THÉORIE DES NOMBRES. — Intégrales toroïdales des séries d'Eisenstein et fonctions Zêta.

Note de **Franck Wielonsky**, présentée par Jean-Pierre Serre.

Remise le 2 juillet 1984, acceptée le 16 juillet 1984.

Soit E un corps de nombres; la formule intégrale de Hecke permet d'écrire la fonction zêta de E comme une somme finie d'intégrales de séries d'Epstein (*cf.* [1], [2]). On étudie ici la version adélique de cette formule; celle-ci donne une expression des séries L d'une extension finie d'un corps global au moyen d'intégrales sur un tore de séries d'Eisenstein.

NUMBER THEORY. — Toroidal Integrals of Eisenstein Series and Zeta Functions.

Let E *be a number field over* **Q**; *a formula of Hecke gives the zeta function of* K *as a finite sum of integrals of Epstein series* (cf. [1], [2]). *We study here an adelic version of this formula which gives an expression of the* L*-series of a finite extension of an* **A***-field involving toroidal integrals of Eisenstein series.*

1. Tores et extensions algébriques. — Soient k un corps global et E une extension de dimension finie n sur k. Le choix d'une base $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ du k-espace vectoriel $V(k)$ sous-jacent à E détermine un plongement π de E dans l'algèbre $M_n(k)$ qui à un élément de x de E associe la matrice dans la base $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de l'endomorphisme $u_x \in \operatorname{End}(E)$ défini par :

$$u_x(y) = xy, \qquad y \in E.$$

On note $B(k)$ l'image de E par ce plongement et plus généralement pour toute extension K de k, on note $B(K)$ la sous-algèbre de $M_n(K)$, image par l'endomorphisme π prolongé à $E \otimes_k K$. Pour simplifier, on désigne par G le groupe algébrique GL_n et on note T le tore maximal de G dont le groupe des K-points est le groupe $B(K)^\times$ des éléments inversibles de $B(K)$.

Si v (resp. w) est une place de k (resp. de E), on note k_v (resp. E_w) le complété de k (resp. de E) en cette place et on pose :

$$E_v = E \otimes k_v.$$

On note μ_w l'application :

$$\sum \lambda_i \otimes \omega_i \mapsto \sum \lambda_i \omega_i,$$

de $E \otimes k_v$ dans E_w, $w_1, \ldots, w_s$ les places de E au-dessus de la place v de k et :

$$\mu : \quad E_v \to \prod_{w \mid v} E_w,$$

l'application telle que :

$$\mu(x) = (\mu_1(x), \ldots, \mu_s(x)),$$

qui est un isomorphisme de k_v-algèbres (*cf.* [3], th. 4, p. 56).

Soit r_v (resp. R_w) le sous-anneau compact maximal de k_v (resp. E_w); on pose :

$$B(r_v) = B(k_v) \cap M_n(r_v), \qquad G_v = \sum \omega_i \, r_v \subset E \otimes k_v.$$

Pour presque toute place v, l'application π induit un isomorphisme de sous-anneaux compacts maximaux entre G_v (ou $\prod_{w \mid v} R_w$) et $B(r_v)$.

Notons $\mathbf{A}_k$ (resp. $\mathbf{A}_E$) l'anneau des adèles de k (resp. E) et $T(\mathbf{A}_k)$ le groupe des points de T à valeurs dans $\mathbf{A}_k$.

L'application π induit un isomorphisme de $T(\mathbf{A}_k)$ sur $\mathbf{A}_E^\times$.

0249-6321/84/02990727 $ 2.00 © Académie des Sciences

2. Séries d'Eisenstein. — Soient $e=(0, \ldots, 0, 1)$ le dernier élément de la base canonique de V, $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat définies sur $V(\mathbf{A}_k)$ et μ une mesure de Haar sur le groupe des idèles $\mathbf{A}_k^\times$.

Proposition 1. — *Soient x une matrice de* $G(\mathbf{A}_k)$, φ *une fonction de* $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$, ω *un quasi-caractère de* $\mathbf{A}_k^\times$, σ *l'unique nombre réel tel que* :

$$|\omega|=\omega_\sigma \qquad \text{où} \quad \omega_\sigma(t)=|t|_{\mathbf{A}_k}^\sigma,$$

alors l'intégrale :

$$M(\varphi, x, \omega)=\int_{\mathbf{A}_k^\times} \varphi(etx)\,\omega(\det tx)\,d\mu(t)$$

converge pour $\sigma>1/n$.

La série d'Eisenstein $E(\varphi, x, \omega)$ est définie de la manière suivante :

$$E(\varphi, x, \omega)=\sum_{\gamma\in P(k)\diagdown G(k)} M(\varphi, \gamma x, \omega),$$

où P est le sous-groupe parabolique de G des matrices qui s'écrivent :

$$\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 0 & d \end{array}\right),$$

avec a matrice de GL_{n-1}, b vecteur colonne ayant $(n-1)$ composantes, d un élément de l'anneau de base tel que $d.\det a$ soit inversible dans cet anneau.

