour un *processus adapté simple*. Un processus adapté  $h = \{h(t) : t \geq 1\}$  est dit *simple* si pour tout  $t \in (0, T)$ , il s'écrit,

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}]}(t),$$

où  $n$  est un entier positif,  $\{t_i : 1 \leq i \leq n+1\}$  est une suite finie telle que  $0 \leq t_1 < \dots < t_{n+1} \leq T$  et où  $\xi_1, \dots, \xi_k$  sont des variables aléatoires telles que  $\xi_i$  est  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable.

**Définition 5.** Pour un processus adapté simple  $h$ , nous définissons l'intégrale de Wiener par

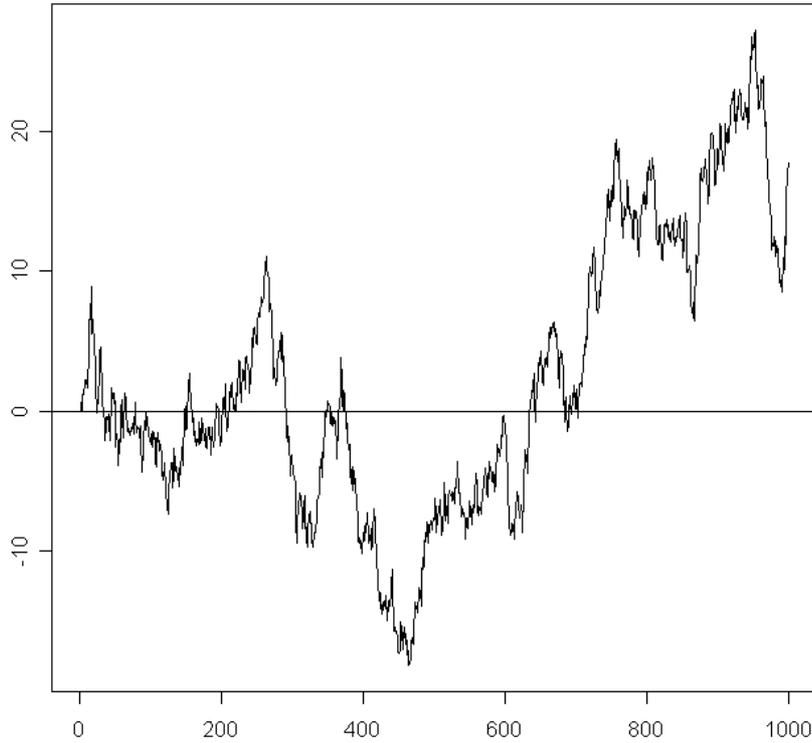
$$I(h) = \int_0^T h(t) dW(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)). \quad (\text{A.0.1})$$

**Proposition A.0.14.** *Soient  $h, h_1, h_2$  des processus adaptés simples. Nous avons alors les propriétés suivantes.*

(P1)  $EI(h) = 0$ ,

(P2)  $E[I(h_1)I(h_2)]^2 = \int_0^T E(h_1(t)h_2(t))dt$ ,

(P3)  $\int_0^T ah_1(t) + bh_2(t)dW(t) = a \int_0^T h_1(t)dW(t) + b \int_0^T h_2(t)dW(t)$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes.



Graphe d'une réalisation du processus de Wiener

*Démonstration.* Puisque  $W(t_{i+1}) - W(t_i)$  et  $\mathcal{F}_{t_i}$  sont indépendants,

$$E[\xi_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))] = E\xi_i E[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0,$$

car  $W$  est centré. Nous obtenons donc (P1).

$$\begin{aligned} E[I(h_1)I(h_2)] &= E\left[\sum_i \xi_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \sum_j \xi'_j(W(t_{j+1}) - W(t_j))\right] \\ &= E\left[\sum_{i,j} \xi_i \xi'_j (W(t_{i+1}) - W(t_i))(W(t_{j+1}) - W(t_j))\right] \end{aligned}$$

Si  $i < j$ ,  $(W(t_{i+1}) - W(t_i))$  est  $\mathcal{F}_{t_j}$ -mesurable, alors que  $(W(t_{j+1}) - W(t_j))$  est indépendant de  $\mathcal{F}_{t_j}$ . Donc l'espérance est nulle. Le raisonnement est le même pour  $j < i$ . Il

reste donc

$$\begin{aligned} E[I(h_1)I(h_2)] &= E\left[\sum_i \xi_i \xi'_i (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2\right] \\ &= \sum_i E[\xi_i \xi'_i] E[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2] = \sum_i E[\xi_i \xi'_i] (t_{i+1} - t_i) \\ &= \int_0^T E(h_1(t)h_2(t))dt. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré (P2). La démonstration de (P3) étant triviale, nous l'omettons ici.  $\square$

Nous allons maintenant donner une définition de l'intégrale de Wiener pour un processus  $h$  plus général. Dans la suite, nous dirons que  $h$  appartient à  $H^2$  si  $\int_0^T E h(t)^2 dt < \infty$ .

**Proposition A.0.15.** *Pour tout  $h \in H^2$ , il existe une suite de processus simples  $\{h_n : n \geq 1\}$ , telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T E[h_n(t) - h(t)]^2 dt = 0. \quad (\text{A.0.2})$$

*Démonstration.* Voir Ash et Gardner [7].  $\square$

Nous donnons à présent la définition de l'intégrale de Wiener pour tout  $h \in H^2$ .

**Définition 6.** Pour tout  $h \in H^2$  et pour toute suite  $\{h_n : n \geq 1\}$  de processus simples convergent vers  $h$  (voir (A.0.2)), nous posons

$$I(h) = \int_0^T h(t)dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T h_n(t)dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(h_n). \quad (\text{A.0.3})$$

Nous avons les mêmes propriétés que pour les processus simples.

