USTL

Université des Sciences et Technologies de Lille

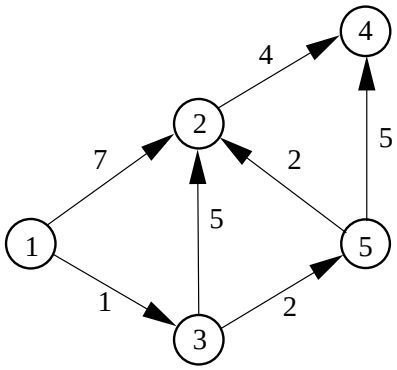
Math208 — Initiation à la modélisation mathématique
Licence Sciences — Devoir surveillé de Décembre 2006
Durée: 2 heures — Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 : **Algorithme de Dijkstra**

a) A quoi sert l'algorithme de Dijkstra ?

b) Décrire en quelques lignes les différentes étapes de l'algorithme.

c) Appliquer l'algorithme de Dijkstra sur le graphe suivant en prenant le sommet 1 comme point de départ,



Exercice 2 : **Trafic maritime entre deux continents**
Les ports de New-York et Montréal disposent d'un produit qui est réclamé dans les ports de Rotterdam, Londres et Hambourg. Les stocks sont les suivants (en millions de tonnes) :
New-York (NY): 5, Montréal (M): 8
Les demandes sont les suivantes :
Rotterdam (R): 7, Londres (L) : 3, Hambourg (H): 3
Les quantités totales de produit pouvant être transportées entre les différents ports sont les suivantes :

port de départ\port d'arrivée	Rotterdam	Londres	Hambourg
New-York	4	2	
Montréal		5	2

a) Modéliser ce problème comme un problème de flot maximal sur un graphe avec capacités que l'on précisera (il s'agit d'un problème d'affectation).
b) Comment organiser les expéditions pour satisfaire au mieux les demandes. On résoudra ce problème par l'algorithme de Ford-Fulkerson, en précisant les graphes d'écart des flots intermédiaires. Quelle est la valeur du flot maximal obtenu ?

T.S.V.P.

Exercice 3 :

a) Soit ω la première racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité différente de 1 (c'est à dire: $\omega = \exp i\frac{2\pi}{n}$) et soit $z_k = \omega^k$. Calculer

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} (z_k)^p$$

n et p étant deux entiers.

b) Soit $\mathcal{F}_n$la transformation de Fourier discrète d'ordre n:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}_n : & \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (y_k) & \longmapsto & (c_k) \end{array}$$

Donner sans démonstration l'expression des coefficients c_j en fonction des y_k. Expliquer l'utilité de cette transformation dans le cadre de l'interpolation trigonométrique.

Exercice 4 :

(a) Rappeler l'équation qui modélise les petites oscillations d'un pendule simple (sans frottement et sans forçage) de longueur l dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$. On notera θ l'angle que fait le pendule avec la verticale.

On suppose maintenant le pendule est forcé par un terme périodique de fréquence ω_f, c'est-à-dire que l'on considère l'équation suivante :

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \alpha \sin(\omega_f t) \tag{1}$$

où α et ω_f sont deux paramètres réels.

On rappelle que les notations $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ désignent les dérivées première et seconde de θ par rapport au temps t.

(b) A quoi correspond le paramètre ω?

(c) Donner la solution générale de (1).

(d) On donne maintenant les conditions initiales suivantes:

$$\theta(0) = 1 \quad ; \quad \dot{\theta}(0) = 0 \tag{2}$$

Donner la solution de (1) pour ces conditions initiales (2) dans le cas non résonnant.