Proposition 2. — *On a des bijections* :

$$P(k)\diagdown G(k)\xrightarrow{\sim}\mathbf{P}^{n-1}(k)\xrightarrow{\sim}Z(k)\diagdown T(k),$$

$Z(k)$ *désignant le centre de* $G(k)$.

Démonstration. — On définit une bijection de $P(k)\diagdown G(k)$ sur l'espace projectif $\mathbf{P}^{n-1}(k)$ de la manière suivante :

Si on note p la projection de $G(k)$ sur le quotient $P(k)\diagdown G(k)$ et si x désigne une matrice de $G(k)$, l'image de $p(x)$ dans $\mathbf{P}^{n-1}(k)$ est la classe du vecteur ex. D'autre part, l'application π définie précédemment est un isomorphisme de $E^\times$ sur $T(k)$ qui induit une bijection de l'espace projectif $\mathbf{P}^{n-1}(k)$ sur $Z(k)\diagdown T(k)$.

En utilisant la bijection entre $P(k)\diagdown G(k)$ et $\mathbf{P}^{n-1}(k)$, on obtient une expression intégrale de la série d'Eisenstein à savoir :

$$(*) \qquad E(\varphi, x, \omega)=\int_{k^\times\diagdown\mathbf{A}_k^\times}\omega(\det tx).\sum_{\xi\in V(k)-\{0\}}\varphi(\xi\, tx)\,d\mu(t),$$

égalité qui permet de démontrer la :

Proposition 3. — *La série d'Eisenstein* $E(\varphi, x, \omega)$ *converge pour* $\sigma>1$.

En utilisant la méthode classique de Riemann, on peut aussi montrer sans difficulté le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle pour la série $E(\varphi, x, \omega)$.

3. L'intégrale toroïdale des séries d'Eisenstein. — En utilisant l'expression $(*)$ de la série $E(\varphi, x, \omega)$ et la bijection de l'espace projectif $\mathbf{P}^{n-1}$ sur le quotient $Z\diagdown T$, on obtient facilement le :

Théorème 1. — *Soient* $\mu_{Z\diagdown T}$ (resp. μ_E) *une mesure de Haar convenable sur le quotient* $T(k)Z(\mathbf{A}_k)\diagdown T(\mathbf{A}_k)$ (*resp. sur le groupe des idèles de* E), $\zeta(\varphi, \omega)$ *l'intégrale de Tate* :

$$\zeta(\varphi, \omega)=\int_{\mathbf{A}_E^\times}\varphi(t)\,\omega(t)\,d\mu_E(t);$$

on a :

$$\int_{\mathrm{T}(k)\,\mathrm{Z}(\mathbf{A}_k)\diagdown\mathrm{T}(\mathbf{A}_k)} \mathrm{E}(\varphi, t, \omega)\, d\mu_{\mathrm{Z}\diagdown\mathrm{T}}(t) = \zeta(\varphi, \omega\circ\mathrm{N}_{\mathrm{E}/k}).$$

Remarque. — La mesure μ_{E} étant choisie, on obtient $\mu_{\mathrm{Z}\diagdown\mathrm{T}}$ en utilisant la mesure de $\mathrm{Z}(\mathbf{A}_k)$ induite par la mesure μ de $\mathbf{A}_k^\times$ et celle du groupe $\mathrm{T}(\mathbf{A}_k)$, image de μ_{E} par l'isomorphisme π^{-1}.

4. LE CAS DES CORPS DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES. — On choisit à présent pour k le corps de fonctions rationnelles $\mathbf{F}_q(\mathrm{T})$ associé à la droite projective sur $\mathbf{F}_q$, q désignant une puissance d'un nombre premier p.

Soit E une extension de dimension n séparable sur k.

On désigne par r (resp. R) l'intersection des anneaux de valuation de k (resp. E) correspondant aux places finies :

$$r = \bigcap_{v \text{ finie}} (k \cap r_v) \qquad (\text{resp. } \mathrm{R} = \bigcap_{w \text{ finie}} (\mathrm{E} \cap \mathrm{R}_w)),$$

L'anneau R est la fermeture intégrale de r dans E puisque c'est l'intersection des anneaux de valuation de E contenant r, R est donc un r-module de type fini. De plus, r est principal et R admet une base sur r. Si on choisit une base de R sur r pour base de E sur k, alors l'application π induit un isomorphisme de sous-anneaux compacts maximaux entre G_v (ou $\prod_{w\mid v} \mathrm{R}_w$) et $\mathrm{B}(r_v)$ en chaque place v sans exception. C'est ce que l'on suppose dans la suite. On suppose également que le corps des constantes de E est égal à $\mathbf{F}_q$ et on note $\mathrm{X}(\mathbf{F}_q)$ la courbe associée au corps de fonctions algébriques E. D'autre part, on a la décomposition suivante :

$$\mathbf{A}_k^\times = \Gamma_k \,.\, \mathbf{A}_k^1,$$

où Γ_k est le sous-groupe de $\mathbf{A}_k^\times$ engendré par un élément z_k tel que $|z_k|_k = q$.