**Proposition A.0.16.** *Les processus  $h \in H^2$  vérifient les propriétés (P1), (P2) et (P3).*

Pour la définition de l'intégrale multiple de Wiener (c'est à dire pour un processus de Wiener multiparamétré) le principe est le même, on se reportera à l'article de Ito [62] ou Wiener [107]. D'autres définitions pour l'intégrale de Wiener ont été données, notamment, la *définition de Stratonovich*. La formule de Stratonovich remplace  $\xi_i$  par  $(\xi_i + \xi_{i+1})/2$  dans (A.0.1). Ainsi, pour  $h$  un processus adapté simple,

$$I_{strat}(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2} (W(t_{i+1}) - W(t_i)).$$

---

L'avantage de cette définition réside dans le fait qu'elle ne choisit pas une direction du temps privilégiée contrairement à celle d'Itô ce qui implique que les processus stochastiques définis dans par l'intégrale de Stratonovich satisfont des équations différentielles stochastiques invariantes par renversement du temps. Nous ne rentrerons pas dans les détails de cette intégrale ici.



# Annexe B

## Convergences d'ensembles

Plaçons-nous dans l'ensemble des fonctions bornées de  $[0, 1]$ , que nous notons  $B(0, 1)$ . On munit  $B(0, 1)$  de la topologie définie par la *norme-sup*  $\|f\| = \sup_{0 \leq s \leq 1} |f(s)|$ . Soit  $\mathcal{A} \subset B(0, 1)$  et  $\varepsilon > 0$ . Notons alors  $\mathcal{A}^\varepsilon$  l'ensemble des fonctions  $f \in B(0, 1)$  telles qu'il existe une fonction  $g \in \mathcal{A}$  telle que  $\|f - g\| < \varepsilon$ .

**Définition 7.** Une suite d'ensembles  $\mathcal{A}_n$  de  $B(0, 1)$  est dite *relativement compacte* s'il existe un ensemble  $\mathcal{K}$  tel que  $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{K}$  pour tout  $n$ , avec  $\mathcal{K}$  un sous-ensemble compact de  $B(0, 1)$ .

Il est alors intéressant d'introduire les notions d'ensemble limite *extérieur* et d'ensemble limite *intérieur*.

**Définition 8.** Pour une suite  $\mathcal{A}_n$  relativement compacte, son *ensemble limite* est  $\mathcal{B} \subset B(0, 1)$  si  $\mathcal{B}$  est l'ensemble des limites de toute sous-suite de  $\mathcal{A}_n$  convergente. On dit aussi que  $\mathcal{A}_n$  recouvre *maximalement*  $\mathcal{B}$ .

On peut alors voir  $\mathcal{B}$  comme l'adhérence asymptotique de  $\mathcal{A}_n$ . On l'appelle aussi l'ensemble limite *extérieur*, comme nous l'avons mentionné plus haut.

REMARQUE 18. Si la suite  $\mathcal{A}_n$  est relativement compacte, l'ensemble  $\mathcal{B}$  ne peut pas être vide.

**Proposition B.0.17.** *L'ensemble  $\mathcal{B}$  est compact dans  $B(0, 1)$ .*

Voyons maintenant l'analogie de cette définition pour l'ensemble limite *intérieur*

**Définition 9.** Pour une suite  $\mathcal{A}_n$  relativement compacte, nous dirons que  $\mathcal{A}_n$  recouvre *minimalement*  $\mathcal{B}' \subset B(0, 1)$ , si  $\mathcal{B}'$  est l'ensemble constitué des limites de toutes les suites convergentes de  $\mathcal{A}_n$ .

L'ensemble  $\mathcal{B}'$  peut être vu comme l'intérieur asymptotique de  $\mathcal{A}_n$  et parfois nommé ensemble limite *intérieur*. Il est évident que  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ .

**Définition 10.** Lorsque  $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ , nous dirons que  $\mathcal{A}_n$  recouvre *complètement*  $\mathcal{B}$ .

Pour les besoins de cette thèse, plaçons nous dans un cadre probabiliste. Supposons que la suite  $\mathcal{A}_n$  est une suite de sous-ensembles aléatoires. Nous pouvons caractériser ces définitions à l'aide des critères suivants.

$$\text{RC(i)} \quad P(\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{B}^\varepsilon) = 1.$$

$$\text{RC(ii)} \quad \text{Pour tout } f \in \mathcal{B}, P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{f \in \mathcal{A}_n^\varepsilon\}) = 1.$$

$$\text{RC(iii)} \quad P(\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}_n^\varepsilon) = 1.$$

$$\text{RC(iv)} \quad \text{Pour tout } f \in \mathcal{B}', P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{f \notin \mathcal{A}_n^\varepsilon\}) = 1.$$

Nous avons alors la définition suivante.

**Définition 11.** La suite de sous-ensembles  $\mathcal{A}_n$  est presque sûrement relativement compacte dans  $B(0, 1)$  d'ensembles limites  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ , si les conditions RC(i-ii-iii-iv) sont vérifiées. Dans ce cas, nous écrivons  $\mathcal{A}_n \xrightarrow{p.s.} (\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ .

REMARQUE 19. La condition RC(i) impose que les fonctions adhérentes de  $\mathcal{A}_n$  soient presque sûrement incluses dans  $\mathcal{B}$  et RC(ii) impose que toutes les fonctions de  $\mathcal{B}$  soient presque sûrement fonctions adhérentes de  $\mathcal{A}_n$ . Ainsi, RC(i,ii) caractérise le *recouvrement maximal*. De la même manière, nous pouvons voir que RC(iii,iv) caractérise le *recouvrement minimal*. Nous en déduisons la propriété suivante.

**Proposition B.0.18.** *La suite  $\mathcal{A}_n$  recouvre presque sûrement complètement  $\mathcal{B}$  si et seulement si les critères RC(i,iii) sont vérifiés avec  $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \neq \emptyset$ .*

---

Certains auteurs expriment cette convergence de  $\mathcal{A}_n$  vers  $\mathcal{B}$  à l'aide de la *distance de Hausdorff*. La distance de Hausdorff peut se définir de deux façons. Premièrement, pour tout  $A \subset B(0, 1)$  et  $B \subset B(0, 1)$  non vides et  $f \in B(0, 1)$ , nous définissons

$$d(f, B) = \inf_{g \in B} \|f - g\|. \quad (\text{B.0.1})$$

Introduisons la quantité

$$\delta(A, B) = \sup_{f \in A} d(f, B). \quad (\text{B.0.2})$$

La distance entre A et B est alors égale à

$$\Delta(A, B) = \delta(A, B) \wedge \delta(B, A). \quad (\text{B.0.3})$$

Une autre définition est la suivante :

$$\Delta(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq B^\varepsilon, B \subseteq A^\varepsilon\}. \quad (\text{B.0.4})$$

Nous pouvons vérifier que ces deux définitions sont équivalentes. En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $d(f, B) < \varepsilon$  ssi  $f \in B^\varepsilon$  et  $\delta(A, B) < \varepsilon$  ssi  $A \subseteq B^\varepsilon$ . Ainsi, la suite  $\mathcal{A}_n$  recouvre presque sûrement complètement  $\mathcal{B}$  si  $\Delta(\mathcal{A}_n, \mathcal{B}) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .



## Annexe C

# Classes de Vapnik-Červonenkis

Lorsque nous travaillons avec des processus indexés par des familles de fonctions, nous avons souvent besoin de contrôler la taille des familles. Considérons une famille de fonction  $\mathcal{F}$  munie d'une norme  $\|\cdot\|$ . L'*entropie* est une notion souvent utilisée pour calculer la taille d'un ensemble. Pour la définir nous utilisons le *nombre de recouvrement*  $N(\varepsilon, \mathcal{F}, \|\cdot\|)$ . C'est le nombre minimum de boules  $\{g \in B(0, 1) : \|g - f\| < \varepsilon\}$  de rayon  $\varepsilon$  nécessaire pour recouvrir l'ensemble  $\mathcal{F}$ . (Les centres des boules n'appartiennent pas forcément à  $\mathcal{F}$  mais sont de normes finies). L'*entropie* est le logarithme du nombre de recouvrement. Pour contrôler alors l'entropie ou le nombre de recouvrement, nous nous restreignons à des familles de fonctions particulières. Les familles de fonctions de Vapnik-Červonenkis sont souvent utilisées.

Définissons d'abord les classes d'ensembles de Vapnik-Červonenkis, en anglais les *VC-class*. Soit  $\mathcal{C}$  une classe d'ensembles de  $\mathcal{X}$ . On dit que  $\mathcal{C}$  *sélectionne* ("picks out") un certain ensemble fini  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathcal{X}$  si on peut l'écrire  $\{x_1, \dots, x_n\} \cap C$  pour  $C \in \mathcal{C}$ . On dit que  $\mathcal{C}$  *pulvérise* ("shatters")  $\{x_1, \dots, x_n\}$  si  $\mathcal{C}$  *sélectionne* ses  $2^n$  sous ensembles. Le *VC-index*  $V(\mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}$  est le plus petit  $n$  tel qu'il n'existe pas d'ensemble de dimension  $n$  pouvant être pulvérisé par  $\mathcal{C}$ . Nous pouvons exprimer l'index de manière formelle :

$$\Delta_n(\mathcal{C}, x_1, \dots, x_n) = \# \{C \cap \{x_1, \dots, x_n\} : C \in \mathcal{C}\},$$
$$V(\mathcal{C}) = \inf \left\{ n : \max_{x_1, \dots, x_n} \Delta_n(\mathcal{C}, x_1, \dots, x_n) < 2^n \right\}.$$

Ainsi, une collection  $\mathcal{C}$  d'ensembles est une classe de *Vapnik-Červonenkis* ou *VC-class* si son index  $V(\mathcal{C})$  est fini. Donc, par définition, le nombre d'ensembles *sélectionnés* par

une classe de Vapnik-Červonenkis de n'importe quel ensemble est strictement inférieur à  $2^n$ . Mais ce qui est surprenant, c'est que ce nombre est en fait un nombre polynomial  $O(n^{V(\mathcal{C})-1})$ , bien en dessous de  $2^{n-1}$ . Il y a alors un lien particulier avec les recouvrements. Nous pouvons en effet montrer qu'il existe une constante universelle  $K$  telle que pour toute classe de Vapnik-Červonenkis  $\mathcal{C}$  d'ensembles,

$$N(\varepsilon, \mathcal{C}, L_r(Q)) \leq KV(\mathcal{C})(4e)^{V(\mathcal{C})} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{r(V(\mathcal{C})-1)}, \quad (\text{C.0.1})$$

pour toute mesure de probabilité  $Q$  et  $r \geq 1$  et  $0 < \varepsilon < 1$ . Pour de plus amples informations à ce sujet, nous invitons le lecteur à se référer au livre de Van der Vaart et Wellner [106] p.134.