Posons :

$$\Omega_k(\varnothing) = \prod_v r_v^\times, \qquad \Omega_{\mathrm{E}}(\varnothing) = \prod_w \mathrm{R}_w^\times;$$

alors d'après [3], p. 97, on a :

$$\mathbf{A}_k^1 = k^\times \,.\, \Omega_k(\varnothing), \qquad \mathbf{A}_{\mathrm{E}}^\times = \mathrm{E}^\times \,.\, \Omega_{\mathrm{E}}(\varnothing) \,.\, \mathrm{Pic}(\mathrm{X}(\mathbf{F}_q)),$$

où $\mathrm{Pic}(\mathrm{X}(\mathbf{F}_q))$ désigne le groupe des classes de diviseurs de la courbe $\mathrm{X}(\mathbf{F}_q)$.

On a un isomorphisme de groupes commutatifs :

$$\mathrm{T}(k)\,\mathrm{Z}(\mathbf{A}_k)\diagdown\mathrm{T}(\mathbf{A}_k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}^\times \,.\, \mathbf{A}_k^\times \diagdown \mathbf{A}_{\mathrm{E}}^\times$$

et on peut montrer qu'il existe une projection de $\mathrm{E}^\times\, \mathbf{A}_k^\times \diagdown \mathbf{A}_{\mathrm{E}}^\times$ sur $\Gamma_k \diagdown \mathrm{Pic}(\mathrm{X}(\mathbf{F}_q))$ de noyau $\Omega_k(\varnothing) \,.\, \mathrm{R}^\times \diagdown \Omega_{\mathrm{E}}(\varnothing)$.

L'intégrale toroïdale du théorème 1 se récrit donc :

$$\mathrm{I} = \sum_{x \in \Gamma_k \diagdown \mathrm{Pic}(\mathrm{X}(\mathbf{F}_q))} \int_{\Omega_k(\varnothing)\,.\,\mathrm{R}^\times \diagdown \Omega_{\mathrm{E}}(\varnothing)} \mathrm{E}(\varphi, xt, \omega)\, d\mu_{\mathrm{E}}(t).$$

Supposons que l'on choisisse pour ω le quasi-caractère défini par :

$$\omega(t) = |t|_k^s, \qquad t \in \mathbf{A}_k^\times$$

et pour φ la fonction décomposable :

$$\varphi = \prod_v \chi_{\mathrm{G}_v},$$

où χ_{G_v} désigne la fonction caractéristique de G_v. On vérifie facilement que la série $E(\varphi, t, \omega)$ est invariante sur $\Omega_k(\varnothing) \,.\, R^\times \diagdown \Omega_E(\varnothing)$ de sorte que :

$$I = \sum_{x \in \Gamma_k \diagdown \operatorname{Pic}(X(\mathbf{F}_q))} E(\varphi, x, \omega).$$

D'autre part :

$$\varphi \circ \mu^{-1} = \prod_w \chi_{R_w},$$

donc l'intégrale de Tate $\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/k})$ n'est autre que la valeur en q^{-s} de la fonction zêta :

$$Z(X/\mathbf{F}_q, T) = \prod_{\substack{\text{P points} \\ \text{fermés}}} (1 - T^{\deg P})^{-1},$$

associée à la courbe $X/\mathbf{F}_q$.

Finalement :

$$Z(X/\mathbf{F}_q, q^{-s}) = \sum_{x \in \Gamma_k \diagdown \operatorname{Pic}(X(\mathbf{F}_q))} E(\varphi, x, \omega).$$

Références bibliographiques

[1] E. Hecke, Über die Kroneckersche Grenzformel für Reelle Quadratische Körper und die Klassenzahl Relativ-abelscher Körper, *Mathematische Werke*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1970, 1917, p. 198-207.

[2] M. Stark, The Analytic Theory of Algebraic Numbers, *Bull. A.M.S.* 81, 1975, p. 961-972.

[3] A. Weil, *Basic Number Theory*, Springer Verlag, 1967.

[4] D. Zagier, Eisenstein Series and the Riemann Zeta Function, in *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic, Bombay Colloquium*, Springer Verlag, 1979, p. 275-301.

Université de Nice, Département de Mathématiques,
parc Valrose, 06034 *Nice Cedex.*