La théorie des classes d'ensembles de Vapnik Červonenkis peut s'appliquer aussi aux familles de fonctions. Pour cela nous avons besoin du sous-graphe d'une fonction. Le sous-graphe d'une fonction  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{X} \times \mathbb{R}$  donné par

$$\{(x, t) : t < f(x)\}. \quad (\text{C.0.2})$$

Une collection de fonctions  $\mathcal{F}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est une *famille de fonctions de Vapnik-Červonenkis* (en abrégé, famille de fonctions VC) ou en anglais une *VC-subgraph class*, si la collection de tous les sous-graphes de fonctions  $f$  dans  $\mathcal{F}$  forme une classe de Vapnik-Červonenkis d'ensembles dans  $(\mathcal{X} \times \mathbb{R})$ . Et comme pour les ensembles, le nombre de recouvrement d'une famille de fonctions VC croît de manière polynômiale.

On peut citer un exemple de famille de fonctions VC (cf. le Lemma 2.6.15 de van der Vaart et Wellner [106]). Un espace vectoriel  $\mathcal{F}$  de dimension finie, composé de fonctions mesurables de  $\mathcal{X} \times \mathbb{R}$ , est une famille de fonctions VC, avec  $V(\mathcal{F}) \leq \dim(\mathcal{F}) + 2$ . Les familles de fonctions indicatrices  $\mathbb{1}_{(-\infty, t]}$ , pour  $t \in \mathbb{R}$  sont un autre exemple simple de famille de fonctions VC.

# Annexe D

## Topologies et inégalité isopérimétrique

### D.1 Topologies sur des espaces fonctionnels

La topologie uniforme, induite par la norme-sup est la topologie la plus souvent utilisée sur l'espace  $C[0, 1]$  des fonctions continues sur  $[0, 1]$ . Ce n'est pourtant pas forcément la mieux adaptée à l'étude du processus de Wiener  $W(\cdot)$ . Nous avons vu dans le chapitre 2.3 l'utilité d'utiliser des topologies plus fortes. Soit  $\mathcal{X}$  un espace mesurable et notons  $\mathbb{U}$  la topologie uniforme. Soient  $\mathbb{B}$  les sous-ensembles boréliens de  $(\mathcal{X}, \mathbb{U})$ . Nous appelons  $\|\cdot\|$  une *norme mesurable* sur  $\mathcal{X}$  si

- (C0) (i)  $f \rightarrow \|f\|$  est  $\mathbb{B}$ -mesurable,
- (ii) Pour tout  $f, g \in C[0, 1]$ ,  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ,
- (iii) Pour tout  $f \in C[0, 1]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ ,
- (iv) Si  $f \in C[0, 1]$ , alors  $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$ .

On dit de plus que  $\|\cdot\|$  est une *semi-norme mesurable* si (C0)(i-ii-iii) est vérifié mais pas nécessairement (C0)(iv). Les normes et semi-normes que nous considérons peuvent être infinies. Nous utilisons alors les conventions  $0 \cdot \infty = 0$  et  $c + \infty = \infty$ .

## D.2 Inégalité isopérimétrique

Notons  $\mathbb{X}$  un espace de Hausdorff localement convexe et  $\mathbb{B}$  l'ensemble des boréliens de  $\mathbb{X}$ . Soit  $Z$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{X}$  de distribution  $P_Z$  gaussienne centrée. Cela implique l'existence d'un noyau  $\mathbb{H}$  sous espace linéaire de  $\mathbb{X}$ , muni d'une norme hilbertienne  $|\cdot|_{\mathbb{H}}$ . L'espace de Hilbert  $\mathbb{H}$  est communément appelé espace de Hilbert à noyau autoreproduisant (RKHS pour *reproducing kernel Hilbert space*) associé à  $\mathbb{X}$ . (Voir Adler [3] pour avoir plus de détails). Notons  $\mathbb{K} = \{h \in \mathbb{H} : |h|_{\mathbb{H}} \leq 1\}$  la boule unité du RKHS  $\mathbb{H}$ . Enfin, notons  $\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et

$$\phi^{-1}(s) = \inf\{x : \phi(x) \geq s\} \text{ pour } 0 < s < 1.$$

L'*inégalité isopérimétrique* (voir Borell [18], Sudakov et Tsyrelson [102]) peut alors être énoncée de la manière suivante.

**RÉSULTAT 8.** *Pour tout  $r \geq 0$  et  $A \in \mathbb{B}$  et  $B \in \mathbb{B}$  tels que  $B \cap (A + r\mathbb{K}) = \emptyset$ , nous avons l'inégalité*

$$P_Z(B) \leq 1 - \phi\{\phi^{-1}(P_Z(A)) + r\}. \quad (\text{D.2.1})$$

Ce résultat est démontré dans Ledoux et Talagrand [71]. Le lemme suivant est démontré par Talagrand [103] et Deheuvels et Lifshits [35]. Il va nous être utile pour la démonstration.

**Lemme D.2.1.** *Soit  $\|\cdot\|$  une semi-norme  $\mathbb{B}$ -mesurable sur  $\mathbb{X}$  telle que l'on ait  $P(\|Z\| < \infty) = 1$ . Soit  $m$  tel que  $P(\|Z\| \leq m) \geq 1/2$ ,  $\sigma = \sup_{h \in \mathbb{K}} \|h\|$  et  $\beta = 1/\phi^{-1}(P(\|Z\| < 1))$ . Alors, pour tout  $R \geq m$ ,*

$$P(\|Z\| > R) \leq 1 - \phi\left(\frac{R-m}{\sigma}\right) \text{ et } P(\|Z\| > R) \geq 1 - \phi\left(\frac{R-m}{\beta}\right). \quad (\text{D.2.2})$$

En utilisant les inégalités suivantes (voir Feller [52] p.175),

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-1/2} z^{-1} (1-z^{-2}) \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) &\leq 1 - \phi(z) \leq (2\pi)^{-1/2} z^{-1} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \text{ pour tout } z > 0, \end{aligned} \quad (\text{D.2.3})$$

nous obtenons en posant  $z = (R-m)/\sigma$  ou  $z = (R-m)/\beta$ ,

$$(i) P(\|Z\| > R) \leq \exp\left(-\frac{R^2}{3\sigma^2}\right) \text{ et } (ii) P(\|Z\| > R) \geq \exp\left(-\frac{R^2}{3\beta^2}\right). \quad (\text{D.2.4})$$

Enfin voilà un dernier résultat de Deheuvels et Lifshits [35] que nous utiliserons par la suite.

**Lemme D.2.2.** *Soit  $h \in \mathbb{H}$  et  $A \in \mathbb{B}$  un sous-ensemble symétrique de  $\mathbb{X}$ . Alors*

$$P_Z(A + h) \geq \exp \left\{ -\frac{1}{2} |h|_{\mathbb{H}}^2 \right\} P_Z(A). \quad (\text{D.2.5})$$



# Annexe E

## Espaces Hilbertiens et processus gaussiens

Nous donnons ici des définitions basiques sur les espaces de Hilbert.

**Définition 12** (Espace de Hilbert). Un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est issue d'un produit scalaire.

**Définition 13.** Soit  $H$  un espace de fonctions de Hilbert sur un ensemble  $X$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire associé. Pour  $(x, y) \in X \times X$ , la fonction  $K(y, x)$  est appelé *noyau auto-reproduisant* de  $H$  si

- 1) Pour tout  $x \in X$ ,  $K_x(y) = K(y, x)$  est une fonction de  $y$  appartenant à  $H$
- 2) Pour tout  $x \in X$  et  $f \in H$ ,  $f(x) = \langle f, K_x \rangle$ .

La propriété 2) correspond à la *propriété de reproduction*.

**Définition 14.** Un espace de Hilbert  $H$  de fonctions sur un ensemble  $X$  est appelé *Espace de Hilbert à noyau auto-reproduisant* (RKHS) s'il existe un noyau auto-reproduisant  $K$  de  $H$ .

Le théorème suivant de Parzen (Théorème 4D, p.966) permet d'expliciter le RKHS.

**Théorème E.0.3** (Parzen). *S'il existe un espace de mesure  $(Q, B, \mu)$  et une famille de fonctions  $\{f(t), t \in T\}$  dans  $L_2(Q, B, \mu)$  tels que le noyau  $K$  vérifie  $K(s, t) = \int_Q f(s)f(t)d\mu$ , alors l'espace de Hilbert  $H$  à noyau auto-reproduisant associé au noyau*

$K$  peut s'exprimer comme suit :  $H$  est l'ensemble des fonctions  $g$  définies sur  $T$ , représentées par

$$g(t) = \int_Q g^* f(t) d\mu,$$

pour une unique fonction  $g^*$  appartenant au sous-espace de Hilbert  $L_2(f(t), t \in T)$  de  $L_2(Q, B, \mu)$ , de norme  $\|g\|^2 = \int_Q |g^*|^2 d\mu$ .

Pour le cas du mouvement brownien sur  $[0, 1]$ , l'espace de Hilbert auto-reproduisant qui lui est associé s'exprime de la façon suivante.

$$\mathbb{H}_0^1 = \left\{ f : f(t) = \int_0^t \dot{f}(t) dt, \dot{f} \in L_2([0, 1]) \right\},$$

où  $\dot{f}$  désigne la dérivée de  $f$  par rapport à la mesure de Lebesgue. D'autre part, le noyau associé à ce RKHS correspond à la boule unité.

$$\mathbb{K}_0^1 = \left\{ f \in \mathbb{H}_0^1 : \int_0^1 \dot{f}^2(t) dt \leq 1 \right\}.$$

Le mouvement brownien est un cas particulier de processus gaussien. Voyons la définition et quelques propriétés des processus gaussiens.

**Définition 15.** On appelle processus gaussien indexé par  $T$ , tout processus  $(X(t))_{t \in T}$  tel que, pour toute famille finie  $(t_1, \dots, t_p)$  de  $T$ , le vecteur aléatoire  $(X(t_1), \dots, X(t_p))$  suit une loi gaussienne dans  $\mathbb{R}^p$ .

Dans la suite, nous ferons intervenir les *processus séparables*.

**Définition 16.** On dit qu'un processus  $(X(t))_{t \in T}$ ,  $T$  muni d'une métrique  $d$ , est séparable s'il existe un sous ensemble dénombrable  $T' \subset T$  tel que, pour tout ouvert  $O$  de  $T$ , on ait avec probabilité 1,

$$\sup_{t \in O} X(t) = \sup_{t \in O \cap T'} X(t).$$

Soit  $X$  un processus Gaussien centré, séparable, indexé par  $T$ . Pour alléger les notations, pour tout  $t \in T$ ,  $X_t = X(t)$ . On définit  $\rho$  la métrique intrinsèque sur  $T$  par

$$\rho(s, t) = \sqrt{E(X_s - X_t)^2}.$$

De plus, on note  $\|X\| = \sup_{t \in T} |X_t|$ . Le résultat suivant est obtenu par Borell (voir van der Vaart et Wellner [106] p.438

---

RÉSULTAT 9. Notons  $\sigma^2(X) = \sup_{t \in T} E(X_t^2)$ . Alors, pour tout  $t > 0$ ,

$$P\left(\|X\| - E\|X\| > t\right) \leq 2 \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2(X)}\right\}. \quad (\text{E.0.1})$$

Le résultat suivant est également présenté dans van der Vaart et Wellner [106] p.101. Pour l'exposer, introduisons pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $N(\varepsilon, \rho, T)$  le nombre minimal de boules de rayon  $\varepsilon$  nécessaire pour couvrir  $T$  dans la métrique  $\rho$ .

RÉSULTAT 10. Pour une constante universelle  $K > 0$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$E \sup_{\rho(s,t) < \varepsilon} |X_t - X_s| \leq K \int_0^\varepsilon \sqrt{\log N(s, \rho, T)} ds. \quad (\text{E.0.2})$$



# Bibliographie

- [1] A. de ACOSTA : Small deviations in the functional central limit theorem with applications to functional laws of the iterated logarithm. *Ann. Probab.*, 11(1):78–101, 1983.
- [2] A. de ACOSTA : On the functional form of Lévy’s modulus of continuity for Brownian motion. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 69:567–579, 1985.
- [3] R.J. ADLER : *An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes*, volume 12. Hayward CA, 1990.
- [4] E-E.A.A ALY, J. BEIRLANT et J. HORVÁTH : Strong and weak approximations of  $k$ -spacings processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 66:461–484, 1984.
- [5] M. ARCONES : The large deviation principle of stochastic processes. I. *Theory Probab. Appl.*, 47:567–583, 2003.
- [6] M. ARCONES : The large deviation principle of stochastic processes. II. *Theory Probab. Appl.*, 48:19–44, 2004.
- [7] R.B. ASH et M.F. GARDNER : *Topics in stochastic processes*, volume 82. Academic Press, New York, 1976.
- [8] P. BALDI, G. BEN AROUS et G. KERKYACHARIAN : Large deviations and the strassen theorem in Hölder norm. *Stochastic Process. Appl.*, 42:171–180, 1992.
- [9] J. BEIRLANT : Strong approximations of the empirical and quantile processes of uniform spacings. *in Proc. Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Limit Theorems in Probability and Statistics*, 36:77–90, 1984.

- [10] J. BEIRLANT, P. DEHEUVELS, J.H.J. EINMAHL et D.M. MASON : Bahadur-Kiefer theorems for uniform spacings processes. *Theory probab. appl.*, 36(4):647–669, 1991.
- [11] J. BEIRLANT, E.C. van der MEULEN, F.H. RUYMGAART et van ZUIJLEN M.C.A. : On functions bounding the empirical distribution of uniform spacings. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 61:417–430, 1982.
- [12] J. BEIRLANT et M.C.A. van ZUIJLEN : The empirical distribution function and strong laws for functions of order statistics of uniform spacings. *J. Multivariate anal.*, 16:300–317, 1985.
- [13] G. BEN AROUS et M. LEDOUX : Schilder’s large deviation principle without topology. *Asymptotic problems in probability theory : Wiener functionals and asymptotics*, 284:107–121, 1993.
- [14] P. BERTHET : Comportement oscillatoire du processus empirique uniforme et topologie de Hölder. *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I.*, pages 105–110, 1997.
- [15] P. BERTHET : On the rate of clustering to the Strassen set for increments of the uniform empirical process. *J. Theoret. Probab.*, 10(3):557–579, 1997.
- [16] P. BERTHET : Inner rates of coverage of Strassen type sets by increments of the uniform empirical and quantile processes. *Stochastic Process. Appl.*, 115:493–537, 2005.
- [17] P. BERTHET et M. LIFSHITS : Some exact rates in the functional law of the iterated logarithm. *Ann. I. H. Poincaré*, 6:811–824, 2002.
- [18] C. BORELL : The Brunn-Minkowski inequality in gauss space. *Inventiones Math.*, 30:207–216, 1975.
- [19] L. CALVET et A. FISHER : Multifractality in asset returns : Theorie and Evidence. 1999. Working paper.
- [20] L. CALVET et A. FISHER : Forecasting multifractal volatility. 2001.

- 
- [21] N. CHENTSOV : Wiener random fields depending on several parameters. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 106:607–609, 1956.
- [22] K.L. CHUNG : On the maximum partial sums of sequences of independent random variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64:205–233, 1948.
- [23] K.L. CHUNG, P. ERDÖS et T. SIRAO : On the Lipschitz's condition for Brownian motion. *Math. Soc. Japan*, 11(4):265–274, 1959.
- [24] R. CIOCZEK-GEORGES, B. MANDELBROT, G. SAMORODNITSKY et M. TAQQU : Stable fractal sums of pulses : The cylindrical case. *Bernoulli*, 1(3):201–216, 1995.
- [25] N. CRESSIE : On the logairthms of high-order spacings. *Biometrika*, 63:343–355, 1976.
- [26] M. CSÖRGŐ et P. RÉVÉSZ : How big are the increments of a multi-parameter Wiener process. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 42:1–12, 1978.
- [27] M. CSÖRGŐ et P. RÉVÉSZ : *Strong approximations in Probability and Statistics*. 1981.
- [28] D.A. DARLING : On a class of problems related to the random division of an interval. *Ann. Math. Statist*, 24:239–253, 1953.
- [29] P. DEHEUEVELS : Strong limiting bounds for maximal uniform spacings. *Ann. Probab.*, 10(4):1058–1065, 1982.
- [30] P. DEHEUEVELS : Strong bounds for multidimensional spacings. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 64:411–424, 1983.
- [31] P. DEHEUEVELS : Functional laws of the iterated logarithm for large increments of empirical and quantile processes. *Stochastic Process. Appl.*, 43:133–163, 1992.
- [32] P. DEHEUEVELS : Functional laws of the iterated logarithm for small increments of empirical processes. *Stat. Neerl.*, 50(2):261–280, 1996.

- [33] P. DEHEUVELS : Weighted multivariate tests of independence. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 36:2477–2491, 2007.
- [34] P. DEHEUVELS, J.H.J. EINMAHL, D.M. MASON et F.H. RUYMGAART : The almost sure behavior of maximal and minimal multivariate  $k_n$ -spacings. *J. Multivariate Anal.*, 24:155–176, 1988.
- [35] P. DEHEUVELS et M. LIFSHITS : Strassen-type functional laws for strong topologies. *Probab. Theory Related Fields*, pages 151–167, 1993.
- [36] P. DEHEUVELS et M.A. LIFSHITS : On the Hausdorff dimension of the set generated by exceptional oscillations of a Wiener process. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 33:75–110, 1997.
- [37] P. DEHEUVELS et D.M. MASON : Nonstandard functional laws of the iterated logarithm for tail empirical and quantile processes. *Ann. Probab.*, 18(4):1693–1722, 1990.
- [38] P. DEHEUVELS et D.M. MASON : Functional laws of the iterated logarithm for the increments of empirical and quantile processes. *Ann. Probab.*, 20(3):1248–1287, 1992.
- [39] P. DEHEUVELS et D.M. MASON : Functional laws of the iterated logarithm for local empirical processes indexed by sets. *Ann. Probab.*, 22(3):1619–1661, 1994.
- [40] P. DEHEUVELS et D.M. MASON : Random fractals generated by oscillations of processes with stationary and independent increments. *Probability in Banach Spaces*, 9:73–90, 1994. In Hoffman-Jorgensen, J., Kuelbs, J. and Marcus, M. B. (eds).
- [41] P. DEHEUVELS et D.M. MASON : On the fractal nature of empirical increments. *Ann. Probab.*, 23:355–387, 1995.
- [42] P. DEHEUVELS et D.M. MASON : Random fractal functional laws of the iterated logarithm. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 34:89–106, 1998.

- 
- [43] L. DEVROYE : Laws of the iterated logarithm for order statistics of uniform spacings. *Ann. Probab.*, 9(5):860–867, 1981.
- [44] Z. DINDAR : Loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les incréments du processus des espacements. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 324:679–684, 1997.
- [45] Z. DINDAR : *Lois limites locales pour les processus empiriques et applications*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1998.
- [46] Z. DINDAR : On the Hausdorff dimension of the set generated by exceptional oscillations of a two-parameter Wiener process. *J. Multivariate Anal.*, 79:52–70, 2001.
- [47] A. DVORETZKY, P. ERDŐS et S. KAKUTANI : Nonincrease everywhere of the Brownian motion process. *Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob.*, II:103–116, 1961.
- [48] H.G. EGGLESTON : Sets of fractional dimensions which occur in some problem of number theory. *Proc. London Math. Soc.*, 54:42–93, 1952.
- [49] U. EINMAHL et D.M. MASON : Gaussian approximation of local empirical processes indexed by functions. *Probab. Theory Related Fields*, 107:283–311, 1997.
- [50] K. FALCONER : *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge Univ, Press., 1985.
- [51] K. FALCONER : *Fractal Geometry-Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, New-York, 1990.
- [52] W. FELLER : *An introduction to probability theory and its applications*, volume I. Wiley, 1968.
- [53] H. FINKELSTEIN : The law of the iterated logarithm for empirical distributions. *Ann. Math. Statist.*, 42:607–615, 1971.
- [54] G.J. FOSCHINI et R.K. MUELLER : On Wiener process sample path. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 149:89–93, 1970.

- [55] N. GANTERT : An inversion of Strassen's law of the iterated logarithm for small time. *Ann. Probab.*, 21(2):1045–1049, 1993.
- [56] E. GINÉ et A. GUILLOU : Rates of strong uniform consistency for multivariate kernel density estimators. *Ann. I. H. Poincaré*, 38:907–921, 2002.
- [57] E. GINÉ, D.M. MASON et A. ZAITSEV : The L1-norm density estimator process. *Ann. Probab.*, 31(2):719–768, 2003.
- [58] N. GORN et M. LIFHITS : Chung's law and the csáki function. *J. Theoret. Probab.*, 12(2):399–420, 1999.
- [59] D. HANSON et R. RUSSO : On the law of large numbers. *Ann. Probab.*, 9(3):513–519, 1981.
- [60] D. HANSON et R. RUSSO : Some results on increments of the Wiener process with applications to lag sums or iidrv. *Ann. Probab.*, 11(3):609–623, 1983.
- [61] J. HAWKES : On the asymptotic behavior of sample spacings. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 90:293–303, 1981.
- [62] K. ITÔ : Multiple Wiener integral. *J. Math. Soc. Japan*, 3:157–169, 1951.
- [63] N.C. JAIN et S.J. TAYLOR : Local asymptotic laws for Brownian motion. *Ann. Probab.*, 1(4):527–549, 1973.
- [64] S. JANSON : Maximal spacing in several dimensions. *Ann. Probab.*, 15(1):274–280, 1987.
- [65] D. KHOSHNEVISAN et Z. SHI : Fast sets and points for fractional Brownian motion. *In Seminaire de Probabilites, XXXIV, Lecture Notes in Math., 1729*, pages 393–416. Springer, 2000.
- [66] J. KIEFER : Iterated logarithm analogues for sample quantiles when  $\rho_n \downarrow 0$ . *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1:227–244, 1972.

- 
- [67] T. KITAGAWA : Analysis of variance applied to function spaces. *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University - Series A*, 6:41–53, 1951.
- [68] A. N. KOLMOGOROV et V. M. TIHOMIROV :  $\varepsilon$ -entropy and  $\varepsilon$ -capacity of sets in functional space. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 17:277–364, 1961.
- [69] J. KOMLÓS, P. MAJOR et G. TUSNÁDY : An approximation of partial sums of independant r.v.'s and the sample d.f.i. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 32:111–131, 1975.
- [70] N. KÔNO : The exact Hausdorff measure of irregularity points for a Brownian path. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 40:257–282, 1977.
- [71] M. LEDOUX et M. TALAGRAND : *Probability in Banach spaces*. Berlin Heidelberg New York, 1991.
- [72] P. LÉVY : *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier-Villars et Cie, 1937.
- [73] P. LÉVY : Sur la division d'un segment par des points choisis au hasard. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 208:147–149, 1939.
- [74] P. LÉVY : *Le mouvement brownien*, volume fasc. 126. Mém. Sci. Math., 1954.
- [75] P. LÉVY : *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier-Villars Paris, 1965.
- [76] Z. LIN et Z. CHENG : Hausdorff dimension of set generated by exceptional oscillations of a class of n-parameter gaussian processes. *J. Appl. Math. Mech.*, 28(2):237–245, 2007.
- [77] D. LOUANI et A. LUCAS : Fractal dimensions for some increments of the uniform empirical process. *J. Theoret. Probab.*, 16(1):59–86, January 2003.
- [78] C. LU : How big are the lag increments of a two parameter Wiener process. *Chin. Ann. Math. Ser. B*, 12:122–130, 1991.

- [79] C. LU : How big are the lag increments of a two parameter Wiener process ii. *Chin. Ann. Math. Ser. B*, 14:347–354, 1993.
- [80] A. LUCAS : Fractales aléatoires de type chung pour les accroissements du processus de wiener. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*:1123–1126, 1998.
- [81] A. LUCAS : Fractales aléatoires non standard pour les accroissements empiriques. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 331:641–644, 2000.
- [82] A. LUCAS : Hausdorff Besicovitch measure for random fractals of Chung’s type. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 133:487–513, 2002.
- [83] A. LUCAS et E. THILLY : Hausdorff Besicovitch measure of fractal functional limit laws induced by wiener process in hölder norms. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 42:373–393, 2006.
- [84] D.M. MASON : A strong invariance theorem for the tail empirical process. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 24(4):491–506, 1988.
- [85] D.M. MASON : A uniform functional law of the logarithm for a local Gaussian process. *Progress in Probability*, 55:135–151, 2003.
- [86] D.M. MASON : A uniform functional law of the logarithm for the local empirical process. *Ann. Probab.*, 32:1391–1418, 2004.
- [87] M. MAUMY : *Etude du processus empirique composé*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2002.
- [88] C. MUELLER : A unification of Strassen’s law and Lévy modulus of continuity. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 56:163–179, 1981.
- [89] S. OREY et W. PRUITT : Sample function on the n-parameter Wiener process. *Ann. Probab.*, 1(1):138–163, 1973.
- [90] S. OREY et S.J. TAYLOR : How often on a Brownian path does the law of the iterated logarithm fail? *Proc. London Math. Soc.*, 28:174–192, 1974.

- [91] E. PARZEN : An approach to time series analysis. *Ann. Math. Statist.*, 32:951–989, 1961.
- [92] R. PYKE : Spacings. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 27(3):395–449, 1965.
- [93] J.S. RAO et J. SETHURAMAN : Weak convergence of empirical distribution functions of random variables subject to perturbations and scale factors. *Ann. Stat.*, 3(2):299–313, 1975.
- [94] P. RÉVÉSZ : A generalization of Strassen’s functional law of iterated logarithm. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 50:257–264, 1979.
- [95] M. SCHILDER : Some asymptotic formulas for Wiener integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 125:63–85, 1966.
- [96] G.R. SHORACK : Convergence of quantile and spacing processes with applications.
- [97] G.R. SHORACK et J.A. WELLNER : *Empirical Processes With Applications to Statistics*. John Wiley and Sons Inc, 1986.
- [98] E. SLUD : Entropy and maximal spacings for random partitions. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 41:341–352, 1978.
- [99] H. SOLOMON : *Geometric probability*. 1978.
- [100] V. STRASSEN : An invariance principle for the law of the iterated logarithm. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 3:211–226, 1964.
- [101] W. STUTE : The oscillation behavior of empirical processes. *Ann. Probab.*, 10(1): 86–107, 1982.
- [102] V.N. SUDAKOV et B.S. TSYREL’SON : Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures. *Journal. Sov. Math*, 9:9–18, 1974.
- [103] M. TALAGRAND : Sur l’intégrabilité des vecteurs gaussiens. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 68:1–8, 1984.
- [104] M. TALAGRAND : Sharper bounds for Gaussian and empirical processes. *Ann. Probab.*, 22:28–76, 1994.

- [105] C. Jr. TRICOT : Two definitions of fractional dimension. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 91:57–74, 1982.
- [106] A.W. van der VAART et J.A. WELLNER : *Weak convergence and Empirical Processes*. Springer, 1996.
- [107] N. WIENER : The Homogeneous Chaos. *Amer. J. Math.*, 60(4):897–936, 1938.
- [108] G. ZIMMERMAN : Some sample function properties of the two-parameter Gaussian process. *Ann. Math. Stat.*, 43(4):1235–1246, 1972.